
ESEARCH LIBRARIES
3 06274639 5


PAA

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Einundzwanzigster Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagshandlung
Th. Kunike.

1853.

Inhaltsverzeichniss des einundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.


PAA

$$(-A)^{\mu}$$

ne deviendra pas, comme l'on voudrait bien, la limite commune des deux expressions

$$(-A \pm \varepsilon\sqrt{-1})^{\mu},$$

ε convergeant indéfiniment vers zéro, que dans le cas particulier où la valeur numérique de l'exposant μ est un nombre entier.

Nota. C'est précisément à cause d'un pareil inconvénient que M. Cauchy s'est trouvé obligé à rejeter le projet [de M. Lamarle et d'autres] d'adopter pour ϑ celui des arcs satisfaisants à l'équation (4) qui se trouve compris entre 0 et (exclusive) 2π, ou, en d'autres termes, l'arc non-négatif qui, étant moindre à 2π, satisfait à l'équ. citée *). En effet, telle détermination de ϑ entraînerait évidemment le grave inconvénient que la quantité

$$A^{\mu}$$

ne deviendrait pas limite commune des deux expressions

$$(A \pm \varepsilon\sqrt{-1})^{\mu},$$

ε convergeant indéfiniment vers zéro, que dans le cas particulier de l'exposant μ numériquement entier, attendu qu'en vertu de cette détermination de ϑ,

$$\lim_{(\beta=0)}(A+\beta\sqrt{-1})^{\mu} \text{ serait } = A^{\mu} \text{ ou } = A^{\mu}e^{2\mu\pi\sqrt{-1}},$$

suivant que la convergence de β vers zéro se ferait du côté des quantités positives ou de celui des quant. négatives.

Au contraire, au moyen de ma détermination de ϑ ci-dessus mentionnée, on évite tout d'un coup les deux inconvénients actuellement indiqués, ou, en d'autres termes, en vertu de cette détermination de ϑ, la quantité

$$\alpha^{\mu}$$

pour des valeurs positives, aussi bien que pour des valeurs négatives de α, devient limite commune des deux expressions

*) Voir p. ex. la Note (de M. Lamarle) sur le théorème de M. Cauchy rélatif au développement des fonctions en séries, insérée dans le Journal de M. Liouville T. XI (1846), et, de l'autre côté, la Note de M. Cauchy, citée au dessus, sur le développement des fonctions etc.

$$(\alpha \pm \varepsilon \sqrt{-1})^\mu,$$

ε convergeant indéfiniment vers zéro. — Toutefois, par de telle détermination de ϑ, la quantité

$$(\beta \sqrt{-1})^\mu$$

pour des valeurs positives de β, devient limite commune des deux expressions

$$(\pm \varepsilon + \beta \sqrt{-1})^\mu,$$

ε convergeant indéfiniment vers zéro, tandis que, pour des valeurs négatives de β, l'on en tirera

$$\lim_{(\alpha=0)} (\alpha + \beta \sqrt{-1})^\mu = (\beta \sqrt{-1})^\mu \text{ ou } = (\beta \sqrt{-1})^\mu e^{2\mu\pi\sqrt{-1}},$$

suivant que la convergence de α vers zéro se fera du côté des quantités positives ou de celui des quantités négatives.

Dans tel état des choses, et depuis que je m'étais assuré qu'en effet il n'existe pas de telle détermination de ϑ, en vertu de laquelle la fonction $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^\mu$, quelle valeur réelle ou même positive qu'on ait attribuée à l'exposant μ, resterait continue pour tous les systèmes possibles de valeurs des α et β, mais qu'au contraire, quelle que soit la détermination adoptée pour ϑ, et même que l'exposant μ soit positif (outre que nombre entier), la fonction dont il s'agit, sera nécessairement discontinue ou pour $\beta=0$ (si l'on adopte la détermination de M. Lamarle ou même celle de M. Cauchy), ou pour $\alpha=0$ (si l'on adopte la mienne), ou pour quelque autre valeur de β ou de α, non-seulement il me semblait évident qu'il faudrait s'arrêter par préférence à l'une des trois déterminations ci-dessus mentionnées, en vertu desquelles la discontinuité fût placée à l'une des valeurs limites $\alpha=0$, $\beta=0$, mais de plus je croyais qu'en choisissant entre ces trois-là, on ne pourrait mieux servir à l'analyse qu'en se décidant exclusivement pour la détermination que j'avais proposée moi-même, attendu qu'en vertu de celle-ci la quantité fréquemment réelle α^μ deviendrait limite commune des deux $(\alpha \pm \varepsilon \sqrt{-1})^\mu$, tandis que par les deux autres l'on n'obtiendrait qu'une quantité le plus souvent imaginaire $(\beta \sqrt{-1})^\mu$ pour limite commune des deux $(\pm \varepsilon + \beta \sqrt{-1})^\mu$. C'est cette même opinion que j'avais ensuite soin d'énoncer non-seulement dans un „postscriptum“ à un article inséré dans l'Archiv der Mathematik und Physik de M. Grunert Th. IX. (1847), article n'étant en effet que la traduction en Latin de mon mémoire de 1845 ci-dessus men-

tionné, et dont j'avais l'honneur de présenter ensuite un exemplaire à M. Cauchy, mais aussi dans les premières lignes du mémoire de 10. Février 1847; et de plus je me prenais encore la liberté d'exprimer, dans l'un et l'autre lieu, l'espérance de ce que M. Cauchy, après avoir réflechi mûrement sur les motifs allégués, finirait par adopter lui-même la détermination que j'avais proposée. — Ce me fut donc en vérité surprenant de rencontrer, il y a peu de jours, dans deux des pages (253 et 259) des quatre cahiers dernièrement publiés des Exercices d'analyse et de physique mathém. de M. Cauchy, T. IV. (pag. 105—264)*), l'avertissement décisif de ce que l'illustre auteur, quoiqu' ayant pris connaissance de mon projet de la détermination de ϑ, et en approuvant les dénominations, proposées par moi, de puissance principale et de logarithme principal, avait jugé à propos de s'arrêter à sa propre détermination ci-dessus mentionnée. Il n'a pris point jusqu'ici **), à ce que je sais, la peine de motiver cette décision que par ces mots seuls, qu'il a eu soin d'ajouter immédiatement, après l'avertissement dont il s'agit: „Il en résul-

*) Il est à propos de remarquer ici que, d'après la parole du libraire, ces cahiers, quoiqu' ayant des enveloppes signées de 1847 (il y a lieu de supposer, en effet, que l'éditeur en avait fait imprimer à l'avant un nombre considérable, pour en avoir en réserve), n'auront été publiés que dans le courant de l'année passée 1851. Aussi l'on apprend, par les comptes rendus des séances de l'Acad. des sciences de Paris, que c'est dans la séance du 3. Sept. 1849 que M. Cauchy a mentionné pour la première fois la matière qui fait l'objet des deux articles, insérés dans les deux premiers des cahiers dont il s'agit, „Mémoire sur les quantités géométriques“ et „Méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques“, et qu'il a indiqué, en la y mentionnant, qu'alors même il avait sous la presse une „Note“ offrant une sorte de résumé des travaux faits par lui-même et par d'autres sur cette matière. En même temps il a communiqué aussi un extrait de cette même Note qui s'accord presqu' exactement avec les deux articles que je viens de nommer, et qui en outre indique en peu de mots le contenu de l'article (inséré dans le 3ième des mêmes cahiers) „Sur la quantité géométrique $i=1_{\frac{\pi}{2}}$, et sur la réduction d'une quant. géométrique quelconque à la forme $x+yi$.“ Les articles du 4ième cahiers semblent d'être d'une date encore plus tarde.

**) La nouvelle théorie de M. Cauchy pour les fonctions dont il s'agit ici, n'est pas nullement terminée par les quatre cahiers ci-dessus mentionnés, dont au contraire le dernier se finit immédiatement avant l'énoncé d'un intéressant théorème faisant le résultat du raisonnement par lequel se finit le cahier.

tera que les logarithmes principaux de deux quantités conjuguées seront encore deux quantités conjuguées" (pag. 253), et „Il en résultera qu'en élévant deux quantités conjuguées à des puissances indiquées par des exposants conjugués, on obtiendra encore, pour puissances principales, des quant. conjuguées" (p. 259). — Cependant, il y a une modification essentielle que l'on y trouve apportée par M. Cauchy à sa détermination de ϑ précédemment nommée. En effet, comme il est indiqué plus haut, M. Cauchy avait adopté précédemment $+\pi$ et (exclusive) $-\pi$ pour limites de ϑ. Mais à présent il a jugé à propos de supprimer ici le mot „exclusive", adoptant ainsi, en effet, pour définition de $\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ ou (pour abréger) de $\mathrm{l}(x)$, la suivante:

(6) $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{l}(x)=\mathrm{l}(\varrho)+\vartheta\sqrt{-1}, \\ \vartheta \text{ étant, parmi les arcs satisfaisants à l'équa-} \\ \text{tion (4) ci-dessus, celui qui ne surpasse pas} \\ \text{les limites } \pm\pi. \end{array}\right.$

Il est évident qu'en vertu de cette détermination de ϑ, l'expression $\mathrm{l}(x)$ n'aura qu'une seule et déterminée valeur pour chaque valeur de x (outre que $x=0$), si l'on excepte seulement le cas où x est une quantité négative $=-A$, auquel cas répondent, en vertu de cette définition (6), les deux valeurs distinctes

(7) $$\mathrm{l}(-A)=\mathrm{l}(A)\pm\pi\sqrt{-1}.$$

Et comme, en effet, ces deux valeurs équivalent précisement aux deux limites mêmes vers lesquelles les deux expressions $\mathrm{l}(-A\pm\varepsilon\sqrt{-1})$ convergent, d'après la signification donnée par la définition (6), tandis que ε s'approche indéfiniment vers zéro; il en est évident qu'en effet, par cette manière d'envisager les choses, M. Cauchy a non-seulement en général attribué à l'expression $\mathrm{l}(-A)$ deux valeurs distinctes, savoir les deux valeurs (7), mais en outre précisé que de ces deux valeurs la supérieure seule ou l'inférieure seule sera censée valeur unique de cette expression $\mathrm{l}(-A)$ dans chaque calcul particulier où elle entre comme limite d'une fonction imaginaire de la forme $\mathrm{l}(-A+\beta\sqrt{-1})$ où le coefficient β converge indéfiniment vers zéro, suivant que cette convergence de β vers zéro se fera du côté des quantités positives ou de celui des quantités negatives *).

*) Dans le mémoire précédemment nommé du 10. Févr. 1847, „Sur le sens des notations Arcsin$x$ et Arccos$x$", j'avais m'été trouvé,

$$(10)\quad \begin{cases} l(\alpha+\beta i)=l(\varrho)+\vartheta i, \\ (\alpha+\beta i)^{\mu}=e^{\mu l(\alpha+\beta i)}=\varrho^{\mu}e^{\mu\vartheta i} \text{ *)}, \end{cases}$$

ϑ étant limité par $\pm\pi$,

il s'en trouve avoir assujetti, en effet, la notation $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{-1}$ **) à désigner indistinctement les deux $\pm i$ et, en général, la notation $(-A)^{\mu}$ à désigner indistinctement les deux $A^{\mu}e^{\pm\mu\pi i}$, p. ex. $(-A)^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{-A}=\pm i\sqrt{A}$, etc. Et de telle manière il a effectivement évité la contradiction ci-dessus mentionée.

Après ce résumé historique, maintenant je vais préciser l'objet principal de cette communication. En m'apercevant que M. Cauchy ayant pris connaissance des raisons en vertu desquelles je m'étais trouvé obligé à préférer ma détermination de ϑ ci-dessus indiquée, il n'avait pas moins jugé à propos de s'arrêter, en définitive, à la sienne (avec la seule modification, que je viens d'indiquer, concernant la non-exclusion d'aucune des limites $\pm\pi$), je ne put naturellement m'empêcher d'entrer en défiance de mon projet. Je ne pouvais pas non plus désavouer l'importance de l'argument pour le système de M. Cauchy qui se trouve indiqué par les deux propositions, citées plus haut, des logarithmes principaux et des puissances principales des quantités conjuguées, propositions qui ne peuvent être généralement admises, dans le système qui se fonde en mon projet, pour des quantités dont la partie réelle est négative ***). L'importance de l'argument dont il s'agit se fait mieux sentir, si l'on observe qu'il se trouve en effet intimément lié avec cet autre argument pour le projet de M. Cauchy qu'en vertu de ce système la discontinuité (qu'en effet on ne peut éviter nullement ni par l'un ni par l'autre des

*) Exerc. d'Anal. et de Phys. mathém. T. IV. pag. 248 et 255.

**) Ibid. pag. 257.

***) Ainsi p. ex., en vertu de mon projet, l'on aurait

$$l(-A+B\sqrt{-1})=l(r)+\vartheta\sqrt{-1},\ \text{à savoir},\ \vartheta=\pi-\text{Arctg}\frac{B}{A},$$

$$l(-A-B\sqrt{-1})=l(r)+\vartheta'\sqrt{-1},\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \vartheta'=\pi-\text{Arctg}\frac{B}{A},$$

(A et B positifs, r étant le module)

et, par conséquent, ϑ' non $=-\vartheta$.

systèmes dont il s'agit) des deux fonctions $l(x)$ et x^μ se trouvera portée à la valeur même $\beta=0$ qui forme précisément la limite entre les valeurs réelles et les valeurs imaginaires de x $(=\alpha+\beta i)$, tandis qu'au moyen de mon projet, qui fixe leur discontinuité à la valeur $\alpha=0$, elles demeureraient continues dans le passage de la variable x du réel à l'imaginaire *). Mais il y a effectivement une manière de procéder, à l'aide de laquelle on sera conduit, il ne se peut pas plus simplement et directement, à la solution décisive de la question dont il s'agit. En effet, au lieu de considérer les deux fonctions dont il s'agit tout d'abord dans leur plus grande généralité, qu'on se contente d'opérer au premier abord sur le cas particulier le plus simple, la fonction même $\sqrt{a+bi}$, et, en y omettant toutes considérations géométriques (ou trigonométriques), qu'on se propose de chercher directement quelle que soit l'expression (ou la fonction de a et de b) purement algébrique qu'il convienne à représenter par cette notation. En cherchant donc, en premier lieu, l'expression algébrique des racines de l'équation

$$z^2=a+bi, \quad (a \text{ et } b \text{ quantités réelles}),$$

l'on trouvera, au moins si l'on omet d'abord le cas de $b=0$,

$$z=\pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2}}\sqrt{\frac{r-a}{2}}.\,i\right], \; **)$$

(r désignant la module $\sqrt{a^2+b^2}$),

---

*) Ainsi p. ex., au moyen de mon projet, $\sqrt{x}$ demeurerait fonction continue de x, tandis que x soit réelle, même pour $x=0$, ou qu'en vertu de lui, $\sqrt{-A}$ n'a qu'une unique valeur, non moins que $\sqrt{A}$ elle-même, et de plus toutes les deux convergent avec A indéfiniment vers zéro; — mais non pas ainsi nullement d'après le projet de M. Cauchy, vu qu'en vertu de lui, $\sqrt{-A}$ a deux valeurs distinctes (à savoir, $\pm\sqrt{A}.i$) pour chaque valeur positive de A.

**) En effet, pour trouver les quantités réelles u et v propres à vérifier l'équation

$$(u+vi)^2=a+bi, \quad (b \text{ n'étant pas } =0),$$

on n'aura évidemment qu'à résoudre ce système d'équations

$$\begin{cases} u^2-v^2=a, \\ 2uv=b, \end{cases}$$

ou, plutôt, le suivant

$$\begin{cases} u^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \text{ ou } u=\pm\sqrt{\dfrac{r+a}{2}}, \\ v=\dfrac{b}{2u}; \end{cases}$$

et comme évidemment cette expression des racines convient également au cas même $b=0$, soit que l'on y entend $+1$ ou -1 par la notation $\frac{b}{\sqrt{b^2}}$ *), il s'ensuit nécessairement que l'on aura, en tous cas,

$$(11)\qquad \sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2}}\sqrt{\frac{r-a}{2}}\cdot i\right]^{**)}.$$

Cela posé, pour décider à laquelle des deux expressions dans ce second membre il convienne d'attribuer la notation particulière $\sqrt{a+bi}$ et, en même temps, la dénomination de la racine carrée principale de $a+bi$, il suffira d'observer que dans cet égard on n'est obligé par les parties précédentes de l'analyse qu'à y choisir celle des deux expressions dont il s'agit qui, dans le cas où, b étant $=0$, a est une quantité positive A, se réduira à $\sqrt{A}$. En effet, comme il n'y a évidemment que la supérieure seule qui satisfait à cette condition, l'on en est conduit décisivement à adopter, pour tous les cas, cette définition:

$$(12)\qquad \sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{r+a}{2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2}}\sqrt{\frac{r-a}{2}}\cdot i,$$

et il est clair qu'on en a attribué à la notation $\sqrt{a+bi}$ une valeur unique, finie et determinée, pour chaque système de valeurs des a et b, excepté le cas où, b étant $=0$, a est une quantité néga-

---

d'ou vient

$$u+vi=z=\pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}}+\frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{\frac{r-a}{2}}}i\right],$$

c. à d. le second membre de (11).

*) Vu que le raisonnement dans la note qu'on vient de lire, appliqué à l'équation $z^2=a$, donne évidemment

$$z=\pm\sqrt{a} \text{ ou } \pm\sqrt{-a}.i,$$

suivant que a soit positif ou négatif.

**) Adjoindre ici de mots d'explication de ce que l'on aura à entendre par la notation $\frac{b}{\sqrt{b^2}}$ dans le cas particulier $b=0$, ce ne serait que superflu, vu que l'on sait déjà, des parties précédentes de l'analyse, que cette notation, dans le cas dont il s'agit, n'est capable que des deux valeurs ± 1, et que, de plus, on aura dans ce cas tout-à-fait le même résultat, soit que l'on y remplace $\frac{b}{\sqrt{b^2}}$ par l'une ou par l'autre, ou même par les deux ± 1 à la fois.

tive $-A$, mais qu'elle aura, dans ce cas, les deux valeurs distinctes $\pm\sqrt{A}.i$. De plus, comme en effet ces deux valeurs-là équivalent précisément aux deux limites mêmes vers lesquelles convergera le second membre de la formule (12), tandis que, a étant une quantité négative, b s'approche indéfiniment de zéro du côté des quantités positives ou de celui des quantités négatives, il en est évident que par cette définition (12) on a effectivement adopté la convention de ce que la notation $\sqrt{-A}$ sera censée capable, en général, de deux valeurs distinctes, savoir $\pm\sqrt{A}.i$, mais de plus que de ces deux valeurs, en définitive, la supérieure seule ou l'inférieure seule sera censée valeur unique de cette expression $\sqrt{-A}$ dans chaque calcul où elle entre comme limite d'une fonction imaginaire de la forme $\sqrt{-A+bi}$ dont le coefficient de i converge indéfiniment vers zéro, suivant que cette convergence vers zéro se fera du côté des quant. positives ou de celui des quant. négatives*). Ainsi p. ex., en vertu de cette définition, la notation $\sqrt{-1}$ sera capable, en général, des deux valeurs $\pm i$; mais, dans chaque calcul où elle entrera comme limite d'une fonction imaginaire de la forme $\sqrt{-1+bi}$ dont le coefficient b converge indéfiniment vers zéro, l'on devra censer, en définitive,

(13) $$\sqrt{-1}=\pm i,$$

suivant que cette convergence vers zéro se fera du côté des quant. positives ou de celui des quant. négatives.

Maintenant, passons à la notation plus générale

(14) $$\sqrt[n]{a+bi}, \text{ ou } (a+bi)^{\frac{1}{n}},$$

[n désignant un nombre entier quelconque >1].

En observant d'abord qu'une quantité quelconque $a+bi$ dont on aura désigné le module $\sqrt{a^2+b^2}$ par la lettre r, peut être représentée par

$$r(\cos t+i\sin t),$$

t (l'argument) désignant un arc réel, quelqu'on aura bien voulu s'y choisir dans l'infinité de ceux qui vérifient les deux conditions

(15) $$r\cos t=a,\quad r\sin t=b,$$

et que, par suite, on aura constamment

---

*) Il est aisé de reconnaître l'analogie remarquable de cette définition et de celles des notations Arcsin x et Arccos x, données, comme il est dit plus haut, dans mon mémoire du 10. Février 1847.

$$(a+bi)^n = r^n(\cos nt + i\sin nt),$$

il ne faudra, pour trouver la définition convenable de la notation dont il s'agit, que de chercher d'abord les racines de l'équation

$$z^n = a+bi = r(\cos t + i\sin t),$$

et, après que l'on en a trouvé les deux formules connues

$$(16)\qquad \sqrt[n]{a+bi} = ((1))^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{t}{n} + i\sin\frac{t}{n}),$$

$$(17)\qquad ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

[$\sqrt[n]{a+bi}$ ou $((a+bi))^{\frac{1}{n}}$ désignant, comme à l'ordinaire, pour abréger, l'expression analytique qui renferme à la fois les racines (dont il s'agit) toutes ensemble], d'observer enfin qu'en choisissant parmi les diverses quantités, en nombre de n, qui se trouvent comprises dans le second membre de la formule (16), une seule à laquelle il convienne d'attribuer, par préférence, la notation (14) et la dénomination de racine principale, l'on n'est obligé, dans cet égard, par les parties précédentes de l'analyse qu'à y choisir celle qui, en étant sa définition de la forme

$$(18)\qquad \sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\,.\,(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}),$$

remplira, quant à l'argument ϑ, non-seulement les deux conditions générales (15), mais, de plus,

1) pour $b=0$ et $a \geqq 0$, les conditions $\begin{cases}\cos\frac{\vartheta}{n} = 1,\\ \sin\frac{\vartheta}{n} = 0,\end{cases}$

2) pour $n=2$, les conditions $\begin{cases}\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{a}{r}}{2}},\\ \sin\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{a}{r}}{2}},\end{cases}$

suivant que b soit positive ou négative.

En effet, comme, en vertu de ce 2), quelles que soient les deux quantités réelles a et b, l'arc ϑ de la racine en question jouira

de la propriété d'avoir pour moitié un arc dont le cosinus ne sera jamais négatif, et que, de plus, tous les arcs t qui sont propres à vérifier les deux conditions générales (15), ne diffèrent entre eux numériquement que par une ou plusieurs circonférences entières (2π), l'on en est conduit évidemment à adopter pour ϑ celui de ces arcs t qui non-seulement ne surpasse pas numériquement 2π, mais pas même π*), par conséquent celui, en définitive, qui, en remplissant les deux conditions générales (15), sera compris entre π et $-\pi$ (inclusivement).

C'est précisément par ces derniers mots, et sans qu'il y aura besoin à présent de procéder plus loin dans le raisonnement, que l'objet principal de cette communication se trouve défini. En effet, de même que j'avais autrefois énoncé publiquement, comme il est dit plus haut, l'opinion que j'avais alors de la préférence de ma détermination de ϑ sur celle de M. Cauchy, en indiquant en même temps les motifs de cette opinion, j'ai voulu aujourd'hui non-seulement — ce qu'il y avait de mon devoir — avouer sincèrement, que dès à présent je suis d'accord entièrement avec M. Cauchy de ce qu'il faut adopter, en définitive, sa dernière détermination de ϑ (à savoir, celle qui n'exclue pas ni l'une ni l'autre des limites $\pm\pi$), mais encore indiquer brièvement — comme je l'ai fait ci-dessus — la manière, presqu'à l'étonnement simple**), au moyen de laquelle je me suis enfin trouvé mis à l'abri de toute ambiguité dans ce point-là, et de laquelle certainement tout autre que moi qui s'intéresse pour la partie de l'analyse dont il s'agit, se trouvera conduit directement au même but. De plus il est évident de ce qui a été dit au dessus que l'aveu dont je vient de me dégager, implique nécessairement cet autre que j'ai reconnu, moi aussi, avec M. Cauchy la nécessité de n'employer plus le signe $\sqrt{-1}$ dans la définition d'expression imaginaire ou (pour faire usage de la dénomination proposée par moi) de quantité analytique en général. Au reste, à ce que j'espère, j'aurai l'occasion bientôt de présenter à l'Académie une exposition plus complète, et fondée sur les principes indiqués superficielle-

---

*) Il est évident de cela qu'en effet on ne pourra, sans violer la définition (12), adopter pour ϑ-limites ni celles de M. Lamarle et d'autres (0 et 2π), ni celles proposées par moi auparavant $\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\right)$.

**) Que jusqu'à ce jour personne (à ce que je sais), ni même M. Cauchy, n'a jamais mis à profit cette manière très-simple, c'est qu'on ne peut assez admirer, eu égard à ce qu'il y a d'hasardeux de travailler sur l'édifice d'un systéme scientifique avant qu'on n'ait eu soin d'y jeter bien les fondemens.

ment aujourd'hui, de la théorie des puissances principales et des logarithmes principaux, sans qu'il y aura besoin d'abandonner entièrement, comme l'a fait dernièrement M. Cauchy*), la théorie jusqu'ici adoptée des quantités analytiques et de la remplacer par un systeme, jusqu'à la dénomination même „quantité géométrique", entièrement nouveau et basé sur des principes purement géométriques.

Postscriptum. Il est à propos d'annoncer ici de ce qu'en effet j'ai eu l'occasion plus tard de faire l'exposition, mentionnée ci-dessus, de la théorie des puissances principales et des logarithmes principaux dans un memoire „Sur les fonctions x^y et Log $_p(x)$" présenté à l'Académie des Sciences de Stockholm dans le moi de Juin 1852.

Westerås (en Suède) le 14. März 1853.

E. G. Björling.

---

*) Voir les cahiers récemment publiés (dont je viens de parler ci-dessus) des Exercices d'analyse et de physique mathématique de M. Cauchy.

II.

Méthode pour la résolution algébrique de certaines espèces d'équations d'un dégré quelconque;

par

Monsieur Dr. *E. G. Björling*,

Lector, Membre de l'Acad. des sciences de Stockholm à Westerås en Suède.

(Extrait de l'Aperçu des Transactions de l'Acad. des sciences de Stockholm, Séance du 11. Févr. 1852.)

Par hasard il m'arriva, il y a quelques jours, de me ressouvenir d'avoir vu autrefois, dans l'Archiv der Mathem. und Physik de M. Grunert (Th. I. p. 254), l'avertissement d'une méthode nouvelle pour résoudre algébriquement les équations du 3ième dégré, exposée dans un article intitulé „Neue Auflösung der cubischen Gleichungen, von Herrn J. Cockle (Aus Cambridge mathem. Journal No. XII. frei übersetzt von dem Herausgeber)." On peut comprendre aisément l'idée de cette méthode au moyen des lignes suivantes:

1) Les coefficiens de l'équation

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

remplissant la condition $3ac=b^2$, si l'on transpose d'abord le terme x^3 et, puisqu'on aura multiplié les termes de l'équation nouvelle par $3ab$, que l'on y ajoute aux deux membres le terme a^3x^3, on n'aura qu'à résoudre l'équation

$$a(a^2-3b)\,x^3=(ax+b)^3,$$

ou, ce qui revient au même, l'équation binome

$$a(a^2-3b)=(a+\frac{b}{x})^3;$$

et 2) toutes les fois que les coefficiens de l'équation proposée ne remplissent pas la dite condition, alors il ne faudra que d'y poser

$$x=y+z,$$

pour la réduire à une équation en y, du 3ième dégré, dont les coefficiens vérifieront la condition mentionnée, pourvu que l'on y adopte pour z l'une ou l'autre des racines d'une certaine équation du 2ième dégré.

Cela étant, il m'a intéressé de chercher quelle soit la proposition générale dont la précédente 1) ne forme qu'un corollaire pour le cas particulier de l'équation du 3ième dégré, autant plus que de prime abord je m'étais aperçu de ce qu'en effet cette méthode de résolution ne dépend pas nullement du coefficient de la plus haute puissance de x, et que, par conséquent, elle ferait connaître à la fois les racines d'une équation du $m^{ième}$ dégré dont les coefficiens sont propres à vérifier de certaines conditions, et celles d'une équation du $(m-1)^{ième}$ dégré dont les coefficiens remplissent les mêmes conditions. En voici le résultat!

1) Pour trouver les racines d'une équation quelconque de la forme suivante:

$$(1) \qquad 0=a+bx+cx^2+dx^3,$$

dont les coefficiens a, b, c, n'étant pas $=0$ aucun, vérifient la condition

$$(\alpha) \qquad ca=\tfrac{1}{3}b^3,$$

il ne faudra que de résoudre l'équation

$$(1') \qquad \frac{1}{x}=\frac{-c+\sqrt[3]{c^3-3cbd}}{b}.$$

Et comme, en effet, cette proposition subsiste encore dans le cas où d soit $=0$, l'on en peut conclure immédiatement que les racines de toute équation complète du 2ième dégré

$$0=a+bx+cx^2,$$

dont tous les coefficiens vérifient la condition (α), pourront être puisées de la formule

$$\frac{1}{x}=\frac{c}{b}(\varepsilon_3-1),$$

pourvu que l'on y fait ε_3 représenter l'une après l'autre des deux racines cubiques imaginaires de l'unité.

2) Pour trouver les racines d'une équation quelconque de la forme suivante:

$$(2) \qquad 0=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4,$$

dont les coefficiens a, b, c, d, n'étant pas $=0$ aucun, vérifient les deux conditions

$$(\beta) \qquad \begin{cases} db=\left(\frac{2}{3}c\right)^2, \\ d^2a=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}c\right)^3, \end{cases}$$

il ne faudra que de résoudre l'équation

$$(2') \qquad \frac{1}{x}=\frac{-d+\sqrt[3]{d^4-\frac{8}{3}d^2ce}}{\frac{2}{3}c}.$$

Et comme, en effet, cette proposition subsiste encore dans le cas où e soit $=0$, l'on en peut conclure immédiatement que les racines de toute équation complète du 3ième dégré, de la forme (1), dont tous les coëfficiens vérifient, non plus la condition (α), mais les deux conditions (β) *), pourront être puisées de la formule

$$\frac{1}{x}=\frac{3d}{2c}(\varepsilon_4-1),$$

pourvu que l'on y fait ε_4 représenter successivement toutes les racines 4ièmes de l'unité, à l'exception de la seule $+1$.

3) Pour trouver les racines d'une équation quelconque de la forme suivante:

$$(3) \qquad 0=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5,$$

dont les coëfficiens a, b,.... e, n'étant pas $=0$ aucun, vérifient les trois conditions

---

*) En effet, de ces deux conditions (β) on tire, pour la relation des coefficiens a, b, c, non plus la formule (α), mais au lieu cette autre: $ac=\frac{3}{8}b^2$.

$$(\gamma)\quad \begin{cases} ec = 2\left(\frac{d}{2}\right)^2, \\ e^2b = \left(\frac{d}{2}\right)^3, \\ e^3a = \frac{1}{5}\left(\frac{d}{2}\right)^4, \end{cases}$$

il ne faudra que de résoudre l'équation

$$(3')\qquad \frac{1}{x} = \frac{-e + \sqrt[5]{e^5 - \frac{5}{2}e^3df}}{\frac{1}{2}d}.$$

Et comme, en effet, cette proposition subsiste encore dans le cas où f soit $=0$, l'on en peut conclure immédiatement que les racines de toute équation complète du 4ième dégré, de la forme (2), dont tous les coefficiens vérifient, non plus les conditions (β), mais les trois conditions (γ) *), pourront être puisées de la formule

$$\frac{1}{x} = \frac{2e}{d}(\varepsilon_5 - 1),$$

pourvu que l'on y fait ε_5 représenter successivement toutes les racines 5ièmes de l'unité, à l'exception de la seule $+1$.

Maintenant, voici la proposition generale:

Théorème 1.

Pour trouver les racines d'une équation quelconque de la forme suivante (m désignant un nombre entier):

$$(1)\qquad 0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1},$$

dont les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_m$ (quel que soit le coefficient a_{m+1}), n'étant pas $=0$ aucun, vérifient les $(m-1)$ conditions

---

*) En effet, de ces trois conditions (γ) on tire, pour la relation des coefficiens d, b, c, et pour celle des coefficiens d, a, c, non plus les formules (β), mais au lieu les deux suivantes:

$$db = \frac{c^2}{2},\quad d^2a = \frac{c^3}{10}.$$

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} a_m a_{m-2} = \frac{(m)_2}{3}\,{}^{*)} \left(\frac{2}{m} a_{m-1}\right)^2, \\ a_m^2 a_{m-3} = \frac{(m)_3}{4} \left(\frac{2}{m} a_{m-1}\right)^3, \\ a_m^3 a_{m-4} = \frac{(m)_4}{5} \left(\frac{2}{m} a_{m-1}\right)^4, \\ \vdots \\ a_m^{m-1} a_0 = \frac{(m)_m}{m+1} \left(\frac{2}{m} a_{m-1}\right)^m, \end{cases}$$

il ne faudra que de résoudre l'équation

$$\text{(I')}\quad \frac{1}{x} = \frac{-a_m + \sqrt[m]{a_m^{m+1} - 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) a_m^{m-1}\, a_{m-1} a_{m+1}}}{\frac{2}{m} a_{m-1}}.$$

La démonstration sera donnée à l'instant. Mais cependant il est essentiel de remarquer ici, en passant, que cette proposition subsistant, en effet, encore pour le cas de $a_{m+1} = 0$, on en tirera immédiatement cette autre:

Theorème 2.

1) Les racines de toute équation *complète* du $m^{ième}$ dégré

$$\text{(II)}\quad 0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

dont tous les coefficiens vérifient les $(m-1)$ conditions (A), pourront être puisées de la formule

$$\text{(II')}\quad \frac{1}{x} = \frac{m a_m}{2 a_{m-1}} (\varepsilon_{m+1} - 1),$$

pourvu que l'on y fait ε_{m+1} représenter successivement toutes les racines $(m+1)^{ièmes}$ de l'unité, à l'exception de la seule $+1$. De plus

2) pour trouver les racines d'une équation quelconque, de la forme (II), dont les coefficiens a_0, a_1, ... a_{m-1} (quel que soit le coeff. a_m), n'étant pas $=0$ aucun, vérifient les $(m-2)$ conditions

---

*) A savoir, le coefficient binomial, comme à l'ordinaire.

$$
(B)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{m-1}\, a_{m-3} &= \frac{(m-1)_2}{3}\left(\frac{2}{m-1}a_{m-2}\right)^2,\\
a_{m-1}^2\, a_{m-4} &= \frac{(m-1)_3}{4}\left(\frac{2}{m-1}a_{m-2}\right)^3,\\
a_{m-1}^3\, a_{m-5} &= \frac{(m-1)_4}{5}\left(\frac{2}{m-1}a_{m-2}\right)^4,\\
&\;\;\vdots\\
a_{m-1}^{m-2}\, a_0 &= \frac{(m-1)_{m-1}}{m}\left(\frac{2}{m-1}a_{m-2}\right)^{m-1},
\end{aligned}\right.
$$

il ne faudra que de résoudre l'équation

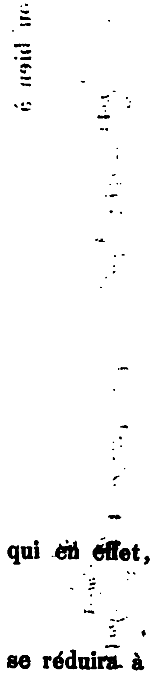
$$
(\mathrm{II}'')\quad \frac{1}{x} = \frac{-a_{m-1} + \sqrt[m]{a_{m-1}^m - \frac{2m}{m-1}a_{m-1}^{m-2}a_{m-2}a_m}}{\frac{2}{m-1}a_{m-2}}.
$$

La démonstration du théorème 1. peut être formulée ainsi qu'il suit:

Au lieu de l'équation (I) ou, ce qui revient au même, de la suivante

$$
-a_{m+1}x^{m+1} = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0
$$

on obtiendra, en multipliant par $\mu a_m^{m-1} a_{m-1}$ (ces deux coefficiens n'étant pas $=0$, ni l'un ni l'autre) et en ajoutant aux deux membres $a_m^{m+1} x^{m+1}$, la nouvelle équation



$$\left(a_m^{m+1} - \mu a_m^{m-1} a_{m-1} a_{m+1}\right) x^{m+1} = (a_m x)^{m+1} + (m+1)_1 (a_m x)^m \cdot \frac{\mu}{(m+1)_1} a_{m-1}$$

$$+ (m+1)_2 (a_m x)^{m-1} \cdot \frac{\mu}{(m+1)_2} a_{m-1}^2$$

$$+ (m+1)_3 (a_m x)^{m-2} \cdot \frac{\mu}{(m+1)_3} a_m a_{m-1} a_{m-2}$$

$$+ (m+1)_4 (a_m x)^{m-3} \cdot \frac{\mu}{(m+1)_4} a_m^2 a_{m-1} a_{m-3}$$

$$+ (m+1)_5 (a_m x)^{m-4} \cdot \frac{\mu}{(m+1)_5} a_m^3 a_{m-1} a_{m-4}$$

$$\vdots$$

$$+ (m+1)_m (a_m x) \cdot \frac{\mu}{(m+1)_m} a_m^{m-2} a_{m-1} a_1,$$

$$+ \mu a_m^{m-1} a_{m-1} a_0,$$

qui en effet, si l'on fait μ vérifier la condition suivante

$$\frac{\mu}{(m+1)_2} = \left(\frac{\mu}{m+1}\right)^2, \text{ c. à d. } \mu = \frac{2(m+1)}{m} = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

se réduira à

$$\left[a_m^{m+1} - 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) a_m^{m-1} a_{m-1} a_{m+1}\right] x^{m+1} = \left(a_m x + \frac{2}{m} a_{m-1}\right)^{m+1}$$

ou bien à

$$a_m^{m+1} - 2\left(1+\frac{1}{m}\right)a_m^{m-1}\, a_{m-1}\, a_{m+1} = \left(a_m + \frac{\frac{2}{m}a_{m-1}}{x}\right)^{m+1},$$

c. à d. à l'équation (I') elle-même, toutes les fois que les coefficiens a_0, a_1, ... a_m satisfassent aux conditions suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mu}{(m+1)_3}\, a_m\, a_{m-1}\, a_{m-2} = \left(\frac{2}{m}\, a_{m-1}\right)^3, \\ \frac{\mu}{(m+1)_4}\, a_m^2\, a_{m-1}\, a_{m-3} = \left(\frac{2}{m}\, a_{m-1}\right)^4, \\ \vdots \\ \frac{\mu}{(m+1)_m}\, a_m^{m-2}\, a_{m-1}\, a_1 = \left(\frac{2}{m}\, a_{m-1}\right)^m, \\ \mu \cdot a_m^{m-1}\, a_{m-1}\, a_0 = \left(\frac{2}{m}\, a_{m-1}\right)^{m+1}, \end{array}\right.$$

c. à d. aux conditions (A) elles-mêmes, mentionnées dans le théorème 1, et que, par conséquent, aucun de ces coefficiens ne soit pas $=0$ (vu qu'en vertu de ce qui a été dit au dessus, les deux coefficiens a_m et a_{m-1} n'y sont $=0$, ni l'un ni l'autre).

C. Q. F. D.

Nota 1. Que les coefficiens a_0, a_1, ... a_{m-1} de l'équation (II) ne peuvent pas satisfaire à la fois aux conditions (B) et aux conditions (A), c'est qui est évident de ce qu'en éliminant a_m entre les deux premières des conditions (A), on en titera la relation

$$a_{m-1}\, a_{m-3} = \frac{3}{8}(m-1)_2\left(\frac{2}{m-1}\, a_{m-2}\right)^2,$$

qui s'oppose évidemment à la première des conditions (B).

Nota 2. 1) Dans le cas où les coefficiens a_0, a_1, ... a_m d'une équation proposée complète (II) du $m^{ième}$ dégré ne sont propres à satisfaire aux $(m-1)$ conditions (A), mais qu'au lieu ses coefficiens a_m, a_{m-1}, ... a_0 remplissent les conditions analogues qu'on obtient en remplaçant, dans les formules (A),

$$a_0,\ a_1,\ \ldots.\ a_{m-1},\ a_m$$

respectivement par

$$a_m,\ a_{m-1},\ \ldots.\ a_1,\ a_0,$$

les racines de cette équation proposée seront données évidemment par la formule

$$x=\frac{ma_0}{2a_1}(\varepsilon_{m+1}-1).$$

Et 2) pareillement, dans le cas où les coefficiens $a_0,\ a_1,\ldots.\ a_{m-1}$ d'une équation proposée de la forme (II) ne sont pas tellement composés qu'ils, n'étant pas $=0$ aucun, satisfassent aux $(m-2)$ conditions (B), mais qu'au lieu ses coefficiens $a_m,\ a_{m-1},\ \ldots.\ a_1$, n'étant pas $=0$ aucun, remplissent les conditions analogues qu'on obtient en remplaçant, dans les formules (B),

$$a_0,\ a_1,\ \ldots.\ a_{m-1}$$

respectivement par

$$a_m,\ a_{m-1},\ \ldots.\ a_1,$$

les racines de cette équation proposée seront données évidemment par la formule

$$x=\frac{-a_1+\sqrt[m]{a_1^m-\frac{2m}{m-1}a_1^{m-2}a_2a_0}}{\frac{2}{m-1}a_2}.$$

III.

Sur l'intégrale $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$,

par

Monsieur Dr. *E. G. Björling*,

Lector, membre de l'Acad. des sciences de Stockholm à Westerås en Suède.

1. Pas comme quelque chose de nouveau, seulement pour contribuer, tant soit peu, à apporter plus de rigueur aux raisonnements et aux résultats dans la théorie des intégrales, soit définies soit indéfinies, qu'il me soit permis de publier les considérations suivantes sur l'intégrale en question, à propos d'un article inséré, il n'y a longtemps, dans cet Archiv Th. XII. (p. 409 et suivs.)

L'auteur de l'article mentionné, en se rapportant à la généralité prètendue de la formule

$$(\alpha)\quad \int \frac{dy}{a+r\cos y}=\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{r+a\cos y}{a+r\cos y}\right)+C,\ (r \text{ positif}),$$

fut amené, en vertu d'elle, au résultat suivant:

$$(\beta)\qquad \int_0^{2m\pi} \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{2m\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},$$

(m désignant un nombre entier quelconque), et particulièrement, dans les termes de cet auteur, à „la formule connue“

$$(\gamma)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},$$

tout en y supposant $a^2>b^2+c^2$. Pour le cas contraire, $a^2<b^2+c^2$, il y en a trouvé, sans réserve,

$$(\delta)\qquad \int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=0.$$

Cependant on s'aperçoit aisément, non seulement 1) que les deux formules (β) et (γ) sont inexactes pour le cas de a négatif, si toutefois on entend par le signe $\sqrt{\ }$, comme à l'ordinaire, la racine carrée positive, mais encore 2) que la formule de prémisse (α) ne subsiste en effet que dans le cas où la variable y soit comprise entre des limites telles que les deux $a+r\cos y$ et $\sin y$ soient des quantités de même signe, si toutefois on se tient à l'usage ordinaire d'entendre, par la notation arc$(\cos=x)$, un arc compris entre les limites 0 et π *), et que, de plus, 3) dans le cas de a numériquement $<\sqrt{b^2+c^2}$, la valeur générale de l'intégrale dans la formule (δ) ne peut pas être zéro.

Pour savoir ce qu'il y a de vrai dans ce sujet, il suffira, ce me semble, de ces quelques lignes suivantes.

2. Afin de trouver la valeur de l'intégrale

$$(1)\qquad \left(\int\frac{dx}{a+r\cos x}\right)\ (r\text{ positif}),$$

en supposant qu'il ne s'agit point de valeurs de x telles que $a+r\cos x$ soit $=0$, nous posons d'abord

$$\cos x=y,\ \text{ou plutôt}\ x=\arccos y,$$

d'où il est clair que, pour commencer, nous ne considérons ici que des valeurs de x comprises entre 0 et π, d'où vient

$$(2)\qquad dy=-\sqrt{(1-y^2)}.dx,$$

ou même

$$(3)\qquad dx=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

---

*) Qu'en effet l'auteur de l'article qu'on vient de nommer, ne se tient pas à cette définition du sens de la notation arc$(\cos=x)$, et qu'au contraire il se contente d'y fixer, à l'exemple des anciens, la notation plus vague d'un quelconque des arcs dont le cosinus est $=x$, c'est ce que l'on peut voir assez clairement dans l'article mentionné (pag. 410). Or il est bien connu actuellement à quelles suites étranges on peut s'exposer par de telle indifférence. Il en est d'analogue à dire du sens de la notation $\sqrt{\ }$ dans le même article.

au moins tandis que y ou $\cos x$ sera numériquement <1, et par conséquent on aura

$$(4)\qquad \frac{dx}{a+r\cos x}=-\frac{dy}{(a+ry)\sqrt{1-y^2}},$$

ou bien, si l'on pose, pour réduire l'expression dans ce second membre à forme rationnelle,

$$(5)\qquad u=\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\tan g\frac{x}{2},$$

on en aura

$$(6)\qquad \frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{2du}{a+r+(a-r)u^2}.$$

Cela posé, l'on en obtiendra évidemment:

1) a^2 étant $>r^2$,

$$(7)\qquad \int\frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{2}{(a+r)\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\right)+C,$$

$$(7')\qquad =\pm\frac{2}{\sqrt{a^2-r^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C,$$

suivant que a soit positif ou négatif;

2) a^2 étant $<r^2$,

$$(8)\qquad \int\frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{\frac{1}{2}}{(a+r)\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\log\left\{\frac{1+u\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}{1-u\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\right\}^2+C,$$

$$(8')\qquad =\frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right\}^2+C;$$

et enfin

3) a^2 étant $=r^2$,

$$(9)\qquad \int\frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C,\ \text{ou}\ \frac{1}{r}\cot\frac{x}{2}+C,$$

suivant que a soit $=r$ ou $=-r$.

Que, toutefois, en effet, ces formules (7'), (8') et (9) subsistent encore dans le cas même

$$\pi < x < 2\pi$$

(supposé, comme il vient d'être dit, qu'il ne s'agit point de valeurs de x telles que $a+r\cos x$ soit $=0$), c'est dont il est aisé de s'assurer en observant 1) que, dans ce cas, les seconds membres des formules (2), (3), (4), (6) seront affectés de signe contraire à celui dans le cas précédent, ainsi qu'en vertu de cela aussi les seconds membres des formules (7) et (8), mais qu'au contraire ceux des formules (7') et (8') y auront encore le même signe que dans le cas précédent, vu que dans le nouveau cas dont il s'agit

$$u \text{ ou } \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \text{ est } = -\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

2) que, du reste, il est aisé de vérifier immédiatement la formule (9) pour le cas même dont il s'agit.

Maintenant, pour ce qui concerne l'intégrale (1) prise entre des limites données, on peut tirer de ce qui vient d'être dit les conséquences suivantes:

1) a^2 étant $> r^2$,

et, par suite, $a+r\cos x$ n'étant pas jamais $=0$, on aura

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}\,^{*)} = \pm\frac{\pi}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

suivant que a sera positif ou négatif,

$$=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x} = \pm\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

suivant que a sera positif ou négatif.

---

*) Faisant, en effet,

$$\lim\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon_1}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

tandis que les (positifs) ε et ε_1 convergent indéfiniment vers zéro.

2) a^2 étant $< r^2$,

et, par suite, $a+r\cos x$ n'étant pas $=0$ tant que 1), a étant positif, x sera compris entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, ou même entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, et que 2), a étant négatif, x sera limité par $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on aura:

A) a étant positif,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x} \text{*)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\right\}^2 = \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\log\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

et de plus, en faisant, pour abréger, la notation $pr.\int_a^b$ designer „la valeur principale de l'intégrale",

$$pr.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x} \text{**)} = -\frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\right\}^2$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\log\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}$$

$$= pr.\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

---

*) Étant, en effet,

$$= \lim\left\{\pm\frac{2}{\sqrt{a^2-r^2}}\left[-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\,.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right)\right]\right\},$$

$$\text{c. à d.} = \mp\frac{2}{\sqrt{a^2-r^2}}\operatorname{arctg}(-\infty).$$

**) Comme faisant, en effet,

$$\lim_{(\varepsilon=0)}\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(-\frac{a}{r}+\varepsilon)} + \int_{\arccos(-\frac{a}{r}-\varepsilon)}^{\pi-\varepsilon}\right\}$$

tandis qu'au contraire, la valeur générale de l'une comme de l'autre de ces mêmes intégrales dernières sera $=\infty-\infty$ et, par conséquent, indéterminée; d'où il résulte que, dans le cas dont il s'agit,

$$pr.\int_0^\pi \frac{dx}{a+r\cos x} \text{ est } =0=pr.\int_\pi^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

mais que la valeur générale de l'une et de l'autre est indéterminée;

B) a étant négatif,

$$pr.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{r^2-a^2}-r}{a}$$

$$=pr.\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

mais la valeur générale de l'une et de l'autre indéterminée, et, de plus,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}=-\frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\log\left\{\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}}\right\}^2,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{r^2-a^2}-r}{a}$$

$$=\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x};$$

d'où il résulte qu'aussi dans ce cas

$$pr.\int_0^\pi \frac{dx}{a+r\cos x} \text{ est } =0=pr.\int_\pi^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

mais que la valeur générale est indéterminée;

3) a^2 étant $=r^2$,

on aura:

A) a étant $=r$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x}=\frac{1}{r}=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},\quad\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}=\infty=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x};$$

B) a étant $=-r$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x}=-\infty=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}=-\frac{1}{r}=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{a+r\cos x}.$$

3. Maintenant, pour trouver la valeur de l'intégrale

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x},$$

dans la supposition qu'il ne s'agit point de valeurs de x telles que le dénominateur soit $=0$, on peut faire usage de la transformation employée par l'auteur de l'article précédemment nommé, en posant d'abord

$$b=r\cos\alpha,\quad c=r\sin\alpha,\quad r=\sqrt{b^2+c^2};$$

d'où vient

$$\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{dx}{a+r\cos(x-\alpha)},$$

ou bien, en y substituant y au lieu de $x-\alpha$,

$$=\frac{dy}{a+r\cos y}.$$

Cela posé, en vertu de l'article précédent 2., on en obtiendra, dans la supposition (qu'on vient d'indiquer) qu'il ne s'agit point de valeurs de x telles que le dénominateur

$$a+b\cos x+c\sin x,\quad\text{ou}\quad a+r\cos(x-\alpha),\quad\text{soit}=0,$$

et tandis que, du reste, y ou $x-\alpha$ sera compris entre les limites 0 et π, ou même entre π et 2π, les formules suivantes:

1) a^2 étant $>b^2+c^2$,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\pm\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}\right)+C,$$

suivant que a soit positif ou négatif.

2) a^2 étant $<b^2+c^2$,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\log\left\{\frac{\left(1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}\right)^2}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}}\right\}+C;$$

3) a^2 étant $=b^2+c^2$,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+C \text{ ou }=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\cot\frac{x-\alpha}{2}+C,$$

suivant que a soit $=\sqrt{b^2+c^2}$ ou $=-\sqrt{b^2+c^2}$.

De plus, quant à l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=I \text{ (pour abréger),}$$

comme on a évidemment

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos(x-\alpha)}=\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

on en obtiendra la valeur, en vertu de l'article 2, ainsi qu'il suit:

A) Lorsqu'il y aura lieu d'adopter pour α une quant. positive $<\pi$, c. à d. que c soit positif (b étant quel qu'il soit, positif ou négatif ou même $=0$), on aura

$$I=\int_{-\alpha}^{0}\frac{dx}{a+r\cos x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi-\alpha}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

c. à d. (vu que la première de ces trois intégrales est $=\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}$)

$$=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}.$$

B) Lorsqu'il y aura lieu d'adopter pour α une quantité négative ($=-\beta$) numériquement $<\pi$, c. à d. que c soit négatif (b étant positif ou négatif ou $=0$), on aura

$$I=\int_\beta^\pi+\int_\pi^{2\pi}+\int_0^\beta=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}.$$

C) c étant $=0$, ($b=r$ ou $=-r$), on aura, dans le premier cas,

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x},$$

et, dans l'autre,

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}=2\int_0^\pi\frac{dx}{a+r\cos x}.$$

Par conséquent on aura, en vertu de ce qui a été dit dans l'article 2,

1) a^2 étant $>b^2+c^2$,

$$I=\pm\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},$$

suivant que a soit positif ou négatif;

2) a^2 étant $<b^2+c^2$,

la valeur principale de $I=0$,
la valeur générale indéterminée;

3) a^2 étant $=b^2+c^2$,

$$I=\pm\infty,$$

suivant que a soit positif ou négatif;

quelles quantités réelles (0 inclusive) que soient les deux b et c.

Remarquons, en finissant, qu'évidemment, après ce qui a été dit déjà, il n'y a plus besoin ici d'aucune explication supplémentaire à l'égard de l'intégrale plus générale

$$\int_0^{2m\pi}\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x},$$

m désignant un nombre entier quelconque.

IV.

Ueber krumme Flächen, welche der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 1$ entsprechen.

Von
Herrn Dr. *H. Burhenne*,
Lehrer der Mathematik an der höhern Gewerbschule in Cassel.

Zur Betrachtung der hier aufgestellten Gruppe krummer Flächen, welche schon an sich interessant sind, wurde ich auch durch Rücksicht auf die Krystallographie veranlasst. Während die Krystalle in der Regel von Ebenen begrenzt sind, zeigen sie dennoch nicht selten krummflächige Formen. Häufig ist die Krümmung der Krystallflächen nur scheinbar, indem sie aus einer treppenartigen Combination schmaler ebener Flächenelemente besteht. Aber es kommt an den Krystallen auch Krümmung der Flächen vor, z. B. beim Diamant, welche so stetig und gesetzmässig erscheint, dass man, wie auch Naumann in seinem Lehrbuche der Krystallographie urtheilt, zu ihrer Erklärung einen auf krumme Flächenbildung gerichteten Plasticismus anzunehmen berechtigt ist.

Da mir keine grössere Sammlung zu Gebote steht, um die im Folgenden erwähnten Formen mit den der Kugelform sich nähernden Krystallen des Diamantes zu vergleichen, so beschränke ich mich für jetzt darauf, die geometrischen Eigenschaften eines merkwürdigen Systems krummer Flächen anzudeuten.

Zur Vorbereitung diene Folgendes: Man lege durch den Mittelpunkt einer Kugel 3 zu einander senkrechte Ebenen, und noch 6 Ebenen, welche die Neigungswinkel jener drei Grundebenen halbiren. Dadurch wird die Kugelfläche in 48 gleiche Theile

getheilt, welcke sphärische Dreiecke mit Winkeln von 45, 90 und 60 Graden bilden, und auf der Kugel symmetrisch vertheilt sind. Die 26 Eckpunkte dieser sphärischen Dreiecke sind dreierlei Art, nämlich: 6 Punkte, in denen je 8 Dreiecke zusammenkommen, 12 Punkte, wo 4 Dreiecke sich vereinigen, und 8 Punkte wo 6 Dreiecke zusammentreffen. Verbindet man diese Punkte mit dem Centrum der Kugel, und betrachtet diese Radien als Normalen von Ebenen, so entsprechen jene 6 Punkte den Flächen eines Würfels, jene 12 Punkte den Flächen eines von 12 congruenten Rhomben (wo die Diagonalen wie $1:\sqrt{2}$ sich verhalten) begrenzten Körpers, und die 8 Punkte entsprechen den Flächen eines regulären Octaeders. Diese 3 Gestalten sind bekanntlich die Hauptkörper des regulären Krystallsystemes.

Wir gehen nun zur Betrachtung der krummen Flächen, welche der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 1$$

entsprechen. Es soll hier n immer einen positiven in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruch bedeuten, dessen Zähler eine gerade Zahl, also dessen Nenner ungerade ist. Dieser positive Bruch kann kleiner oder grösser als 1 sein; der Nenner kann auch gleich 1 sein, so dass n eine ganze gerade Zahl wird. Diese Gleichung umfasst, indem für n bestimmte Werthe eintreten, eine Gruppe unzähliger Flächenarten:

Von allen diesen Flächen gilt Folgendes:

Die krumme Fläche ist eine geschlossene. Wegen des geraden Factors 2 im Exponenten hat die Fläche in allen 8 Coordinatenräumen dieselbe Gestalt. Da die Gleichung symmetrisch ist in Bezug auf die Coordinaten, also x und y, x und z, y und z sich vertauschen lassen, ohne die Gleichung zu ändern, so zerfällt in jedem Raumoctanten die Fläche in 6 gleiche Theile. Demnach lässt sich die ganze krumme Fläche in $6.8 = 48$ gleiche Theile zerlegen, hat also dieselbe Symmetrie d. h. dieselbe Zahl und Lage gleicher Theile, wie der Würfel oder das reguläre Octaeder.

Als Durchschnitte zeichnen sich aus die 3 Hauptschnitte, welche in die Coordinaten-Ebenen fallen, und die mitten zwischen je zwei derselben liegenden 6 mittleren Schnitte. Die Durchschnittscurven der 3 Hauptschnitte mit der krummen Fläche entsprechen einer Gleichung von der Form

$$v^n + w^n = 1,$$

und die Durchschnittscurven der 6 mittleren Schnitte haben eine Gleichung von der Form

$$v^n+2\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^n=1,$$

wo v und w rechtwinklige Coordinaten bedeuten.

Der Radiusvector der Fläche, d. h. die Entfernung eines Punktes der krummen Fläche vom Anfangspunkte der Coordinaten werde mit R bezeichnet, so dass

$$R=x^2+y^2+z^2,$$

und wir suchen nun ausgezeichnete Werthe von R. Anstatt zu diesem Zwecke die Differentiale von R zu bilden, braucht man nur die Symmetrieverhältnisse der krummen Fläche zu beachten. Die Fläche lässt sich durch die 3 Coordinatenebenen und durch die mitten zwischen denselben liegenden 6 Ebenen in 48 gleiche Theile theilen. Die Durchschnittslinien dieser Ebenen sind ausgezeichnete Radiivectoren, welche in ausgezeichnete Punkte der krummen Fläche treffen. Betrachtet man zunächst die Fläche nur in Einem der 8 Coordinatenräume, so zeichnen sich darin aus:

3 Punkte, welche in den Axen liegen. Für einen solchen Punkt sind zwei Coordinaten gleich Null, also die dritte gleich 1, folglich $R=1$;

3 Punkte, welche mitten zwischen je zwei Punkten der ersten Art liegen. Für einen solchen Punkt ist eine Coordinate gleich Null, und jede der beiden andern ist gleich $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, folglich

$$R=2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)};$$

1 Punkt, welcher mitten zwischen den drei Punkten der ersten und den drei Punkten der zweiten Art liegt. Für diesen Punkt ist jede der Coordinaten gleich $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$, also $R=3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}$.

Uebersieht man nun alle 8 Coordinatenräume, also die ganze geschlossene Fläche, so zeigen sich auf derselben 26 ausgezeichnete Punkte und Radiivectoren dreierlei Art. Nämlich: 6 Punkte, die in den Coordinatenaxen liegen, und für welche $R=1$ ist; 12 Punkte, die mitten zwischen je zweien der ersten Art liegen, und

für welche $R=2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}$ ist; 8 Punkte, die mitten zwischen je dreien der ersten und zweiten Art liegen, und für welche $R=3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}$ ist. Die Radiivectoren R dieser Punkte sind die Flächen-Normalen der 3 Hauptkörper des regulären Krystallsystemes. Nämlich: Jene 6 Radien sind die Flächen-Normalen eines Würfels, die 12 Radien sind die Normalen des Rhombendodecaeders, und die 8 Radien sind die Flächen-Normalen des regulären Octaeders. Wir wollen diese dreierlei ausgezeichneten Radien durch $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ unterscheiden.

Jetzt bezeichnen wir n durch $\frac{g}{u}$, wo g eine gerade und u eine ungerade positive Zahl bedeutet, während der Bruch $\frac{g}{u}$ auf die kleinsten Zahlen gebracht ist, so dass die Gleichung der krummen Fläche:

$$x^{\frac{g}{u}}+y^{\frac{g}{u}}+z^{\frac{g}{u}}=1,$$

also

$$R_{\prime}=1,$$

$$R_{\prime\prime}=2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{u}{g}\right)},$$

$$R_{\prime\prime\prime}=3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{u}{g}\right)}.$$

Es sind nun drei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem n grösser als 2, oder zwischen 2 und 1 liegt, oder kleiner als 1 ist.

Erster Fall, wo $\frac{g}{u}$ grösser als 2,

also $\frac{u}{g} < 2$ ist. Die Gestalt der krummen Fläche steht gleichsam zwischen Kugel und Würfel, indem sie als ein Würfel mit abgerundeten Kanten und Ecken erscheint. Von den ausgezeichneten Radiivectoren ist $R_{\prime}$ ein Minimum; $R_{\prime\prime}$ ein Maximum in der Richtung nach $R_{\prime}$ und ein Minimum in der Richtung nach $R_{\prime\prime\prime}$; und $R_{\prime\prime\prime}$ ein Maximum nach allen Richtungen. Nähert sich $n=\frac{g}{u}$ immer mehr der 2, also $\frac{u}{g}$ dem $\frac{1}{2}$, so nähern sich die Radiivectoren immer mehr der Gleichheit, und die Fläche wird zur Kugel. Wächst n immer mehr, so wird das Verhalten der Radii-

vectoren $R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}$ immer näher $=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$, d. h. die krumme Fläche wird dem Würfel immer ähnlicher.

Einfache specielle Werthe für n sind zum Beispiel: $g=4$, $u=1$, so dass die Gleichung der krummen Fläche

$$x^4+y^4+z^4=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\sqrt[4]{2}:\sqrt[4]{3}.$$

Oder: $g=6$, $u=1$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^6+y^6+z^6=1;$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3}.$$

Oder: $g=8$, $u=3$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{8}{3}}+y^{\frac{8}{3}}+z^{\frac{8}{3}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\sqrt[8]{2}:\sqrt[8]{3}.$$

Oder: $g=10$, $u=3$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{10}{3}}+y^{\frac{10}{3}}+z^{\frac{10}{3}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\sqrt[6]{2}:\sqrt[6]{3}.$$

U. s. w.

Unzählige Uebergänge zwischen den Gestalten von Kugel und Würfel treten hier auf.

Zweiter Fall, wo $\frac{g}{u}$ zwischen 2 und 1,

also $\frac{u}{g}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Die Gestalt steht zwischen Kugel und regulärem Octaeder, indem sie als ein reguläres Octaeder mit abgerundeten Kanten und Ecken erscheint. Von den ausgezeichneten Radiivectoren ist $R_{,}$ ein Maximum; $R_{,,}$ ein Minimum in der Richtung nach $R_{,}$ und ein Maximum in der Richtung nach

R_{III}; und R_{III} ist ein Minimum nach allen Richtungen. Nähe
sich n immer mehr der 2, also $\frac{u}{g}$ dem $\frac{1}{2}$, so nähern sich die R
diivectoren immer mehr der Gleichheit und die Fläche wird z
Kugel. Nähert sich $\frac{g}{u}$ also auch $\frac{u}{g}$ immer mehr der Einheit, i
dem u und g immerfort wachsen, so wird das Verhalten der R
$R_{II}:R_{III}$ immer näher $=1:\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{3}}$, d. h. die krumme Fläc
wird dem regulären Octaeder immer ähnlicher.

Specielle Werthe für n sind zum Beispiel:
$g=4$, $u=3$, so dass die Gleichung der krummen Fläche

$$x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}+z^{\frac{4}{3}}=1,$$

also

$$R_{I}:R_{II}:R_{III}=1:\sqrt[4]{\frac{1}{2}}:\sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

Oder: $g=6$, $u=5$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{6}{5}}+y^{\frac{6}{5}}+z^{\frac{6}{5}}=1,$$

also

$$R_{I}:R_{II}:R_{III}=1:\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Oder: $g=8$, $u=5$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{8}{5}}+y^{\frac{8}{5}}+z^{\frac{8}{5}}=1,$$

also

$$R_{I}:R_{II}:R_{III}=1:\sqrt[8]{\frac{1}{2}}:\sqrt[8]{\frac{1}{3}}.$$

Oder: $g=10$, $u=7$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{10}{7}}+y^{\frac{10}{7}}+z^{\frac{10}{7}}=1,$$

also

$$R_{I}:R_{II}:R_{III}=1:\sqrt[5]{\frac{1}{2}}:\sqrt[5]{\frac{1}{3}}.$$

U. s. w.

Unzählige Uebergänge zwischen den Gestalten der Kugel und des regulären Octaeders treten hier auf.

Dritter Fall, wo $\frac{g}{u}$ kleiner als 1,

also $\frac{u}{g}>1$ ist. Die Gestalt steht zwischen einem regulären Octaeder und einem dreifach rechtwinkligen aus den drei Axen gebildeten Sterne, indem sie als ein Octaeder mit einwärts gekrümmten Kanten und Flächen erscheint.

Specielle Werthe für n sind hier zum Beispiel: $g=2$, $u=3$, so dass die Gleichung der krummen Fläche

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}.$$

Oder: $g=2$, $u=5$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}+z^{\frac{2}{5}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\frac{1}{4}:\frac{1}{9}.$$

Oder: $g=2$, $u=7$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+z^{\frac{2}{7}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\frac{1}{8}:\frac{1}{27}.$$

Oder: $g=4$, $u=5$, so dass die Gleichung der Fläche

$$x^{\frac{4}{5}}+y^{\frac{4}{5}}+z^{\frac{4}{5}}=1,$$

also

$$R_{,}:R_{,,}:R_{,,,}=1:\sqrt[4]{\frac{1}{8}}:\sqrt[4]{\frac{1}{27}}.$$

U. s. w.

Wir wollen nochmals die in der Gleichung

$$x^{\frac{g}{u}}+y^{\frac{g}{u}}+z^{\frac{g}{u}}=1$$

enthaltene Gruppe von krummen Flächen übersehen, wo $\frac{g}{u}$ einen in den kleinsten Zahlen dargestellten positiven Bruch, g eine gerade und u eine ungerade Zahl bedeutet. Während $\frac{g}{u}$ vom Unendlichkleinen wachsend dem 1 sich nähert, über 1 wachsend dem 2 sich nähert, und über 2 ins Unendliche wächst; so geht die Gestalt vom rechtwinkligen Kreuze der Axen aus, erscheint als ein Octaeder, dessen Flächen und Kanten stärker, dann weniger eingefallen sind, nähert sich immer mehr dem ebenflächigen Octaeder, dann schwellen die Flächen dieses Octaeders immer mehr an und die Gestalt geht in die Kugel über, dann sinkt die Kugelfläche nach den Richtungen der Axen immer mehr ein und die Gestalt nähert sich dem Würfel ins Unendliche.

Die Mineralogen mögen aus dieser Mannichfaltigkeit von Formen solche wählen, die mit einem beobachteten Diamanten oder andern Krystallen am besten übereinstimmen.

Die im Vorhergehenden betrachteten Körper zeigen sämmtlich d r e i g l e i c h e zu einander senkrechte Hauptaxen, entsprechen also dem sogenannten regulären Krystallsysteme. Man könnte nun diese Betrachtungen erweitern, so dass ein System von Flächen mit nur z w e i g l e i c h e n Hauptaxen, und ein System mit d r e i u n g l e i c h e n Hauptaxen zum Vorscheine kommt. Zu diesem Zwecke braucht man nur die Glieder der Gleichung mit verschiedenen Coefficienten zu versehen. Dann wird durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{b}\right)^n=1$$

ein System krummer Flächen mit zwei gleichen und einer davon verschiedenen Hauptaxe, und durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$$

ein System krummer Flächen mit drei ungleichen Hauptaxen dargestellt, wobei n die Bedeutung wie oben hat.

Im Systeme, welches von drei zu einander rechtwinkligen Hauptaxen ausgeht, wird fortgeschritten zu dem regulären Octaeder

(mit drei quadratischen Hauptschnitten), Kugel und Würfel. Im Systeme, welches von zwei gleichen Axen und einer davon verschiedenen ausgeht, wird fortgeschritten zum Octaeder mit einem quadratischen und zwei rhombischen Hauptschnitten, zum Rotationsellipsoid und zum rechtwinkligen Parallelepiped mit zweierlei Kanten. Im Systeme, welches von drei ungleichen Axen ausgeht, wird fortgeschritten zum Octaeder mit drei rhombischen Hauptschnitten, zum Ellipsoid mit dreierlei Axen und zum rechtwinkligen Parallelepipede mit dreierlei Kanten.

V.

Betrachtung derjenigen Reihen, welche durch Ueberspringung einer Anzahl von Gliedern aus den bekannten Reihen für $\log(1\pm x)$, $(1\pm x)^\mu$ und $e^{\pm x}$ gebildet werden können.

Von

Herrn Conrector *C. Hellwig*

in Fürstenwalde.

1.

Bestimmung der Summen.

Wenn man aus einer Reihe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

dadurch eine neue Reihe bildet, dass man das erste Glied der Grundreihe zum ersten der abgeleiteten, das $(n+1)$te der Grundreihe zum zweiten der abgeleiteten, allgemein das $(m-1)(n+1)$te Glied der Grundreihe zum $m$ten der abgeleiteten macht, so lassen sich noch n andere Reihen aufstellen, welche sich aus der Grundreihe durch dasselbe Gesetz der Ueberspringung von je n

Gliedern, das der erwähnten ersten abgeleiteten Reihe zu Grunde liegt, leicht ergeben, indem man dieselben nach einander mit dem zweiten, dritten, u. s. w. $n$ten Gliede der Grundreihe anfangen lässt. Wir wollen im Folgenden die Summen derjenigen Reihen, welche sich auf die angegebene Weise aus den bekannten Reihen für $\log(1\pm x)$, $(1\pm x)^\mu$ und $e^{\pm x}$ als Grundreihen herleiten lassen, zu bestimmen suchen.

Bezeichnet man die Summen der auf diesem Wege aus der logarithmischen Reihe entspringenden Reihen durch u_0, u_1, u_2, ... u_n, so wird man wegen

$$(1) \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \text{etc.}$$

haben müssen:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_0 = -x - \dfrac{x^{n+2}}{n+2} - \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} - \text{etc.} \\ u_1 = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^{n+3}}{n+3} - \dfrac{x^{2n+4}}{2n+4} - \text{etc.} \\ u_2 = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^{n+4}}{n+4} - \dfrac{x^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ u_n = -\dfrac{x^{n+1}}{n+1} - \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2} - \dfrac{x^{3n+3}}{3n+3} - \text{etc.} \end{cases}$$

Es fällt nicht schwer, Beziehungen zwischen den Grössen u_0, u_1, u_2, ..., u_n zu ermitteln; in der That liegt die Bemerkung nahe, dass, wenn man die Differentialquotienten irgend zweier von ihnen nach x bildet, diese in einem einfachen Zusammenhange stehen. Man darf nämlich nur den einen mit derjenigen Potenz von x multipliciren, deren Exponent dem Unterschiede der den u angehängten Indices gleich ist, um sofort den andern zu erhalten. Vergleicht man die Differentialquotienten von u_0 und u_m, wo m einen beliebigen Index von 1 bis n ausdrücken kann, so hat man die Relation:

$$(3) \qquad x^m \cdot \frac{du_0}{dx} = \frac{du_m}{dx}.$$

Substituirt man hierin für m nach und nach 1, 2, 3, ... n, so resultiren dadurch aus (3) n Beziehungen zwischen den Differentialquotienten unserer Summen, so dass jeder durch den von u_0 ausgedrückt ist. Man hat aber:

(4) $$\log(1-x)=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

und dies giebt differentiirt:

(5) $$\frac{-x}{1-x}=\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}.$$

Setzt man die aus (3) hervorgehenden n Relationen in (5) ein, so ergiebt sich:

(6) $$\frac{-1}{1-x}=\frac{du_0}{dx}\cdot\{1+x+x^2+\ldots+x^n\}.$$

Der Werth des in der Parenthese stehenden Ausdrucks ist nun nichts Anderes, als

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

und deshalb wird:

(7) $$\frac{du_0}{dx}=\frac{1}{x^{n+1}-1},$$

wodurch (3) übergeht in:

(8) $$\frac{du_m}{dx}=\frac{x^m}{x^{n+1}-1}.$$

Um daher u_m kennen zu lernen, hat man

$$\int\frac{x^m dx}{x^{n+1}-1}$$

zu bestimmen. Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung:

(9) $$x^{n+1}-1=0$$

durch $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ und setzt:

$$\frac{x^m}{x^{n+1}-1}=\frac{A_0}{x-\varepsilon_0}+\frac{A_1}{x-\varepsilon_1}+\ldots+\frac{A_r}{x-\varepsilon_r}+\ldots+\frac{A_n}{x-\varepsilon_n},$$

so hat man:

$$A_r=\frac{\varepsilon_r^m}{(n+1).\varepsilon_r^n}, \text{ d. h. } =\frac{\varepsilon_r^{m+1}}{n+1},$$

da $\varepsilon_r^{n+1}=1$ ist. Folglich wird:

$$(n+1).\frac{du_m}{dx}=\frac{-\varepsilon_0^{m+1}}{\varepsilon_0-x}+\frac{-\varepsilon_1^{m+1}}{\varepsilon_1-x}+\ldots+\frac{-\varepsilon_n^{m+1}}{\varepsilon_n-x}.$$

Nimmt man nun, abgesehen von der Constanten, $-\log(\varepsilon_r-x)$ als Werth des Integrals $\int\frac{dx}{\varepsilon_r-x}$, so erhält man:

$$(n+1).u_m = \varepsilon_0^{m+1}.\log(\varepsilon_0 - x) + \varepsilon_1^{m+1}.\log(\varepsilon_1 - x) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon_n^{m+1}.\log(\varepsilon_n - x) + C.$$

Die hierin vorkommende Constante C kann man leicht ermitteln durch die Bemerkung, dass jede der Functionen u für $x=0$ verschwindet; setzt man also in der letzten Gleichung $x=0$, so ergiebt sich:

$$C = -\{\varepsilon_0^{m+1}.\log\varepsilon_0 + \varepsilon_1^{m+1}.\log\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n^{m+1}.\log\varepsilon_n\}.$$

Die Substitution dieses Werthes in die vorige Gleichung und Vereinigung der mit dem nämlichen ε multiplicirten Glieder liefert hierauf:

$$(10)\quad (n+1).u_m = \varepsilon_0^{m+1}.\log(1-\frac{1}{\varepsilon_0}x) + \varepsilon_1^{m+1}.\log(1-\frac{1}{\varepsilon_1}x) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon_n^{m+1}.\log(1-\frac{1}{\varepsilon_n}.x).$$

Wir wollen diesen Ausdruck noch einer leichten Transformation unterwerfen, welche sich auf die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung (9) gründet. Ist nämlich $n+1$ ungerade, so ist eine Wurzel $=1$, die andern sind imaginär; ist aber $n+1$ gerade, so ist eine Wurzel $=+1$, eine zweite $=-1$, die übrigen sind imaginär. Für die reellen Wurzeln hat man also offenbar:

$$\varepsilon^{m+1} = \frac{1}{\varepsilon^{m+1}} \text{ und } \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon;$$

was aber die imaginären anlangt, so gehören dieselben paarweise so zusammen, dass, wenn eine durch $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ bezeichnet wird, immer eine zweite vorhanden ist, welche den Werth $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ hat, so dass zugleich:

$$\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1} \text{ ist.}$$

Dies vorausgesetzt kann man (10) auch schreiben:

$$(11)\quad (n+1).u_m = \frac{1}{\varepsilon_0^{m+1}}.\log(1-\varepsilon_0 x) + \frac{1}{\varepsilon_1^{m+1}}.\log(1-\varepsilon_1 x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{\varepsilon_n^{m+1}}.\log(1-\varepsilon_n x)$$

oder:

$$(12)\qquad (n+1).u_m = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{1}{\varepsilon_r^{m+1}}.\log(1-\varepsilon_r x).$$

Die Gleichung (11) oder (12) enthält die Auflösung unserer gegenwärtigen Aufgabe; denn sie giebt die Werthe der $n+1$ gesuchten Functionen u, wenn man nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots n$ für m setzt.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Binomialreihe über. Bezeichnet man für sie die Summen der $n+1$ durch sie bestimmten Reihen mit $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n$, so wird man aus:

$$(13) \qquad (1+x)^\mu = 1 + \mu.x + \mu_1.x^2 + \mu_2.x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{n-1}.x^n + \mu_n.x^{n+1} + \text{etc.},$$

wo

$$\mu_1 = \frac{\mu.\mu-1}{1.2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3} \text{ u. s. w.}$$

folgende Reihen erhalten:

$$(14) \quad \begin{cases} s_0 = 1 + \mu_n.x^{n+1} + \mu_{2n+1}.x^{2n+2} + \text{etc.} \\ s_1 = \mu.x + \mu_{n+1}x^{n+2} + \mu_{2n+2}.x^{2n+3} + \text{etc.} \\ s_2 = \mu_1.x^2 + \mu_{n+2}x^{n+3} + \mu_{2n+3}.x^{2n+4} + \text{etc.} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ s_n = \mu_{n-1}.x^n + \mu_{2n}.x^{2n+1} + \mu_{3n+1}.x^{3n+2} + \text{etc.} \end{cases}$$

Um Relationen zwischen den gesuchten Grössen zu finden, multipliciren wir den Differentialquotienten von s_0 nach x mit x, wodurch sich ergiebt:

$$x.\frac{ds_0}{dx} = (n+1).\mu_n.x^{n+1} + (2n+2).\mu_{2n+1}.x^{2n+2} + \text{etc.}$$

Ferner ist:

$$\frac{ds_1}{dx} = \mu + (n+2).x^{n+1} + (2n+3).\mu_{2n+2}.x^{2n+2} + \text{etc.}$$

Addirt man diese Werthe, so bekommt man als erstes Glied derjenigen Reihe, welche die Summe darstellt, μ, als zweites Glied derselben x^{n+1} mit dem Coefficienten $(n+1).\mu_n + (n+2).\mu_{n+1}$, der sich vermöge

$$\mu_{n+1} = \mu_n.\frac{\mu-(n+1)}{n+2}$$

reducirt auf $\mu_n.\mu$, als drittes Glied x^{2n+2} mit dem Coefficienten $(2n+2).\mu_{2n+1} + (2n+3).\mu_{2n+2}$, d. h. $\mu_{2n+1}.\mu$ wegen

$$\mu_{2n+2} = \mu_{2n+1}.\frac{\mu-(2n+2)}{2n+3}, \text{ u. s. w.}$$

Hierdurch findet man:

$$x\cdot\frac{ds_0}{dx}+\frac{ds_1}{dx}=\mu+\mu_n.\mu.x^{n+1}+\mu_{2n+1}.\mu.x^{2n+2}+\text{etc.}$$
$$=\mu.\{1+\mu_n.x^{n+1}+\mu_{2n+1}.x^{2n+2}+\text{etc.}\}$$

In der mit μ multiplicirten Reihe erkennt man bald die erste in (14) und gelangt somit zu der Beziehung:

$$x\cdot\frac{ds_0}{dx}+\frac{ds_1}{dx}=\mu.s_0.$$

Unterwirft man nun je zwei auf einander folgende der Reihen (14), schliesslich die letzte und erste, denselben Operationen, wie eben die erste und zweite, so führt dies zu weiteren, der vorstehenden ganz analogen n Relationen zwischen unseren Summen. Wir formiren und ordnen dieselben wie folgt:

$$(15)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{ds_0}{dx}=\mu.s_n-x\cdot\frac{ds_n}{dx},\\
&\frac{ds_1}{dx}=\mu.s_0-x\cdot\frac{ds_0}{dx},\\
&\frac{ds_2}{dx}=\mu.s_1-x\cdot\frac{ds_1}{dx},\\
&\;\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&\frac{ds_{n-1}}{dx}=\mu.s_{n-2}-x\cdot\frac{ds_{n-2}}{dx},\\
&\frac{ds_n}{dx}=\mu.s_{n-1}-x.\frac{ds_{n-1}}{dx}.
\end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung der $n+1$ in diesen Gleichungen enthaltenen Unbekannten ist es erforderlich, n derselben zu eliminiren, um für die $(n+1)$te eine Bestimmungsgleichung zu gewinnen.

Die Differentiation der ersten Gleichung in (15) giebt:

$$\frac{d^2s_0}{dx^2}=(\mu-1).\frac{ds_n}{dx}-x.\frac{d^2s_n}{dx^2},$$

und die der letzten:

$$\frac{d^2s_n}{dx^2}=(\mu-1).\frac{ds_{n-1}}{dx}-x.\frac{d^2s_{n-1}}{dx^2}.$$

Jetzt ist es möglich geworden, s_n zu eliminiren; die davon befreite Gleichung heisst:

$$\frac{d^2 s_0}{dx^2} = \mu.(\mu-1).s_{n-1} - (\mu-1).2x.\frac{ds_{n-1}}{dx} + x^2.\frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2}$$

oder

$$\frac{d^2 s_0}{dx^2} = 2!\mu_2.s_{n-1} - (\mu-1).2x.\frac{ds_{n-1}}{dx} + x^2.\frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung liefert:

$$\frac{d^3 s_0}{dx^3} = (\mu-1).(\mu-2).\frac{ds_{n-1}}{dx} - (\mu-2).2x.\frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2} + x^2.\frac{d^3 s_{n-1}}{dx^3},$$

und die zweimalige Differentiation der vorletzten Gleichung in (15) nach und nach:

$$\frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2} = (\mu-1).\frac{ds_{n-2}}{dx} - x.\frac{d^2 s_{n-2}}{dx^2},$$

$$\frac{d^3 s_{n-1}}{dx^3} = (\mu-2).\frac{d^2 s_{n-2}}{dx^2} - x.\frac{d^3 s_{n-2}}{dx^3}.$$

Durch die Elimination von s_{n-1} vermöge der Werthe für $\frac{ds_{n-1}}{dx}$, $\frac{d^2 s_{n-1}}{dx^2}$ und $\frac{d^3 s_{n-1}}{dx^3}$ erhält man also:

$$\frac{d^3 s_0}{dx^3} = \mu.(\mu-1).(\mu-2).s_{n-2} - (\mu-1)(\mu-2).3x.\frac{ds_{n-2}}{dx}$$
$$+ (\mu-2).3x^2.\frac{d^2 s_{n-2}}{dx^2} - x^3.\frac{d^3 s_{n-2}}{dx^3}$$

oder

$$\frac{d^3 s_0}{dx^3} = 3!\mu_3.s_{n-2} - 2!(\mu-1)_1.3x.\frac{ds_{n-2}}{dx} + (\mu-2).3x^2.\frac{d^2 s_{n-2}}{dx^2}$$
$$- x^3.\frac{d^3 s_{n-2}}{dx^3}.$$

Die Form des letzten Ausdruckes lässt schon unschwer erkennen, welchem Gesetze diejenigen Werthe gehorchen müssen, die man bei den weiteren Eliminationen erhalten wird; wir gehen daher sofort zu derjenigen Gleichung über, zu welcher man nach Beseitigung sämmtlicher Unbekannten ausser s_0 gelangt; sie lautet:

$$\frac{d^{n+1} s_0}{dx^{n+1}} = n!\mu_n.s_0 - (n-1)!(\mu-1)_{n-1}.(n+1)x.\frac{ds_0}{dx}$$
$$+ (n-2)!(\mu-2)_{n-2}.(n+1)_1 x^2.\frac{d^2 s_0}{dx^2} - \ldots.$$
$$+ (-1)^{n+1}.2!(\mu-(n-1))_1.(n+1)_1 x^{n-1}.\frac{d^{n-1} s_0}{dx^{n-1}}$$
$$-(-1)^{n+1}.(\mu-n).(n+1)x^n.\frac{d^n s_0}{dx^n} + (-1)^{n+1}.x^{n+1}.\frac{d^{n+1} s_0}{dx^{n+1}}$$

oder:

$$(16)\quad (1+(-1)^n x^{n+1})\cdot\frac{d^{n+1}s_0}{dx^{n+1}}-(-1)^n\cdot(\mu-n)\cdot(n+1)x^n\cdot\frac{d^n s_0}{dx^n}+\dots$$

$$\dots-(n-2)!\,(\mu-2)_{n-2}\cdot(n+1)_1 x^2\cdot\frac{d^2 s_0}{dx^2}$$

$$+(n-1)!\,(\mu-1)_{n-1}\cdot(n+1)x\cdot\frac{ds_0}{dx}-n!\,\mu_n\cdot s_0=0.$$

Gelingt es, diese Gleichung zu integriren, so hat man s_0 gefunden und kann daraus alsdann auch die übrigen in Frage stehenden Functionen bestimmen. Dieselbe aufzulösen erscheint folgender Ausdruck geeignet:

$$(17)\qquad s_0=C.(1+\alpha x)^\mu,$$

worin C und α noch näher zu bestimmende constante Grössen bezeichnen. Diese Annahme bringt folgende Differentialquotienten hervor:

$$(18)\quad\begin{cases}\dfrac{ds_0}{dx}=C.\mu.\alpha.(1+\alpha x)^{\mu-1},\\[2mm] \dfrac{d^2s_0}{dx^2}=C.2!\,\mu_1.\alpha^2.(1+\alpha x)^{\mu-2},\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \dfrac{d^{n-1}s_0}{dx^{n-1}}=C.(n-1)!\,\mu_{n-2}.\alpha^{n-1}.(1+\alpha x)^{\mu-(n-1)},\\[2mm] \dfrac{d^n s_0}{dx^n}=C.n!\,\mu_{n-1}.\alpha^n.(1+\alpha x)^{\mu-n},\\[2mm] \dfrac{d^{n+1}s_0}{dx^{n+1}}=C.(n+1)!\,\mu_n.\alpha^{n+1}.(1+\alpha x)^{\mu-(n+1)}.\end{cases}$$

Substituirt man diese nebst dem Werthe von s_0 in (17) in die Gleichung (16) unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\mu=n.\frac{\mu}{n},$$

$$2!\,\mu_1=\mu.(\mu-1)=(n-1).n.\frac{\mu.(\mu-1)}{(n-1).n},$$

$$3!\,\mu_2=\mu.(\mu-1).(\mu-2)=(n-2).(n-1).n.\frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{(n-2).(n-1).n}\text{ u.s.w.,}$$

so enthält die resultirende Gleichung in jedem ihrer Glieder den Factor $C.n!\,\mu_n$.

Dividirt man durch diesen und zieht dann $(1+\alpha x)^\mu$ aus allen Gliedern heraus, so geht (16) über in:

$$(19)\quad (1+\alpha x)^\mu . \{ \alpha^{n+1} . \frac{1+(-1)^n . x^{n+1}}{(1+\alpha x)^{n+1}} - (-1)^n . \alpha^n . \frac{(n+1)x^n}{(1+\alpha x)^n} + \ldots$$

$$\ldots - \alpha^2 . \frac{(n+1)_1 x^2}{(1+\alpha x)^2} + \alpha . \frac{(n+1)x}{1+\alpha x} - 1 \} = 0.$$

Setzt man hierin $x=0$, so führt dies zu:

$$\alpha^{n+1} - 1 = 0,$$

einer Gleichung, deren Wurzeln wir schon früher durch ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bezeichnet haben. Diesen Wurzeln entsprechend erhält man $n+1$ singuläre Auflösungen unserer Differentialgleichung, deren Summe als das vollständige Integral derselben anzusehen ist; also:

$$(20)\quad s_0 = C_0(1+\varepsilon_0 x)^\mu + C_1(1+\varepsilon_1 x)^\mu + C_2(1+\varepsilon_2 x)^\mu + \ldots$$

$$\ldots + C_n(1+\varepsilon_n x)^\mu.$$

Die Gleichungen (18) lassen erwarten, dass alle übrigen Unbekannten ganz ähnlich constituirte Werthe, wie s_0, darbieten werden, und von diesem jedenfalls nur in der Constanten C sich unterscheiden können; setzt man demnach:

$$s_1 = C'.(1+\alpha x)^\mu,$$

so ergiebt dies in Verbindung mit (15), (17) und (18):

$$C'.\mu.\alpha.(1+\alpha x)^{\mu-1} = \mu.C.(1+\alpha x)^\mu - x.C.\mu.\alpha.(1+\alpha x)^{\mu-1}$$

$$= C.\mu.(1+\alpha x)^{\mu-1},$$

$$\text{d. h. } C'.\alpha = C \text{ oder } C' = C.\frac{1}{\alpha}.$$

Bezeichnet man ferner die Constante von s_2 mit C'', so muss man dem entsprechend haben:

$$C' = C''.\frac{1}{\alpha}, \text{ d. h. } C'' = C.\frac{1}{\alpha^2}, \text{ u. s. w.}$$

Hiernach würden sich die Werthe von s_1 und s_2 schreiben lassen:

$$s_1 = C_0 . \frac{1}{\varepsilon_0}.(1+\varepsilon_0 x)^\mu + C_1 . \frac{1}{\varepsilon_1}(1+\varepsilon_1 x)^\mu + \ldots + C_n . \frac{1}{\varepsilon_n}(1+\varepsilon_n x)^\mu$$

und

$$s_2 = C_0 . \frac{1}{\varepsilon_0^2}(1+\varepsilon_0 x)^\mu + C_1 . \frac{1}{\varepsilon_1^2}(1+\varepsilon_1 x)^\mu + \ldots + C_n . \frac{1}{\varepsilon_n^2}(1+\varepsilon_n x)^\mu$$

und ihnen analog s_3, $s_4, \ldots s_n$.

Zur Bestimmung der Constanten C_0, C_1, C_2, ... C_n führt die Bemerkung, dass sämmtliche Functionen s für $x=0$ verschwinden, mit Ausnahme von s_0, welches $=1$ wird; setzt man also $x=0$, so erhält man die Gleichungen:

$$(21)\quad \begin{cases} C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n=1, \\ C_0\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}+C_1\cdot\frac{1}{\varepsilon_1}+C_2\cdot\frac{1}{\varepsilon_2}+\ldots+C_n\cdot\frac{1}{\varepsilon_n}=0, \\ C_0\cdot\frac{1}{\varepsilon_0^2}+C_1\cdot\frac{1}{\varepsilon_1^2}+C_2\cdot\frac{1}{\varepsilon_2^2}+\ldots+C_n\cdot\frac{1}{\varepsilon_n^2}=0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ C_0\cdot\frac{1}{\varepsilon_0^n}+C_1\cdot\frac{1}{\varepsilon_1^n}+C_2\cdot\frac{1}{\varepsilon_2^n}+\ldots+C_n\cdot\frac{1}{\varepsilon_n^n}=0. \end{cases}$$

Für die Wurzelwerthe ε gelten, mit Ausnahme von $\varepsilon_0=1$, die Gleichungen:

$$1+\frac{1}{\varepsilon_r}+\frac{1}{\varepsilon_r^2}+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_r^n}=0$$

und

$$1+\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_s}+\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_s^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_r^n}{\varepsilon_s^n}=0,$$

wie sich durch einfache Betrachtungen nachweisen lässt; folglich giebt die Addition der Gleichungen (21) zuerst

$$(n+1).C_0=1 \text{ oder } C_0=\frac{1}{n+1}.$$

Verändert man aber jene Gleichungen in der Weise, dass man die zweite mit ε_2, die dritte mit ε_2^2 u. s. f. die $(n+1)$te mit ε_2^n multiplicirt und addirt sie dann, so bekommt man:

$$(n+1).C_1=1 \text{ oder } C_1=\frac{1}{n+1}.$$

In gleicher Weise wird weiter folgen:

$$C_2=C_3=\ldots=C_n=\frac{1}{n+1}.$$

Bezeichnet man daher durch s_m eine beliebige unserer Summen, so muss man haben:

$$(22)\quad (n+1).s_m=\frac{1}{\varepsilon_0^m}(1+\varepsilon_0x)^\mu+\frac{1}{\varepsilon_1^m}(1+\varepsilon_1x)^\mu+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n^m}(1+\varepsilon_nx)^\mu$$

oder

$$(23)\qquad (n+1).s_m = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{1}{\varepsilon_r^m}(1+\varepsilon_r x)^\mu.$$

Wir schreiten endlich zur Betrachtung derjenigen Reihen, welche aus der Exponentialreihe sich bilden lassen, durch Ueberspringung von je n Gliedern. Bezeichnet man hier die Summen der $n+1$ Reihen durch $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$, so entstehen aus:

$$(24)\qquad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\text{etc.}$$

die folgenden Reihen:

$$(25)\qquad \begin{cases} X_0 = 1+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\dfrac{x^{3n+3}}{(3n+3)!}+\text{etc.} \\ X_1 = x+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}+\dfrac{x^{3n+4}}{(3n+4)!}+\text{etc.} \\ X_2 = \dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\dfrac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}+\dfrac{x^{3n+5}}{(3n+5)!}+\text{etc.} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ X_n = \dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dfrac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}+\dfrac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}+\text{etc.} \end{cases}$$

Differentiirt man eine beliebige dieser Reihen nach x, so erhält man Glied für Glied die ihr vorhergehende, so dass:

$$\frac{dX_n}{dx}=X_{n-1},\ \frac{dX_{n-1}}{dx}=X_{n-2},\ldots \frac{dX_1}{dx}=X_0,\ \frac{dX_0}{dx}=X_n;$$

d. h.

$$(26)\qquad \begin{cases} X_{n-1} = \dfrac{dX_n}{dx}, \\ X_{n-2} = \dfrac{d^2X_n}{dx^2}, \\ X_{n-3} = \dfrac{d^3X_n}{dx^3}, \\ \vdots \qquad \vdots \\ X_2 = \dfrac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}}, \\ X_1 = \dfrac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}, \\ X_0 = \dfrac{d^nX_n}{dx^n}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun die Bedingung:

$$(27)\qquad X_0+X_1+X_2+\ldots+X_{n-2}+X_{n-1}+X_n=e^x,$$

so ergiebt sich folgende Differentialgleichung:

$$(28)\qquad \frac{d^nX_n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{d^2X_n}{dx^2}+\frac{dX_n}{dx}+X_n=e^x.$$

Um zur Auflösung dieser Gleichung zu gelangen, wollen wir zuvörderst die rechts stehende Function von x ausser Acht lassen, und zu integriren suchen die folgende Gleichung:

$$(29)\qquad \frac{d^nX_n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{d^2X_n}{dx^2}+\frac{dX_n}{dx}+X_n=0.$$

Nun liegt hier die Vermuthung nahe, dass X_n einen Ausdruck darstellen wird, welcher irgendwie e^x als Factor enthält, in welchem Falle wir die Differentialquotienten der Function ihr selbst proportional setzen dürfen; es sei demnach:

$$(30)\qquad \frac{dX_n}{dx}=\alpha.X_n,\ \frac{d^2X_n}{dx^2}=\beta.X_n,\ldots\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}=\mu.X_n,\ \frac{d^nX_n}{dx^n}=\nu.X_n.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}=\alpha.\frac{dX_n}{dx}=\beta.X_n,$$

$$\frac{d^3X_n}{dx^3}=\alpha.\frac{d^2X_n}{dx^2}=\beta.\frac{dX_n}{dx}=\gamma.X_n,$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$\frac{d^nX_n}{dx^n}=\alpha.\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}=\beta.\frac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}}=\ldots=\lambda.\frac{d^2X_n}{dx^2}=\mu.\frac{dX_n}{dx}=\nu.X_n;$$

und es wird also:

$$\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n}=\alpha=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\ldots=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\nu}{\mu},$$

d. h.

(31) $\beta = \alpha^2,\ \gamma = \alpha^3, \ldots \lambda = \alpha^{n-2},\ \mu = \alpha^{n-1},\ \nu = \alpha^n.$

Aus (29) ergiebt sich ferner:

$$\frac{d^n X_n}{dx^n} = -\left(\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{d^2X_n}{dx^2} + \frac{dX_n}{dx} + X_n\right),$$

d. h. wegen (30):

$$\nu \cdot X_n = -X_n(\mu + \lambda + \ldots + \beta + \alpha + 1).$$

Dividirt man hier durch X_n, schafft Alles auf eine Seite und ersetzt ν, μ, $\lambda \ldots \beta$ durch ihre Werthe aus (31), so ist:

(32) $\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$

eine Gleichung, welche dieselben Wurzelwerthe hat wie (9), eine Wurzel der letzteren ausgenommen, diejenige nämlich, welche $= 1$ ist; sieht man als diese ε_0 an, so sind die Wurzeln von (32) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$.

Es war:

$$\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n} = \alpha \text{ oder } \frac{dX_n}{X_n} = \alpha dx,$$

mithin

$$\log X_n = \alpha x + c$$

oder

(33) $X_n = C \cdot e^{\alpha x}.$

Die letzte Gleichung liefert den n Wurzeln von (32) entsprechend eben so viele singuläre Auflösungen der Differentialgleichung (29); ihre Summe muss als das vollständige Integral derselben angesehen werden, also:

(34) $X_n = C_1 \cdot e^{\varepsilon_1 x} + C_2 \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + C_n \cdot e^{\varepsilon_n x}.$

Die übrigen Functionen ergeben sich hieraus vermöge (26) durch Differentiation:

(35) $$\left\{\begin{array}{l} X_{n-1} = C_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot e^{\varepsilon_1 x} + C_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + C_n \cdot \varepsilon_n \cdot e^{\varepsilon_n x}, \\ X_{n-2} = C_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot e^{\varepsilon_1 x} + C_2 \cdot \varepsilon_2^2 \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + C_n \cdot \varepsilon_n^2 \cdot e^{\varepsilon_n x}, \\ \vdots \\ X_0 = C_1 \cdot \varepsilon_1^n \cdot e^{\varepsilon_1 x} + C_2 \cdot \varepsilon_2^n \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + C_n \cdot \varepsilon_n^n \cdot e^{\varepsilon_n x}. \end{array}\right.$$

Betrachtet man in den Gleichungen (34) und (35) die C als reine Constanten, so werden dadurch die Integrale von (29) dargestellt; denkt man sich aber die C als gewisse, noch zu bestimmende Functionen von x, so können (34) und (35) die Integrale zu (28) liefern. Unsere nächste Aufgabe wird also darin bestehen, die C unter dem letzten Gesichtspunkt zu bestimmen. Wir differentiiren zu dem Ende (34) und (35) so, dass wir uns die C mit x zugleich variabel vorstellen; dies giebt:

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_n}{dx}=X_{n-1}+\dfrac{dC_1}{dx}.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.e^{\varepsilon_n x}, \\ \dfrac{dX_{n-1}}{dx}=X_{n-2}+\dfrac{dC_1}{dx}.\varepsilon_1.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.\varepsilon_2.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.\varepsilon_n.e^{\varepsilon_n x}, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dX_1}{dx}=X_0+\dfrac{dC_1}{dx}.\varepsilon_1^{n-1}.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.\varepsilon_2^{n-1}.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.\varepsilon_n^{n-1}.e^{\varepsilon_n x}. \end{cases}$$

Hierzu ist aus (27) hinzuzufügen:

$$(37)\qquad X_0=e^x-(X_n+X_{n-1}+\ldots+X_2+X_1)$$

oder wegen (26):

$$(38)\qquad \frac{dX_1}{dx}=e^x-\left(X_n+\frac{dX_n}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-2}X_n}{dx^{n-2}}+\frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}}\right)$$
$$=e^x+\frac{d^nX_n}{dx^n}\text{ wegen (29).}$$

Verbindet man hiermit die Gleichungen:

$$\frac{dX_n}{dx}=X_{n-1},\ \frac{dX_{n-1}}{dx}=X_{n-2},\ \ldots\ \frac{dX_2}{dx}=X_1\text{ und }\frac{d^nX_n}{dx^n}=X_0;$$

so erhält man durch (36) und (38):

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.e^{\varepsilon_n x}=0, \\ \dfrac{dC_1}{dx}.\varepsilon_1.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.\varepsilon_2.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.\varepsilon_n.e^{\varepsilon_n x}=0, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dC_1}{dx}.\varepsilon_1^{n-1}.e^{\varepsilon_1 x}+\dfrac{dC_2}{dx}.\varepsilon_2^{n-1}.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\dfrac{dC_n}{dx}.\varepsilon_n^{n-1}.e^{\varepsilon_n x}=e^x. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen zur Bestimmung von C_1, C_2, ... C_n führen. Wir multipliciren die zweite dieser Gleichungen mit ϱ_1, die dritte mit ϱ_2 u. s. f., die letzte mit ϱ_{n-1}, indem wir unter ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_{n-1} unbestimmte Factoren verstehen, deren weitere Bestimmung wir uns vorbehalten; ist dies geschehen, so addiren wir und bekommen:

$$(40)\qquad \frac{dC_1}{dx}.e^{\varepsilon_1 x}.(1+\varrho_1\varepsilon_1+\varrho_2\varepsilon_1^2+....+\varrho_{n-1}.\varepsilon_1^{n-1})$$
$$+\frac{dC_2}{dx}.e^{\varepsilon_2 x}.(1+\varrho_1\varepsilon_2+\varrho_2\varepsilon_2^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_2^{n-1})+....$$
$$....+\frac{dC_n}{dx}.e^{\varepsilon_n x}.(1+\varrho_1\varepsilon_n+\varrho_2\varepsilon_n^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_n^{n-1})=\varrho_{n-1}.e^x.$$

Will man hieraus z. B. $\frac{dC_1}{dx}$ finden, so darf man nur die ϱ so bestimmen, dass sie folgenden Bedingungen genügen:

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1+\varrho_1\varepsilon_2+\varrho_2.\varepsilon_2^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_2^{n-1}=0, \\ 1+\varrho_1\varepsilon_3+\varrho_2.\varepsilon_3^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_3^{n-1}=0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1+\varrho_1\varepsilon_n+\varrho_2\varepsilon_n^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_n^{n-1}=0. \end{array}\right.$$

Dies geschieht aber, wenn die Gleichung:

$$(42)\qquad 1+\varrho_1\varepsilon+\varrho_2\varepsilon^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon^{n-1}=0$$

zu Wurzeln ε_2, ε_3, ... ε_n hat. Mithin sind die ϱ Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln bekannt sind, und als solche ebenfalls bekannt. Mittelst (41) geht nun (40) über in:

$$\frac{dC_1}{dx}.e^{\varepsilon_1 x}.(1+\varrho_1\varepsilon_1+\varrho_2\varepsilon_1^2+....+\varrho_{n-1}\varepsilon_1^{n-1})=\varrho_{n-1}.e^x$$

oder

$$(43)\quad \frac{dC_1}{dx}.(\varepsilon_1^{n-1}+\frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1^{n-2}+....+\frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1^2+\frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1+\frac{1}{\varrho_{n-1}})=e^{x(1-\varepsilon_1)}.$$

Setzt man:

$$P=(\varepsilon-\varepsilon_2).(\varepsilon-\varepsilon_3)....(\varepsilon-\varepsilon_n),$$

so ist

$$(44)\qquad P.(\varepsilon-\varepsilon_1)=\varepsilon^n+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}+....+\varepsilon^2+\varepsilon+1,\qquad \text{vergl. (32)}$$

Weil aber (42) zu Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ hat, so ist auch:

$$(45)\quad P = \varepsilon^{n-1} + \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-2} + \frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-3} + \ldots + \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^2 + \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon + \frac{1}{\varrho_{n-1}},$$

also

$$P(\varepsilon - \varepsilon_1) = \left\{\begin{array}{l} \varepsilon^n + \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-1} + \frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-2} + \ldots + \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^3 \\ + \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^2 + \frac{1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon - \varepsilon_1.\varepsilon^{n-1} - \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1.\varepsilon^{n-2} + \ldots \\ \ldots - \frac{\varrho_3}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1.\varepsilon^3 - \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1.\varepsilon^2 - \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1.\varepsilon - \frac{1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1 \end{array}\right\}.$$

Vergleicht man das letzte Polynom mit dem in (44), so ergiebt sich:

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}} - \varepsilon_1 = 1 \text{ oder } \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}} = 1 + \varepsilon_1, \\ \frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}} - \frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1 = 1 \text{ oder } \frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}} - \frac{\varrho_3}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1 = 1 \quad ,, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^{n-3}, \\ \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}} - \frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1 = 1 \quad ,, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^{n-3} + \varepsilon_1^{n-2}, \\ \frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon_1 = 1 \text{ oder } \frac{1}{\varrho_{n-1}} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^{n-3} + \varepsilon_1^{n-2} + \varepsilon_1^{n-1}. \end{array}\right.$$

Um nun den Werth des Factors von $\frac{dC_1}{dx}$ in (43) kennen zu lernen, müssen wir in (45) $\varepsilon = \varepsilon_1$ setzen und dann für die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ε_1 ihre Werthe aus (46) einführen; multiplicirt man also den ersten Werth in (46) mit ε_1^{n-2}, den zweiten mit ε_1^{n-3} u. s. f., den drittletzten mit ε_1^2, den vorletzten mit ε_1 und den letzten mit 1, so enthält jedes Glied des Polynoms, welches den Werth von P für $\varepsilon = \varepsilon_1$ darstellt, ε_1^{n-1}, jedes Glied ausser dem ersten ε_1^{n-2}, jedes Glied ausser den beiden ersten ε_1^{n-3} u. s. f., ε_1^2 ist nur in den drei letzten, ε_1 in den beiden letzten Gliedern und 1 nur im letzten Gliede vorhanden. Mithin wird:

$$P_{\varepsilon=\varepsilon_1} = n\varepsilon_1^{n-1} + (n-1)\varepsilon_1^{n-2} + \ldots + 3\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 + 1.$$

Multiplicirt man dies mit $1 - \varepsilon_1$, so kommt:

$$P_{x=\varepsilon_1}.(1-\varepsilon_1)=\left\{\begin{array}{l} n\varepsilon_1^{n-1}+(n-1)\varepsilon_1^{n-2}+\ldots+3\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1+1 \\ -n.\varepsilon_1^n-(n-1)\varepsilon_1^{n-1}-(n-2)\varepsilon_1^{n-2}-\ldots-2\varepsilon_1^2-\varepsilon_1 \end{array}\right\}$$

$$=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_1^{n-2}+\varepsilon_1^{n-1}-n.\varepsilon_1^n$$

$$=-\varepsilon_1^n-n.\varepsilon_1^n,\ \text{da}\ 1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_1^{n-1}+\varepsilon_1^n=0.$$

Folglich erhalten wir als den Werth unseres Factors:

$$-\frac{(n+1).\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1},$$

und (43) giebt in Folge dessen:

$$dC_1=-\frac{1-\varepsilon_1}{(n+1).\varepsilon_1^n}.e^{x(1-\varepsilon_1)}.dx,$$

also

$$C_1=-\frac{1-\varepsilon_1}{(n+1).\varepsilon_1^n}.\int e^{x(1-\varepsilon_1)}.dx=K_1-\frac{e^{x(1-\varepsilon_1)}}{(n+1).\varepsilon_1^n},$$

wo K_1 eine reine Constante bezeichnet. Es ist klar, dass die Werthe von C_2, C_3, ... C_n aus dem zuletzt gewonnenen Ausdrucke dadurch hervorgehen, dass man den Index 1 nach und nach in 2, 3, ... n verwandelt. Wir können daher, weil $\varepsilon_1^{n+1}=1$ ist, schreiben:

$$(47)\quad C_1=K_1-\frac{1}{n+1}.e^{x(1-\varepsilon_1)}.\varepsilon_1,\ C_2=K_2-\frac{1}{n+1}.e^{x(1-\varepsilon_2)}.\varepsilon_2,\ \ldots$$
$$\ldots C_n=K_n-\frac{1}{n+1}.e^{x(1-\varepsilon_n)}.\varepsilon_n.$$

Hierdurch geht (34) über in:

$$X_n=K_1.e^{\varepsilon_1 x}+K_2.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+K_n.e^{\varepsilon_n x}-\frac{1}{n+1}.e^x.\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n\},$$

d. h. weil die Summe der Wurzeln $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)=-1$ sein muss:

$$(48)\quad X_n=\frac{e^x}{n+1}+K_1.e^{\varepsilon_1 x}+K_2.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+K_n.e^{\varepsilon_n x},$$

und deshalb:

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} X_{n-1}=\dfrac{e^x}{n+1}+K_1.\varepsilon_1.e^{\varepsilon_1 x}+K_2.\varepsilon_2.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+K_n.\varepsilon_n.e^{\varepsilon_n x} \\ \vdots \\ X_0=\dfrac{e^x}{n+1}+K_1.\varepsilon_1^n.e^{\varepsilon_1 x}+K_2.\varepsilon_2^n.e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+K_n.\varepsilon_n^n.e^{\varepsilon_n x}. \end{array}\right.$$

Die Bestimmung der Constanten K betreffend, so sehen wir aus den Reihen, durch welche unsere Functionen X repräsentirt werden, dass jedes X ausser X_0 für $x=0$ verschwindet. Demgemäss erhalten wir aus (48), $x=0$ setzend:

$$0=\frac{1}{n+1}+K_1+K_2+\ldots.+K_n,$$

und aus (49) gehen noch $n-1$ andere dieser ähnliche Beziehungen durch dieselbe Annahme hervor, wenn wir die letzte Gleichung für X_0 in (49) als entbehrlich auslassen, also dass wir haben:

$$(50)\quad\begin{cases}\dfrac{-1}{n+1}=K_1+K_2+\ldots.+K_n,\\[2mm] \dfrac{-1}{n+1}=K_1.\varepsilon_1+K_2.\varepsilon_2+\ldots.+K_n.\varepsilon^n,\\[2mm] \dfrac{-1}{n+1}=K_1.\varepsilon_1^2+K_2.\varepsilon_2^2+\ldots.+K_n.\varepsilon_n^2,\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \dfrac{-1}{n+1}=K_1.\varepsilon_1^{n-1}+K_2.\varepsilon_2^{n-1}+\ldots.+K_n.\varepsilon_n^{n-1}.\end{cases}$$

Die Elimination bei diesem System von Gleichungen bewerkstelligen wir wieder ebenso, wie bei (39); nennen wir also die hier einzuführenden unbestimmten Factoren $\sigma_1, \sigma_2, \ldots. \sigma_{n-1}$, so führt die Addition zu:

$$(51)\quad\begin{cases}K_1.(1+\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_1^2+\ldots.+\sigma_{n-1}.\varepsilon_1^{n-1})\\ +K_2.(1+\sigma_1\varepsilon_2+\sigma_2\varepsilon_2^2+\ldots.+\sigma_{n-1}.\varepsilon_2^{n-1})\\ +\ldots.+K_n.(1+\sigma_1\varepsilon_n+\sigma_2\varepsilon_n^2+\ldots.+\sigma_{n-1}.\varepsilon_n^{n-1})\\ =\dfrac{-1}{n+1}\cdot(1+\sigma_1+\sigma_2+\ldots.+\sigma_{n-1}).\end{cases}$$

Um hieraus K_1 zu finden, haben wir für die σ ganz dieselben Bedingungen zu stellen, wie für die ϱ in (41), und müssen also auch für die σ die in (46) berechneten Werthe gelten. Dann wird:

$$(52)\ K_1\cdot\left(\varepsilon_1^{n-1}+\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\cdot\varepsilon_1^{n-2}+\ldots.+\frac{\sigma_2}{\sigma_{n-1}}\cdot\varepsilon_1^2+\frac{\sigma_1}{\sigma_{n-1}}\cdot\varepsilon_1+\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)$$
$$=\frac{-1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}+\ldots.+\frac{\sigma_2}{\sigma_{n-1}}+\frac{\sigma_1}{\sigma_{n-1}}+\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right).$$

Den Werth des Factors von K_1 haben wir schon früher berechnet zu

$$-\frac{(n+1)\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1},$$

und um den Werth des Factors von $\frac{-1}{n+1}$ zu ermitteln, dürfen wir nur 1 zu der Summe der in (46) enthaltenen Werthe hinzufügen; dies giebt:

$$F=\varepsilon_1^{n-1}+2\varepsilon_1^{n-2}+3\varepsilon_1^{n-3}+\ldots+(n-2)\varepsilon_1^2+(n-1)\varepsilon_1+n,$$

also

$$F.(1-\varepsilon_1)=n-(\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_1^{n-2}+\varepsilon_1^{n-1}+\varepsilon_1^n)$$
$$=n+1,$$

mithin

$$F=\frac{n+1}{1-\varepsilon_1}.$$

Hierdurch resultirt:

$$K_1.-\frac{(n+1).\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1}=\frac{-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{1-\varepsilon_1},\text{ also } K_1=\frac{1}{(n+1).\varepsilon_1^n};$$

d. h.

$$K_1=\frac{\varepsilon_1}{n+1}.$$

Dem analog wird sein:

$$K_2=\frac{\varepsilon_2}{n+1},\ K_3=\frac{\varepsilon_3}{n+1},\ \ldots\ K_n=\frac{\varepsilon_n}{n+1}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe in (48) und (49) erhält man jetzt:

$$X_0=\frac{e^x}{n+1}+\frac{\varepsilon_1^{n+1}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_1 x}+\frac{\varepsilon_2^{n+1}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^{n+1}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_n x},$$

$$X_1=\frac{e^x}{n+1}+\frac{\varepsilon_1^{n}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_1 x}+\frac{\varepsilon_2^{n}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^{n}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_n x},$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$X_{n-1}=\frac{e^x}{n+1}+\frac{\varepsilon_1^{2}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_1 x}+\frac{\varepsilon_2^{2}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\frac{\varepsilon_n^{2}}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_n x},$$

$$X_n=\frac{e^x}{n+1}+\frac{\varepsilon_1}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_1 x}+\frac{\varepsilon_2}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_2 x}+\ldots+\frac{\varepsilon_n}{n+1}\cdot e^{\varepsilon_n x}.$$

Dies lässt sich wegen $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_r^{n+1} = 1$ in folgende Form bringen:

$$(53)\quad \begin{cases} (n+1).X_0 = e^{\varepsilon_0 x} + e^{\varepsilon_1 x} + e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + e^{\varepsilon_n x}, \\ (n+1).X_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot e^{\varepsilon_0 x} + \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot e^{\varepsilon_1 x} + \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot e^{\varepsilon_n x}, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (n+1).X_n = \frac{1}{\varepsilon_0^n} \cdot e^{\varepsilon_0 x} + \frac{1}{\varepsilon_1^n} \cdot e^{\varepsilon_1 x} + \frac{1}{\varepsilon_2^n} \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_n^n} \cdot e^{\varepsilon_n x}. \end{cases}$$

Bezeichnet man daher durch m einen Index, der die Werthe $0, 1, 2, \ldots n$ nach und nach annimmt, so werden die Gleichungen (53) repräsentirt durch:

$$(54)\quad (n+1.X_m = \frac{1}{\varepsilon_0^m} \cdot e^{\varepsilon_0 x} + \frac{1}{\varepsilon_1^m} \cdot e^{\varepsilon_1 x} + \frac{1}{\varepsilon_2^m} \cdot e^{\varepsilon_2 x} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_n^m} \cdot e^{\varepsilon_n x}$$

oder auch:

$$(55)\qquad (n+1).X_m = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{1}{\varepsilon_r^m} \cdot e^{\varepsilon_r x}.$$

Wir können den Ausdruck in (12) noch dadurch etwas umgestalten, dass wir

$$v_0 = u_n,\ v_1 = u_0,\ v_2 = u_1, \ldots v_n = u_{n-1}$$

setzen; dann wird der Factor von $\log(1 - \varepsilon_r x)$ in u_n nichts Anderes, als $\frac{1}{\varepsilon_r^{n+1}}$ d. h. 1, welches übereinkommt mit $\frac{1}{\varepsilon_r^0}$. Deshalb kann man schreiben:

$$(56)\qquad (n+1).v_m = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{1}{\varepsilon_r^m} \cdot \log(1 - \varepsilon_r x).$$

Durch die Vergleichung der Formeln (23), (55) und (56) gelangt man daher zu dem Satze:

Stellt $F(x)$ eine der Functionen $\log(1+x)$, $(1+x)^\mu$ und e^x dar, und man bildet aus der für $F(x)$ geltenden Reihe durch Ueberspringung von je n Gliedern neue Reihen, so sind die Summen dieser Reihen, wenn ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Wurzeln der Gleichung $x^{n+1} - 1 = 0$ bezeichnen, bestimmt durch

$$(57)\qquad f_m(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=0}^{r=n} \frac{1}{\varepsilon_r^m} \cdot F(\varepsilon_r x),$$

so dass für m nach und nach $0, 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist.

Hätten wir die Reihen $\log(1+x)$, $(1-x)^{\mu}$ oder $e^{-\mu x}$ zu Grunde gelegt, so wäre die Summenbestimmung für die abgeleiteten Reihen abhängig geworden von der Gleichung:

$$1+(-1)^n.x^{n+1}=0$$

und man hätte also bei ungeradem n wieder die Gleichung:

$$x^{n+1}-1=0,$$

für ein gerades n dagegen die Gleichung:

(58) $$x^{n+1}+1=0$$

auflösen müssen.

II.

Elimination von x aus den für unsere Summen gefundenen Gleichungen.

Wir haben in den bisherigen Entwickelungen $n+1$ Summen als Functionen von x bestimmt; die Elimination von x zwischen je zweien von den Gleichungen, welche die Beziehungen zwischen diesen Summen und x ausdrücken, muss zu einer von x unabhängigen Gleichung zwischen den betreffenden beiden Summen führen, so dass im Ganzen auf diese Weise n von einander unabhängige Relationen zwischen den jedesmaligen $n+1$ Summen entstehen werden. Wir wollen jetzt versuchen, diese Relationen festzustellen.

Durch die Gleichung (57) wird folgendes System von Gleichungen repräsentirt:

(59) $$\begin{cases} (n+1).f_0x=F(\varepsilon_0x)+F(\varepsilon_1x)+F(\varepsilon_2x)+\ldots+F(\varepsilon_nx), \\ (n+1).f_1x=\frac{1}{\varepsilon_0}F(\varepsilon_0x)+\frac{1}{\varepsilon_1}F(\varepsilon_1x)+\frac{1}{\varepsilon_2}F(\varepsilon_2x)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n}F(\varepsilon_nx), \\ (n+1).f_2x=\frac{1}{\varepsilon_0^2}F(\varepsilon_0x)+\frac{1}{\varepsilon_1^2}F(\varepsilon_1x)+\frac{1}{\varepsilon_2^2}F(\varepsilon_2x)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n^2}F(\varepsilon_nx), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (n+1).f_nx=\frac{1}{\varepsilon_0^n}F(\varepsilon_0x)+\frac{1}{\varepsilon_1^n}F(\varepsilon_1x)+\frac{1}{\varepsilon_2^n}F(\varepsilon_2x)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n^n}F(\varepsilon_nx). \end{cases}$$

Da $\varepsilon_0=1$ ist, so folgt hieraus zunächst durch Addition:

(60) $$F(\varepsilon_0x)=Fx=f_0x+f_1x+f_2x+\ldots+f_nx.$$

Um auch eine beliebige der anderen Functionen F durch die Functionen f darzustellen, multipliciren wir die zweite Gleichung in (59) mit ω_1, die dritte mit ω_2, u. s. f., die letzte mit ω_n, wo $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ unbestimmte Factoren bezeichnen. Durch Addition erhält man dann:

$$(61)\quad \begin{cases} F(\varepsilon_0 x).\{1+\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_0^n}\cdot\omega_n\} \\ +F(\varepsilon_1 x).\{1+\frac{1}{\varepsilon_1}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_1^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_1^n}\cdot\omega_n\} \\ +F(\varepsilon_2 x).\{1+\frac{1}{\varepsilon_2}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_2^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_2^n}\cdot\omega_n\}+\ldots \\ \ldots+F(\varepsilon_n x).\{1+\frac{1}{\varepsilon_n}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_n^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n^n}\cdot\omega_n\} \\ =(n+1).\{f_0 x+\omega_1.f_1 x+\omega_2.f_2 x+\ldots+\omega_n.f_n x\}. \end{cases}$$

Will man hieraus z. B. $F(\varepsilon_1 x)$ finden, so geschieht dies durch die Annahme:

$$(62)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_0^n}\cdot\omega_n=0, \\ 1+\frac{1}{\varepsilon_2}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_2^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_2^n}\cdot\omega_n=0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1+\frac{1}{\varepsilon_n}\cdot\omega_1+\frac{1}{\varepsilon_n^2}\cdot\omega_2+\ldots+\frac{1}{\varepsilon_n^n}\cdot\omega_n=0. \end{cases}$$

Hierdurch zeigen sich $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ als Coefficienten der Gleichung:

$$(63)\qquad \varepsilon^n+\omega_1.\varepsilon^{n-1}+\omega_2.\varepsilon^{n-2}+\ldots+\omega_{n-1}.\varepsilon+\omega_n=0$$

an, wenn diese zu Wurzeln $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ hat. Wir setzen:

$$(64)\qquad Q=(\varepsilon-\varepsilon_0).(\varepsilon-\varepsilon_2).(\varepsilon-\varepsilon_3)\ldots(\varepsilon-\varepsilon_n),$$

woraus in Verbindung mit früheren Bestimmungen hervorgeht:

$$Q=P.(\varepsilon-\varepsilon_0)=P(\varepsilon-1).$$

Nach (45) aber ist:

$$P=\varepsilon^{n-1}+\frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-2}+\frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon^{n-3}+\ldots+\frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}.\varepsilon+\frac{1}{\varrho_{n-1}};$$

dies multiplicirt mit $\varepsilon-1$ giebt:

$$Q=\varepsilon^n+\left(\frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}-1\right).\varepsilon^{n-1}+\left(\frac{\varrho_{n-3}}{\varrho_{n-1}}-\frac{\varrho_{n-2}}{\varrho_{n-1}}\right).\varepsilon^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}-\frac{\varrho_2}{\varrho_{n-1}}\right).\varepsilon^2+\left(\frac{1}{\varrho_{n-1}}-\frac{\varrho_1}{\varrho_{n-1}}\right).\varepsilon-\frac{1}{\varrho_{n-1}},$$

woraus man in Berücksichtigung von (46) schliesst:

(65) $Q=\varepsilon^n+\varepsilon_1.\varepsilon^{n-1}+\varepsilon_1^2.\varepsilon^{n-2}+\ldots+\varepsilon_1^{n-2}.\varepsilon^2+\varepsilon_1^{n-1}.\varepsilon+\varepsilon_1^n.$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (63) lehrt, dass man hat:

$$\omega_1=\varepsilon_1,\quad \omega_2=\varepsilon_1^2,\ldots\, \omega_n=\varepsilon_1^n;$$

und nun ergiebt sich aus (61):

$$F(\varepsilon_1 x).\frac{1}{\varepsilon_1^n}.\{\varepsilon_1^n+\omega_1.\varepsilon_1^{n-1}+\omega_2.\varepsilon_1^{n-2}+\ldots+\omega_n\}$$
$$=(n+1).\{f_0x+\omega_1.f_1x+\omega_2.f_2x+\ldots+\omega_n.f_nx\}.$$

Um hierin den Factor von $F(\varepsilon_1 x).\frac{1}{\varepsilon_1^n}$ zu berechnen, darf man nur in (65) $\varepsilon=\varepsilon_1$ setzen; er ergiebt sich als:

$$(n+1).\varepsilon_1^n,$$

und es wird folglich:

$$F(\varepsilon_1 x)=\varepsilon_1^0.f_0x+\varepsilon_1.f_1x+\varepsilon_1^2.f_2x+\ldots+\varepsilon_1^n.f_nx.$$

Hieraus lässt sich schon schliessen, dass man, wenn durch i ein beliebiger Index zwischen 1 und n bezeichnet wird, haben muss:

$$F(\varepsilon_i x)=\varepsilon_i^0.f_0x+\varepsilon_i^1.f_1x+\varepsilon_i^2.f_2x+\ldots+\varepsilon_i^n.f_nx$$

oder

(66) $$F(\varepsilon_i x)=\sum_{r=0}^{r=n}\varepsilon_i^r.f_rx,$$

während (60) sich schreiben lässt:

(67) $$F(x)=\sum_{r=0}^{r=n}f_rx.$$

Für die Logarithmenfunction ist

$$F(\varepsilon_i x)=\log(1-\varepsilon_i x)\text{ und }F(x)=\log(1-x).$$

Statt der in (66) stehenden Summe wollen wir das Zeichen $S(l_i)$ und für die in (67) enthaltene $S(l)$ gebrauchen; hierdurch verwandeln sich (66) und (67) für diesen Fall in:

$$\log(1-\varepsilon_i x)=S(l_i) \text{ und } \log(1-x)=S(l),$$

d. h. wenn man von den Logarithmen zu Exponentialgrössen übergeht:

$$1-\varepsilon_i x=e^{S(l_i)}$$

oder

(68) $$\varepsilon_i x=1-e^{S(l_i)}$$

und

$$1-x=e^{S(l)}$$

oder

(69) $$x=1-e^{S(l)}.$$

Dem analog ist bei der Binomialfunction:

$$(1+\varepsilon_i x)^\mu=S(b_i) \text{ und } (1+x)^\mu=S(b),$$

also

$$1+\varepsilon_i x=\{S(b_i)\}^{\frac{1}{\mu}} \text{ und } 1+x=\{S(b)\}^{\frac{1}{\mu}},$$

d. h.

(70) $$\varepsilon_i x=\{S(b_i)\}^{\frac{1}{\mu}}-1$$

und

(71) $$x=\{S(b)\}^{\frac{1}{\mu}}-1.$$

Bei der Exponentialfunction endlich hat man:

$$e^{\varepsilon_i x}=S(e_i) \text{ und } e^x=S(e),$$

d. h.

(72) $$\varepsilon_i x=\log S(e_i)$$

und

(73) $$x=\log S(e).$$

Nun findet, wenn i Werthe zwischen 1 und n annimmt, die Gleichung Statt:

$$\varepsilon_i^n+\varepsilon_i^{n-1}+\varepsilon_i^{n-2}+\ldots+\varepsilon_i^2+\varepsilon_i+1=0$$

und aus den beiden Reihen:

$$\varepsilon_i x,\ \varepsilon_i^2 x^2,\ \varepsilon_i^3 x^3,\ \ldots\ \varepsilon_i^{n-1} x^{n-1},\ \varepsilon_i^n x^n$$

und

$$x^n,\ x^{n-1},\ x^{n-2},\ x^{n-3},\ \ldots\ x$$

lässt sich durch Multiplication der unter einander stehenden Glieder und nachherige Addition bilden:

$$x^n + \varepsilon_i x^n + \varepsilon_i^2 x^n + \ldots + \varepsilon_i^{n-1} x^n + \varepsilon_i^n x^n$$
$$= x^n . \{ \varepsilon_i^n + \varepsilon_i^{n-1} + \ldots + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i + 1 \} = 0.$$

Ahmt man die Bildungsweise dieses Ausdrucks mit den in (68), (69), (70), (71), (72), (73) stehenden Summen nach, so erhält man Gleichungen, welche nur Summen unserer Reihen enthalten und von x frei sind. Diese von x freien Gleichungen werden repräsentirt:

bei der Logarithmenfunction durch:

$$(74)\quad (1-e^{S(l)})^n + (1-e^{S(l)})^{n-1}.(1-e^{S(li)}) + (1-e^{S(l)})^{n-2}.(1-e^{S(li)})^2 + \ldots + (1-e^{S(l)}).(1-e^{S(li)})^{n-1} + (1-e^{S(li)})^n = 0;$$

bei der Binomialfunction durch:

$$(75)\quad (S(b_i)^{\frac{1}{\mu}}-1)^n + (S(b)^{\frac{1}{\mu}}-1)^{n-1}.(S(b_i)-1) + (S(b)^{\frac{1}{\mu}}-1)^{n-2}.(S(b_i)-1)^2 + \ldots + (S(b)^{\frac{1}{\mu}}-1).(S(b_i)^{\frac{1}{\mu}}-1)^{n-1} + (S(b_i)^{\frac{1}{\mu}}-1)^n = 0;$$

und bei der Exponentialfunction durch:

$$(76)\quad \log^n S(e) + \log^{n-1} S(e).\log S(e_i) + \log^{n-2} S(e).\log^2 S(e_i) + \ldots + \log S(e).\log^{n-1} S(e_i) + \log^n S(e_i) = 0.$$

Setzt man in diesen drei Gleichungen für i nach und nach 1, 2, 3, ... n, so erhält man in jedem Falle n von einander unabhängige, mit x nicht behaftete Relationen zwischen den Summen der durch Ueberspringung von je n Gliedern aus unseren drei Grundreihen abgeleiteten Reihen.

III.

Zusammenstellung der durch die vorigen Bestimmungen bedingten Formeln für die Fälle $n=1$ und $n=2$.

Nimmt man die Anzahl der zu überspringenden Glieder, d. h. $n=1$ an, so hat man die Gleichung:

$$x^2=1$$

aufzulösen und erhält daher die Wurzelwerthe

$$s_0=+1 \text{ und } s_1=-1.$$

Für die logarithmische Reihe ist also:

$$v_0=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}-\text{etc.},$$

$$v_1=-x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\text{etc.};$$

$$2v_0=\log(1-x)+\log(1+x)=\log(1-x^2),$$

$$2v_1=\log(1-x)-\log(1+x)=\log\frac{1-x}{1+x}.$$

Als Gleichung, wodurch v_0 und v_1 verbunden sind, ergiebt sich, da $S(l)=v_0+v_1$ und $S(l_1)=v_0-v_1$ gemäss (67) und (66) ist, aus (74):

$$(1-e^{v_0+v_1})+(1-e^{v_0-v_1})=0$$

oder

$$(77) \qquad e^{v_0}.\left\{e^{v_1}+\frac{1}{e^{v_1}}\right\}=2.$$

Führt man in diese Gleichung die hyperbolischen Cosinus und Sinus ein, so lässt sie sich schreiben:

$$(78) \quad (\mathrm{Cos}\,v_0+\mathrm{Sin}\,v_0).\mathrm{Cos}\,v_1=1 \text{ oder } \mathrm{Cos}\,v_1=\mathrm{Cos}\,v_0-\mathrm{Sin}\,v_0.$$

Die obigen Reihen für v_0 und v_1 besitzen in allen Gliedern einerlei Zeichen; bezeichnet man die ihnen entsprechenden Reihen mit abwechselnden Zeichen durch:

$$V_0=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6} \quad \text{etc.},$$

$$V_1=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.};$$

so hat man offenbar:

$$V_0=v_0[x=x.\sqrt{-1}] \text{ und } V_1=\sqrt{-1}.v_1[x=x\sqrt{-1}]$$

und umgekehrt,

und erhält demgemäss:

$$2V_0 = \log(1 - x\sqrt{-1}) + \log(1 + x\sqrt{-1}) = \log(1 + x^2),$$

$$2V_1 = \sqrt{-1}.\log(1 - x\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}.\log(1 + x\sqrt{-1})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}.\log\frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}};$$

so wie:

(79) $$e^{V_0}.\left\{e^{V_1.\sqrt{-1}} + \frac{1}{e^{V_1.\sqrt{-1}}}\right\} = 2,$$

eine Gleichung, die sich durch Einführung der hyperbolischen und trigonometrischen Functionen verwandelt in:

(80) $\cos V_1.(\mathrm{Cos}\, V_0 + \mathrm{Sin}\, V_0) = 1$ oder $\cos V_1 = \mathrm{Cos}\, V_0 - \mathrm{Sin}\, V_0$.

Die obenstehende Reihe für V_1 ist die bekannte Reihe für $\mathrm{arctg}\, x$ und es ist also:

(81) $$\log(1 + x^2) = \log(1 + x\sqrt{-1}) + \log(1 - x\sqrt{-1})$$

und

(82) $$2:\sqrt{-1}.\mathrm{arctg}\, x = \log(1 + x\sqrt{-1}) - \log(1 - x\sqrt{-1}).$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraction:

$$\log(1 + x\sqrt{-1}) = \log(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}.\mathrm{arctg}\, x$$

und

$$\log(1 - x\sqrt{-1}) = \log(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{-1}.\mathrm{arctg}\, x$$

oder, wenn man zu Exponentialfunctionen übergeht:

(83) $$1 + x\sqrt{-1} = \sqrt{1 + x^2}.e^{\sqrt{-1}.\mathrm{arctg}\, x}$$

und

(84) $$1 - x\sqrt{-1} = \sqrt{1 + x^2}.e^{-\sqrt{-1}.\mathrm{arctg}\, x}.$$

Bezeichnet man dem Obigen analog

$$\log(1 + x) - \log(1 - x) \text{ durch } 2.\mathrm{Arctg}\, x,$$

so erhält man den letzten Formeln entsprechend:

(85) $$1 + x = \sqrt{1 - x^2}.e^{\mathrm{Arctg}\, x}$$

und

(86) $$1 + x \pm \sqrt{1-x^2} \cdot e^{\pm \text{Arctg}}.$$

Für die Binomialreihe bekommt man für den Fall $\gamma = 1$:

$$s_0 = 1 + \mu_1 . x^2 + \mu_3 . x^4 + \text{etc.},$$

$$s_1 = \mu x + \mu_2 . x^3 + \mu_4 . x^5 + \text{etc.},$$

$$2 s_0 = (1+x)^\mu + (1-x)^\mu,$$

$$2 s_1 = (1+x)^\mu - (1-x)^\mu;$$

und als Gleichung zwischen s_0 und s_1 vermöge (75):

$$(s_0 + s_1)^{\frac{1}{\mu}} - 1 + (s_0 - s_1)^{\frac{1}{\mu}} - 1 = 0$$

oder

(87) $$s_0^{\frac{1}{\mu}} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{s_1}{s_0}\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(1 - \frac{s_1}{s_0}\right)^{\frac{1}{\mu}} \right\} = 2.$$

Diese Formeln lassen sich noch vermöge der in (85) und (86) enthaltenen Werthe umbilden, nämlich in:

$$2 s_0 = \sqrt{1-x^2})^\mu . \{ e^{\mu \text{ Arctg} x} + e^{-\mu . \text{ Arctg} x} \}$$

oder

$$s_0 = (\sqrt{1-x^2})^\mu . \text{Cos}(\mu . \text{Arctg} x);$$

ebenso:

$$s_1 = (\sqrt{1-x^2})^\mu . \text{Sin}(\mu . \text{Arctg} x)$$

und

$$s_0^{\frac{1}{\mu}} . \left(\sqrt{1 + \frac{s_1^2}{s_0^2}}\right)^{\frac{1}{\mu}} . 2 \text{Cos}\left(\frac{1}{\mu} . \text{Arctg} \frac{s_1}{s_0}\right) = 2$$

d. h.

(88) $$s_0^2 + s_1^2 = \frac{1}{\text{Cos}^{2\mu}\left(\frac{1}{\mu} . \text{Arctg} \frac{s_1}{s_0}\right)}.$$

Die Reihen mit abwechselnden Zeichen sind hier:

$$S_0 = 1 - \mu_1 . x^2 + \mu_3 . x^4 - \text{etc.},$$

$$S_1 = \mu x - \mu_2 . x^3 + \mu_4 . x^5 - \text{etc.},$$

und man hat dabei:

$$S_0 = s_0[x = x.\sqrt{-1}] \text{ und } S_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}.s_1[x = x\sqrt{-1}],$$

und umgekehrt.

Hieraus ergeben sich die Beziehungen:

$$2S_0 = (1 + x.\sqrt{-1})^\mu + (1 - x\sqrt{-1})^\mu$$

und

$$2S_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}.(1 + x\sqrt{-1})^\mu - \frac{1}{\sqrt{-1}}.(1 - x\sqrt{-1})^\mu,$$

so wie die Gleichung:

$$S_0^{\frac{1}{\mu}}.\left[\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{S_1}{S_0}\right\}^{\frac{1}{\mu}} + \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{S_1}{S_0}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\right] = 2$$

oder

(89) $$S_0^{\frac{1}{\mu}}.\{(1 + \frac{S_1}{S_0}.\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}} + (1 - \frac{S_1}{S_0}.\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}\} = 2.$$

Diese Gleichungen sind den vorher ausgeführten ähnlicher Umbildungen fähig mittelst der Formeln (83) und (84); sie gehen über in:

$$S_0 = (\sqrt{1 + x^2})^\mu.\cos(\mu.\operatorname{arctg} x),$$

$$S_1 = (\sqrt{1 + x^2})^\mu.\sin(\mu.\operatorname{arctg} x);$$

und

(90) $$S_0^2 + S_1^2 = \frac{1}{\cos^{2\mu}\left(\frac{1}{\mu}.\operatorname{arctg}\frac{S_1}{S_0}\right)}.$$

Die Exponentialreihe endlich liefert für den Fall $n=1$:

$$X_0 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \text{etc.},$$

$$X_1 = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{etc.};$$

Reihen, als deren Summen bezüglich der hyperbolische Cosinus und Sinus gelten; dabei ist:

$$2X_0 = e^x + e^{-x} \text{ und } 2X_1 = e^x - e^{-x},$$

so wie wegen (76):

$$\log(X_0 + X_1) + \log(X_0 - X_1) = 0$$

oder

$$(91) \qquad (X_0 + X_1).(X_0 - X_1) = X_0^2 - X_1^2 = 1,$$

eine Gleichung, welche die bekannte Beziehung $\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}$ $= 1$ giebt.

Die Reihen mit abwechselnden Zeichen sind hier:

$$\mathfrak{X}_0 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \text{etc.},$$

$$\mathfrak{X}_1 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \text{etc.};$$

Reihen, deren Summen respective durch den trigonometrisc Cosinus und Sinus bezeichnet werden. Man hat dabei weiter:

$$\mathfrak{X}_0 = X[x = x.\sqrt{-1}], \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}[x = x.\sqrt{-1}]$$

und umgekehrt,

also

$$2\mathfrak{X}_0 = e^{x.\sqrt{-1}} + e^{-x.\sqrt{-1}}$$

und

$$2\mathfrak{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}.(e^{x.\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})$$

und

$$(92) \quad (\mathfrak{X}_0 + \frac{1}{\sqrt{-1}}.\mathfrak{X}_1).(\mathfrak{X}_0 - \frac{1}{\sqrt{-1}}.\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_1^2 = 1,$$

eine Gleichung, welche die bekannte Relation $\cos^2 x + \sin^2 x$ enthält.

Setzt man die Anzahl der in der Grundreihe zu übers genden Glieder oder $n = 2$, so hat man die Wurzeln der Gleic

$$x^3 = 1$$

zu bestimmen; sie sind:

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{-1},\ \varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{-1};$$

nimmt man also für ε_1 die Form $\alpha+\beta.\sqrt{-1}$ an, so wird $\varepsilon_2 =\alpha-\beta.\sqrt{-1}$ und es ist:

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2}.\sqrt{3}.$$

Die aus der logarithmischen Reihe für $n=2$ sich ergebenden Reihen lauten:

$$v_0=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^9}{9}-\text{etc.},\ v_1=-x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{7}-\text{etc.},$$

$$v_2=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}-\text{etc.};$$

und man hat für sie:

$$\begin{aligned}3v_0&=\log(1-x)+\log(1-\varepsilon_1 x)+\log(1-\varepsilon_2 x)\\&=\log(1-x)+\log(1+x+x^2)\end{aligned}$$

oder

$$3v_0=\log(1-x^3),$$

$$\begin{aligned}3v_1&=\log(1-x)+\frac{1}{\varepsilon_1}\cdot\log(1-\varepsilon_1 x)+\frac{1}{\varepsilon_2}\cdot\log(1-\varepsilon_2 x)\\&=\log(1-x)+\varepsilon_2.\log(1-\varepsilon_1 x)+\varepsilon_1.\log(1-\varepsilon_2 x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3v_2&=\log(1-x)+\frac{1}{\varepsilon_1^2}\cdot\log(1-\varepsilon_1 x)+\frac{1}{\varepsilon_2^2}\cdot\log(1-\varepsilon_2 x)\\&=\log(1-x)+\varepsilon_1.\log(1-\varepsilon_1 x)+\varepsilon_2.\log(1-\varepsilon_2 x).\end{aligned}$$

Wegen der kurz vorher für ε_1 und ε_2 festgestellten Werthe ist aber:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_2.\log(1-\varepsilon_1 x)+\varepsilon_1.\log(1-\varepsilon_2 x)\\&=\alpha.\log(1-\varepsilon_1 x)(1-\varepsilon_2 x)+\beta.\sqrt{-1}.\log\frac{1-\varepsilon_2 x}{1-\varepsilon_1 x}\\&=\alpha.\log(1+x+x^2)-\beta.\frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{1+\frac{\beta x}{1-\alpha x}.\sqrt{-1}}{1-\frac{\beta x}{1-\alpha x}.\sqrt{-1}}\\&=\alpha.\log(1+x+x^2)-2\beta.\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{1-\alpha x}.\end{aligned}$$

In gleicher Weise wird:

$$\varepsilon_1.\log(1-\varepsilon_1 x)+\varepsilon_2.\log(1-\varepsilon_2 x)$$
$$=\alpha.\log(1+x+x^2)+2\beta.\operatorname{arctg}\frac{\beta x}{1-\alpha x},$$

wodurch man mittelst Einsetzung der Werthe von α und β findet:

$$3v_1=\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)-\sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}$$
$$=\log\frac{1-x}{\sqrt{1+x+x^2}}-\sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}$$

und

$$3v_2=\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)+\sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}$$
$$=\log\frac{1-x}{\sqrt{1+x+x^2}}+\sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}.$$

Die von x freien Gleichungen heissen:

$$(1-e^{v_0+v_1+v_2})^2+(1-e^{v_0+v_1+v_2}).(1-e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2})$$
$$+(1-e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2})^2=0$$

und

$$(1-e^{v_0+v_1+v_2})^2+(1-e^{v_0+v_1+v_2}).(1-e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2})$$
$$+(1-e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2})^2=0.$$

Subtrahirt man und dividirt alsdann durch den vorhandenen gemeinschaftlichen Factor, was angeht, sofern nicht $v_1=v_2$ ist, so führt dies zu:

$$(1-e^{v_0+v_1+v_2})+(1-e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2})+(1-e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2})=0.$$

Die Addition und Berücksichtigung der letzten Gleichung giebt hierauf:

$$(1-e^{v_0+v_1+v_2})^2+(1-e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2})^2+(1-e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2})^2=0.$$

Quadrirt man ferner die vorige Gleichung, nachdem man ihr erstes parenthetisches Glied auf die andere Seite geschafft, und subtrahirt die letzte davon, so erfolgt:

$$(1-e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2}).(1-e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2})=(1-e^{v_0+v_1+v_2})^2.$$

Führt man hierin die angezeigte Multiplication und Quadrirung aus und berücksichtigt die vorhergehenden Relationen, so ist:

$$(93) \quad 3e^{v_0+v_1+v_2} + e^{2v_0-v_1-v_2} - e^{2(v_0+v_1+v_2)} = 3.$$

Um noch eine zweite nicht mit imaginären Grössen behaftete Gleichung herzustellen, geben wir der obenstehenden, durch Subtraction aus den beiden ersten von x freien Gleichungen entstandenen, Relation die Form:

$$e^{v_0+v_1+v_2} + e^{v_0+\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2} + e^{v_0+\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2} = 3,$$

also

$$e^{\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2} + e^{\varepsilon_2 v_1+\varepsilon_1 v_2} = \frac{3 - e^{v_0+v_1+v_2}}{e^{v_0}}.$$

Durch Einführung der Werthe für ε_1 und ε_2 und einfache Reductionen gewinnt man hieraus:

$$e^{\alpha.(v_1+v_2)}.\{e^{\beta(v_1-v_2).\sqrt{-1}} + e^{-\beta(v_1-v_2).\sqrt{-1}}\} = \frac{3 - e^{v_0+v_1+v_2}}{e^{v_0}}$$

und man erhält folglich:

$$(94) \quad 2.\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(v_1 - v_2) = e^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}.\frac{3 - e^{v_0+v_1+v_2}}{e^{v_0}}.$$

Die Reihen mit abwechselnden Zeichen lauten:

$$V_0 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} - \text{etc.}, \quad V_1 = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \text{etc.},$$

$$V_2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} + \text{etc.},$$

so dass

$$V_0 = v_0[x = -x], \quad V_1 = v_1[x = -x], \quad V_2 = v_2[x = -x]$$

und umgekehrt.

Daher wird:

$$3V_0 = \log(1 + x^3),$$

$$3V_1 = \log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} - \sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x-2},$$

$$3V_2 = \log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \sqrt{3}.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x-2}.$$

Was die von x freien Relationen zwischen V_0, V_1 und V_2 betrifft, so stimmen dieselben mit (93) und (94) vollkommen überein und man hat nur V_0 für v_0, V_1 für v_1 und V_2 für v_2 zu setzen.

Aus den vorstehend behandelten Fällen kann man schon das Verfahren abnehmen, welches in den übrigen angewendet werden muss, und lassen wir deshalb nur noch die Formeln für die aus der Binomial- und Exponentialreihe im Fall $n=2$ entstehenden Reihen ohne weitere specielle Berechnung hierunter folgen.

Für die ersteren hat man:

$$3s_0=(1+x)^\mu+(1+\varepsilon_1 x)^\mu+(1+\varepsilon_2 x)^\mu,$$
$$3s_1=(1+x)^\mu+\varepsilon_2.(1+\varepsilon_1 x)^\mu+\varepsilon_1.(1+\varepsilon_2 x)^\mu,$$
$$3s_2=(1+x)^\mu+\varepsilon_1.(1+\varepsilon_1 x)^\mu+\varepsilon_2.(1+\varepsilon_2 x)^\mu;$$

oder

$$3s_0=(1+x)^\mu+2(1-x+x^2)^{\frac{\mu}{2}}.\cos\left(\mu.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right),$$

$$3s_1=(1+x)^\mu-(1-x+x^2)^{\frac{\mu}{2}}.\left\{\cos\left(\mu.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)-\sqrt{3}.\sin\left(\mu.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)\right\},$$

$$3s_2=(1+x)^\mu-(1-x+x^2)^{\frac{\mu}{2}}.\left\{\cos\left(\mu.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)+\sqrt{3}.\sin\left(\mu.\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}\right)\right\};$$

$$\{(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}^2+\{(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}.\{(s_0+\varepsilon_1.s_1+\varepsilon_2.s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}$$
$$+\{(s_0+\varepsilon_1 s_1+\varepsilon_2.s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}^2=0,$$

$$\{(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}^2+\{(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}.\{(s_0+\varepsilon_2.s_1+\varepsilon_1.s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}$$
$$+\{(s_0+\varepsilon_2.s_1+\varepsilon_1.s_2)^{\frac{1}{\mu}}-1\}^2=0;$$

oder:

$$(95)\quad 3.(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}+\{(s_0^2+s_1^2+s_2^2)-(s_0.s_1+s_0.s_2+s_1.s_2)\}^{\frac{1}{\mu}}$$
$$-(s_0+s_1+s_2)^{\frac{2}{\mu}}=3$$

und

$$(96)\quad 2.\cos\left\{\frac{1}{\mu}.\operatorname{arctg}\sqrt{3}.\frac{s_1-s_2}{2s_0-(s_1+s_2)}\right\}$$
$$=(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{2\mu}}.\frac{3-(s_0+s_1+s_2)^{\frac{1}{\mu}}}{(s_0^3+s_1^3+s_2^3-3s_0 s_1 s_2)^{\frac{1}{2\mu}}}.$$

Für die Exponentialreihe endlich wird:

$$3X_0 = e^x + e^{\varepsilon_1 . x} + e^{\varepsilon_2 . x} = e^x + 2 . e^{-\frac{x}{2}} . \cos\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$3X_1 = e^x + \varepsilon_2 . e^{\varepsilon_1 . x} + \varepsilon_1 . e^{\varepsilon_2 . x} = e^x - e^{-\frac{x}{2}} . \{\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} . \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\},$$

$$3X_2 = e^x + \varepsilon_1 . e^{\varepsilon_1 . x} + \varepsilon_2 . e^{\varepsilon_2 . x} = e^x - e^{-\frac{x}{2}} . \{\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} . \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\}.$$

$$\log^2(X_0 + X_1 + X_2) + \log(X_0 + X_1 + X_2) . \log(X_0 + \varepsilon_1 . X_1 + \varepsilon_2 . X_2) + \log^2(X_0 + \varepsilon_1 . X_1 + \varepsilon_2 . X_2) = 0,$$

$$\log^2(X_0 + X_1 + X_2) + \log(X_0 + X_1 + X_2) . \log(X_0 + \varepsilon_2 . X_1 + \varepsilon_1 . X_2) + \log^2(X_0 + \varepsilon_2 . X_1 + \varepsilon_1 . X_2) = 0$$

oder:

$$(97) \qquad X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3X_0X_1X_2 = 1$$

und

$$(98) \qquad \log(X_0 + X_1 + X_2) = \frac{2}{\sqrt{3}} . \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3} . (X_1 - X_2)}{2X_0 - (X_1 + X_2)}.$$

Die im Vorigen mitgetheilten Entwickelungen zeigen, dass im Fall $n=1$ die betreffenden Functionen, welche die Summen der aus einer Grundreihe abgeleiteten beiden Reihen ausdrücken, durch eine einzige Gleichung mit einander verbunden sind; diese Gleichung, welche wir unseren drei Reihen entsprechend in (78) und (80), (88) und (90), (91) und (92) vorfinden, lässt sich, die jedesmaligen in ihr enthaltenen Functionen als Coordinaten betrachtet, als Gleichung einer ebenen Curve ansehen, die also den Zusammenhang dieser Functionen geometrisch darstellt. In derselben Weise lassen sich die Gleichungen (93) und (94), (95) und (96), (97) und (98) als Gleichungen von Oberflächen auffassen, von denen je zwei zusammengehören und eine Curve im Raume liefern, welche dann den Zusammenhang der jedesmaligen drei zusammengehörigen Functionen in geometrischem Bilde darlegt.

VI.

Ueber die Convergenz der unendlichen Produkte nebst einigen Theoremen über die Convergenz gewisser unendlicher Reihen.

Von
Herrn Doctor *F. Arndt*,
Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

Um ein unendliches Produkt mit lauter positiven, nicht verschwindenden Factoren, welches wir unter der Form $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)$ etc. darstellen können, hinsichtlich seiner Convergenz oder Nicht-Convergenz zu prüfen, braucht man zwar nur die unendliche Reihe $\log(1+u_1)+\log(1+u_2)+\log(1+u_3)+$ etc. in eben der Hinsicht zu untersuchen; aber die Theorie der Convergenz der unendlichen Reihen ist noch nicht in dem Grade ausgebildet, dass man die Sache hiemit als erledigt betrachten dürfte. Cauchy hat in der Analyse algébrique Note IX. gezeigt, wie die Untersuchung von den beiden unendlichen Reihen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \text{etc.},$$
$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ u_4^2,\ \text{etc.}$$

abhängig gemacht werden kann, indem das fragliche Produkt gegen einen endlichen, von Null verschiedenen Werth convergirt, wenn diese beiden Reihen convergent sind, gegen Null dagegen, wenn die erste Reihe convergent, die zweite divergent ist. Dieser Satz enthält also ein sicheres Kennzeichen für die Fälle, in welchen die erste Reihe convergent ist. Für den Fall aber, dass die Reihe u_1, u_2, u_3 etc. nicht convergirt, sind mir noch keine allgemeinen Sätze bekannt, weshalb ich denselben hier einer besonderen Un-

ersuchung unterwerfe. Ueberdies scheint Cauchy's Behandlung les Gegenstandes der nöthigen Schärfe zu entbehren.

Um die Betrachtung übersichtlicher zu halten, schicke ich zwei Lehrsätze voraus:

Lemma I. Es sei u_1, u_2, u_3, etc. eine unendliche Reihe, deren Glieder dasselbe Vorzeichen haben; c_1, c_2, c_3, etc. beliebige Grössen, deren numerische Werthe eine endliche Grösse C nicht übersteigen; unter diesen Voraussetzungen wird, wenn die Reihe u_1, u_2, u_3 etc. convergent ist, die folgende $c_1 u_1, c_2 u_2, c_3 u_3$ etc. ebenfalls convergent sein.

Beweis. Bezeichnen wir die absoluten Werthe der in Betracht kommenden Grössen mit den entsprechenden grossen Buchstaben, so ist $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \pm (U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \pm S_n$, wo S_n, indem n unendlich wird, gegen eine endliche Grenze convergirt. Da nun die Summe

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n \overline{\gtrless} C(U_1 + U_2 + \dots + U_n),$$

so folgt, dass die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $C_1 U_1$, $C_2 U_2$, $C_3 U_3$, etc. ebenfalls convergent ist; nach einem bekannten Satze ist folglich auch $c_1 u_1$, $c_2 u_2$, $c_3 u_3$ etc. eine convergente Reihe.

Lemma II. Es sei u_1, u_2, u_3, etc. eine unendliche Reihe, deren Glieder dasselbe Vorzeichen haben, c_1, c_2, c_3 etc. Grössen von einerlei Vorzeichen, deren numerische Werthe sämmtlich nicht kleiner als eine von Null verschiedene positive Grösse C sind; unter diesen Voraussetzungen wird, wenn die Reihe u_1, u_2, u_3 etc. divergent ist, die folgende $c_1 u_1, c_2 u_2, c_3 u_3$ etc. ebenfalls divergent sein.

Beweis. Behalten wir die obigen Bezeichnungen bei, so ist $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \pm (U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \pm S_n$, wo S_n mit n zugleich unendlich gross wird. Da nun die Summe $C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n \overline{\gtrless} C(U_1 + U_2 + \dots + U_n)$, so folgt, dass $C_1 U_1$, $C_2 U_2$, $C_3 U_3$ etc. eine divergente Reihe ist; nun ist $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots = \pm (C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots)$, folglich ist die Reihe $c_1 u_1$, $c_2 u_2$, $c_3 u_3$ etc. ebenfalls divergent.

Nehmen wir nun zuerst an, dass in dem unendlichen Produkte $(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3)$ etc. alle u dasselbe Zeichen haben und

setzen nach der durch ihren Rest begrenzten Maclaurin'schen Reihe $\log(1+u)=\frac{u}{1+\Theta u}$, wo Θ zwar eine unbekannte Funktion von u ist, aber zwischen 0 und 1 liegt. In dieser Gleichung kann man für u succ. u_n, u_{n+1}, u_{n+2} etc. setzen, da die Funktion $\log(1+u)$ mit ihrer Ableitung $\frac{1}{1+u}$ stetig ist von $u=0$ bis $u=u_n$ oder bis $u=u_{n+1}$ etc. Hiernach kommt

$$(a)\qquad \log(1+u_n)+\log(1+u_{n+1})+\ldots+\log(1+u_{n+m-1})$$
$$=\frac{u_n}{1+\Theta_n u_n}+\frac{u_{n+1}}{1+\Theta_{n+1}u_{n+1}}+\ldots+\frac{u_{n+m-1}}{1+\Theta_{n+m-1}u_{n+m-1}},$$

wo Θ_n, Θ_{n+1}, ... Θ_{n+m-1} sämmtlich zwischen 0 und 1 liegen. Wird nun u_n unendlich klein, indem n unendlich gross wird, so nähert sich $\frac{1}{1+\Theta_n u_n}$ der Einheit, also kann man sich n so gross genommen denken, dass dieser Bruch, indem n ferner wächst, immerwährend kleiner bleibt als eine bestimmte endliche Grösse, oder auch immerwährend eine positive, von Null verschiedene Grösse übersteigt. Nach Lemma I. und II. wird folglich die Reihe

$$u_n\frac{1}{1+\Theta_n u_n},\quad u_{n+1}\frac{1}{1+\Theta_{n+1}u_{n+1}},\quad u_{n+2}\frac{1}{1+\Theta_{n+2}u_{n+2}},\quad \text{etc.}$$

gleichzeitig mit der Reihe u_n, u_{n+1}, u_{n+2} etc. convergent oder divergent sein. — Wird u_n dagegen nicht unendlich klein, so kann auch der Bruch $\frac{u_n}{1+\Theta_n u_n}=\frac{1}{\Theta_n+\frac{1}{u_n}}$ nicht unendlich klein werden, also bleibt das vorhergehende Resultat auch für diesen Fall richtig.

Die Gleichung (a) führt daher zu folgenden Sätzen:

Satz 1. Wenn die Reihe u_1, u_2, u_3 etc. lauter Glieder mit gleichen Vorzeichen enthält und convergent ist, so convergirt das Produkt $P=(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)$ etc. gegen eine endliche, von Null verschiedene Grenze.

Satz 2. Wenn die Reihe u_1, u_2, u_3, etc. lauter Glieder mit gleichen Vorzeichen enthält und divergent ist, so wird das unendliche Produkt $P=\pm\infty$ oder Null, jenachdem die Glieder positiv oder negativ sind.

Diese beiden Sätze gelten, wie leicht zu sehen, auch dann noch, wenn die Glieder der Reihe u_1, u_2, u_3, etc. zwar nicht von

Anfang an einerlei Zeichen haben, sich aber doch ein endlicher Werth v von n angeben lässt, so dass u_n von $n=v$ bis $n=\infty$ sein Zeichen nicht ändert.

Wenn aber die Reihe nicht so beschaffen ist, dass ihre Glieder zuletzt dasselbe Vorzeichen bekommen, so finden die Lemmata I. und II. auf die Gleichung (a) nicht mehr Anwendung und man muss ein Glied der Maclaurin'schen Reihe hinzunehmen. Es kann nämlich auch gesetzt werden:

$$\text{(b)} \qquad \log P_m = u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+m-1}$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{u_n}{1+\Theta_n u_n}\right)^2 + \left(\frac{u_{n+1}}{1+\Theta_{n+1} u_{n+1}}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{u_{n+m-1}}{1+\Theta_{n+m-1}\, u_{n+m-1}}\right)^2\right\},$$

wo $(1+u_n)(1+u_{n+1})\ldots\ldots(1+u_{n+m-1}) = P_m$.

Bezeichnen wir die Summen

$$u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+m-1} \text{ durch } s_m,$$
$$u_n^2 + u_{n+1}^2 + \ldots\ldots + u_{n+m-1}^2 \text{ durch } t_m,$$
$$u_n^2\left(\frac{1}{1+\Theta_n u_n}\right)^2 + u_{n+1}^2\left(\frac{1}{1+\Theta_{n+1} u_{n+1}}\right)^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + u_{n+m-1}^2\left(\frac{1}{1+\Theta_{n+m-1}\, u_{n+m-1}}\right)^2 \text{ durch } T_m.$$

Da alle Θ zwischen 0 und 1 liegen, die Glieder von t_m sämmtlich positiv sind, so folgt, wie vorher, nach Lemma I. und II., dass, indem m in's Unendliche wächst, die Summen t_m, T_m entweder zugleich gegen endliche Grenzen convergiren oder zugleich unendlich gross werden. Die Summe s_m kann aber convergiren (d. h. sich einer bestimmten endlichen Grenze nähern), oder divergiren (d. h. an den Werth $+\infty$ oder $-\infty$ streben), oder oscilliren *) (d. h. sich gar keiner endlichen oder unendlichen Grenze nähern).

Aus dem blossen Anblick der Gleichung zieht man nun folgende Schlüsse:

Satz 3. Wenn die Summen s_m, t_m gegen endliche Werthe convergiren, so nähert sich das Produkt P_m einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze.

Satz 4. Wenn s_m gegen einen endlichen Werth convergirt, t_m unendlich gross wird, so nähert sich P_m der Grenze Null.

---

*) Diesen Begriff hat Stern eingeführt (Crelle's Journal Bd. 37), wo dieser verdiente Mathematiker die Theorie der Convergenz der Kettenbrüche mit positiven Gliedern erledigt.

Satz 5. Wenn s_m gegen die Grenze $-\infty$ geht, s nähert sich P_m der Null.

Satz 6. Wenn s_m gegen die Grenze $+\infty$ geht, ab t_m gegen eine endliche Grenze, so geht P_m an d Grenze $+\infty$.

Satz 7. Wenn s_m oscillirt, t_m gegen eine endlic Grenze geht, so wird P_m oscilliren.

Satz 8. Wenn s_m oscillirt, ohne eine bestimmte en liche Grösse zu übersteigen, t_m an die Grenze + geht, so nähert sich P_m der Null.

Beispiel zu Satz 7. Die Reihe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.},$$

wo die Glieder von der Form $\pm\left(\frac{1}{p}\right)^2$, und wo jedes Glied so mit demselben Zeichen vorkommt, als sein Nenner anzeigt, osc lirt zwischen 0 und 1, die Reihe der Quadrate $4\left(\frac{1}{4}\right)^2+9\left(\frac{1}{9}\right.$ $+16\left(\frac{1}{16}\right)^2+\text{etc.}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$ ist convergent, folglich

$$P=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{9}\right)^9\left(1+\frac{1}{16}\right)^{16}\left(1-\frac{1}{25}\right)^{25}\left(1+\frac{1}{36}\right)^{36}\cdots$$

ein oscillirendes Produkt. Um sich von dem Gang dieser Fun tion ein Bild zu entwerfen, dient folgende Betrachtung. Setz wir $P=p_1p_2p_3p_4p_5$ etc. und schicken folgende Bemerkung vorau

Nach der Maclaurin'schen Reihe findet sich

$$m^2\log\left(1\pm\frac{1}{m^2}\right)+(m+1)^2\log\left(1\mp\frac{1}{(m+1)^2}\right)=\pm1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\pm\frac{\Theta_0}{m}}\right)^2$$

$$\mp1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1\mp\frac{\Theta_1}{m+1}}\right)^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\pm\frac{\Theta_0}{m}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1\mp\frac{\Theta_1}{m+1}}\right)^2<0$$

daher

$$\left(1\pm\frac{1}{m^2}\right)^{m^2}\left(1\mp\frac{1}{(m+1)^2}\right)^{(m+1)^2}<1,$$

wo die Vorzeichen sich auf einander beziehen. Ferner ist

$$m^2\log\left(1+\frac{1}{m^2}\right)+(m+1)^2\log\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)+\dots+(m+\mu)^2\log\left(1+\frac{1}{(m+\mu)^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{m+\frac{\Theta_0}{m}}\right)^2+\left(\frac{1}{m+1-\frac{\Theta_1}{m+1}}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{1}{m+\mu+\frac{\Theta_\mu}{m+\mu}}\right)^2\right\}>0,$$

wie leicht zu ersehen, daher

$$\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^{m^2}\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)^{(m+1)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{(m+2)^2}\right)^{(m+2)^2}\dots\dots\left(1+\frac{1}{(m+\mu)^2}\right)^{(m+\mu)^2}>1 \text{ *)}.$$

Die Maxima des Produkts P, nämlich p_1, $p_1p_2p_3$, $p_1p_2p_3p_4p_5$ etc. werden hiernach fortwährend kleiner, da $p_2p_3<1$, $p_4p_5<1$; u. s. w., ebenso werden die Minima p_1p_2, $p_1p_2p_3p_4$, $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ etc. fortwährend kleiner, da $p_3p_4<1$, $p_5p_6<1$, u. s. w.; da endlich $p_3p_4p_6\dots p_{2r+1}>1$, also $p_1p_2p_3\dots p_{2r+1}>p_1p_2$, so übertrifft jedes Maximum das grösste Minimum. Hieraus ist ersichtlich, dass P_m sich keiner bestimmten Grenze nähert.

Beispiel zu Satz 8. Die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\text{etc.},$$

wo die Glieder von der Form $\pm\frac{1}{p}$, und wo jedes Glied so oft mit demselben Zeichen vorkommt, als sein Nenner anzeigt, oscillirt zwischen 0 und 1, während die Reihe der Quadrate $2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{4}\right)^2+\text{etc.}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}$ divergent ist, folglich hat das unendliche Produkt

$$P=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^7\dots,$$

den Werth Null.

---

*) Alle in dieser Abhandlung angewandten Logarithmen sind hyperbolische.

In der That, hier ist $P_{2m} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{9})\ldots$ $\ldots(1-\frac{1}{2m+1}) = 0$ für $m=\infty$ (Satz 2), ferner

$$P_{2m+1} = P_{2m}(1+\frac{1}{2m+2})^{2m+2} = e \operatorname{Lim} P_{2m} = 0,$$

wo e die Basis des hyperbolischen Logarithmensystems bedeutet.

Betrachten wir in der unendlichen Reihe $u_1, u_2, u_3, u_4,$ etc. die Summen der positiven und negativen Glieder jede für sich, so lässt sich noch ein Schritt weiter gehen. Bezeichnen wir in $u_1+u_2+\ldots+u_n=s_n$ die Summe der positiven Glieder mit ϱ, die der negativen mit σ, so dass $s_n=\varrho-\sigma$, so folgt nach Satz 1. und 2., dass das Produkt P_m gegen eine endliche, von Null verschiedene Grösse convergirt, wenn ϱ und σ sich bestimmten endlichen Grenzen nähern, gegen Null, wenn ϱ an einen endlichen Werth geht, und $\sigma=+\infty$ wird. Diese Resultate folgen indessen schon aus den Sätzen 3. und 5. Wenn aber die Reihe der positiven Glieder divergent, die der negativen convergent, die Reihe der Quadrate der Glieder divergent ist, so sieht man, dass P_m an die Grenze $+\infty$ rückt, und dies Resultat lässt sich aus den obigen Sätzen noch nicht ableiten, da hier die im Vorhergehenden mit s_m, t_m bezeichneten Grössen zugleich $+\infty$ werden. Also

Satz 9. Das unendliche Produkt $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)$ etc. rückt an die Grenze $+\infty$, wenn die Reihe der positiven u divergent, die der negativen u convergent ist.

Von allen möglichen Fällen bleibt demnach unsern bisherigen Betrachtungen zufolge nur derjenige zweifelhaft, wo die Reihe der positiven u sowohl, als die Reihe der negativen u divergent ist, die Reihe der Quadrate der Glieder ebenfalls divergirt, und dabei die Summe $u_1+u_2+u_3+\ldots$ entweder $+\infty$ wird oder so oscillirt, dass sie nicht fortwährend kleiner bleibt als eine endliche Grösse.

Beispiel 1. Die Summe $\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{5}}$ $-\frac{1}{5}$ etc. wird unendlich gross, denn $\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}>\frac{1}{n}$ für $n>4$, wie leicht erhellt, also die obige Summe von $\sqrt{\frac{1}{4}}$ an $>\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ etc. Die Reihe der Quadrate $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+$ etc. ist ebenfalls divergent. Das Produkt

$$(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})(1-\tfrac{1}{2})(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})(1-\tfrac{1}{3})(1+\sqrt{\tfrac{1}{4}})(1-\tfrac{1}{4}) \text{ etc.}$$

kann also nach den obigen Kennzeichen nicht geprüft werden. Dass es unendlich gross wird, lässt sich auf folgende Art nachweisen.

Setzen wir $(1+\sqrt{\frac{1}{4}})(1+\sqrt{\frac{1}{5}})\ldots\ldots(1+\sqrt{\frac{1}{n+1}})=P'$, so findet sich leicht $P_{2n}=(1+\sqrt{\frac{1}{2}})(1+\sqrt{\frac{1}{3}})P'.\frac{1}{n+1}$. Nun ist $\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}>\frac{1}{n}$, $\sqrt{\frac{1}{n}}>\frac{2}{n}$ für $n>4$, $\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, folglich $P'>\frac{6}{4}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{7}\ldots\ldots\frac{n+3}{n+1}$, oder durch Multiplication und Heben $P'>\frac{1}{20}(n+2)(n+3)$, also

$$P_{2n}>(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}).\frac{nn+5n+6}{20n+20};$$

der Bruch

$$\frac{nn+5n+6}{20n+20}=\frac{n+5+\frac{6}{n}}{20+\frac{20}{n}}$$

wird unendlich gross mit n, folglich auch P_{2n}.

Beispiel 2. Von den drei Produkten

$$(1+1)(1-\tfrac{1}{2})(1+1)(1-\tfrac{1}{2})(1+1)(1-\tfrac{1}{2}) \text{ etc.},$$
$$(1+1)(1-\tfrac{1}{2})(1+2)(1-\tfrac{1}{2})(1+3)(1-\tfrac{1}{2}) \text{ etc.},$$
$$(1+1)(1-\tfrac{1}{2})(1+1)(1-\tfrac{2}{3})(1+1)(1-\tfrac{3}{4}) \text{ etc.}$$

oscillirt das erste, das zweite wird $+\infty$, das dritte Null.

Beispiel 3. Die Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \text{ etc.},$$

deren Bildungsgesetz leicht erhellt, oscillirt zwischen 0 und $+\infty$, während die Reihe der Quadrate divergirt; das Produkt

$$P=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5} \text{ etc.}$$

convergirt gegen Null, was sich auf folgende Art zeigen lässt: Die Maxima sind $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}$, $(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{6})$, $(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{6})(1-\frac{2}{8})$, etc.,

sie convergiren gegen die Null, da $\frac{1}{6}, \frac{2}{8}, \frac{3}{10}, \ldots$ eine divergirende Reihe ist (Satz 2.), folglich nähert sich P ebenfalls der Null.

Setzen wir jetzt die Maclaurin'sche Reihe noch weiter fort, so ist

$$\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \ldots + \frac{1}{2r-1}u^{2r-1} - \frac{1}{2r}\left(\frac{u}{1+\Theta u}\right)^{2r},$$

folglich, wenn wir die Grösse

$$u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 - \ldots + \frac{1}{2r-1}u_n^{2r-1}$$

mit $U_{n,r}$ bezeichnen,

$$\text{(c)} \quad \log P_m = U_{n,r} + U_{n+1,r} + U_{n+2,r} + \ldots + U_{n+m-1,r}$$

$$-\frac{1}{2r}\left\{\left(\frac{u_n}{1+\Theta_n u_n}\right)^{2r} + \left(\frac{u_{n+1}}{1+\Theta_{n+1}u_{n+1}}\right)^{2r} + \ldots + \left(\frac{u_{n+m-1}}{1+\Theta_{n+m-1}u_{n+m-1}}\right)^{2r}\right\},$$

wo alle Θ zwischen 0 und 1 liegen. Bezeichnen wir nun hier die Summen

$$U_{n,r} + U_{n+1,r} + \ldots + U_{n+m-1,r} \text{ mit } s_m,$$
$$u_n^{2r} + u_{n+1}^{2r} + \ldots + u_{n+m-1}^{2r} \text{ mit } t_m,$$

so hat man wiederum sechs Sätze, welche ebenso lauten werden wie die Sätze 3. bis 8., und der zweifelhafte Fall wird der sein, wo $t_m = +\infty$ wird, s_m entweder ebenfalls $+\infty$ wird oder oscillirt, ohne kleiner zu bleiben als eine endliche Grösse.

Dies Resultat hat insofern eine sehr ausgedehnte Anwendung, als die unendliche Reihe u_n^{2r}, u_{n+1}^{2r}, u_{n+2}^{2r} etc. für hinlänglich grosse Werthe von r häufig convergent sein wird, wenn auch die Reihe u_n^2, u_{n+1}^2, u_{n+2}^2 etc. eine divergente ist, wo dann die Beschaffenheit des unendlichen Produktes nach den obigen Kennzeichen nicht zweifelhaft bleiben kann. Ist z. B. die Reihe der u, wie in Beispiel 1, folgende:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \text{ etc.},$$

so convergirt die Reihe der Biquadrate

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \text{etc.},$$

die Reihe $U_{n,r}$, $U_{n+1,r}$ etc. ist hier

$$U_n - V_n + U_{n+1} - V_{n+1} + U_{n+2} - V_{n+2} + \text{etc.},$$

$$U_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3.$$

tzt man nun zur Abkürzung:

$$\sigma_m = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+m-1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+m-1}\right),$$

$$\sigma'_m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+m-1}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sigma''_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+m-1}\right)^{2},$$

$$\sigma'''_m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+m-1}\right)^{3};$$

findet sich

$$U_n - V_n + U_{n+1} - V_{n+1} + \ldots + U_{n+m-1} - V_{n+m-1}$$
$$= \sigma_m + \sigma'_m - \sigma''_m - \sigma'''_m.$$

Nach einem bekannten Satze convergiren σ'_m, σ''_m, σ'''_m, indem m unendlich wird, gegen bestimmte endliche Grenzen; fer-

ner ist für $n > 4$, $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)$, also wird σ_m unendlich gross, folglich nähert sich $U_n - V_n + U_{n+1} - V_{n+1} + \dots + U_{n+m-1} - V_{n+m-1}$ der Grenze $+\infty$, folglich

$$(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})(1-\tfrac{1}{2})(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})(1-\tfrac{1}{3})(1+\sqrt{\tfrac{1}{4}})(1-\tfrac{1}{4}) \text{ etc. } = +\infty$$

(nach dem analogen Satze 6.).

Um die Grenzen der Anwendbarkeit dieser Theorie zu bestimmen, kommt es auf die Beantwortung der Frage an, ob es Reihen $v_1, v_2, v_3, v_4,$ etc. mit positiven Gliedern und von der Beschaffenheit giebt, dass die Reihe $v_1^\beta, v_2^\beta, v_3^\beta$, etc. immer divergent ist, wie gross β genommen werden möge?

Diese Frage muss in der That mit „ja“ beantwortet werden.

Wird nämlich zuerst v_n nicht unendlich klein, so ist die Sache von selbst klar. Wird v_n dagegen unendlich klein, so stelle ich folgendes Theorem auf:

„Wenn das Verhältniss $\dfrac{\log n}{\log.\dfrac{1}{v_n}}$ unendlich gross wird, indem n ins Unendliche wächst, so ist

$$v_n^\beta,\quad v_{n+1}^\beta,\quad v_{n+2}^\beta, \dots$$

immer eine divergente Reihe für einen beliebig grossen Werth von β. Wenn aber das obige Verhältniss kleiner bleibt als eine endliche Grösse, so kann man β so gross nehmen, dass die in Rede stehende Reihe immer convergent ist.

I. Unter der ersten Voraussetzung wird man n so gross nehmen können, dass das Verhältniss, wenn n ferner wächst, einen beliebig grossen Werth h fortwährend übersteigt, daraus folgt:

$$\log.\frac{1}{v_n} < \frac{1}{h}\log n,\quad \frac{1}{v_n} < n^{\frac{1}{h}},\quad v_n^\beta > n^{-\frac{\beta}{h}};$$

die Reihe $n^{-\frac{\beta}{h}}, (n+1)^{-\frac{\beta}{h}}, (n+2)^{-\frac{\beta}{h}}$ divergirt nun für $\frac{\beta}{h} \leqq 1$, man kann aber n so gross nehmen, dass $h > \beta$ ist, folglich ist v_n^β, v_{n+1}^β, etc. ebenfalls divergent.

II. Unter der anderen Voraussetzung bleibt das Verhältniss kleiner als eine endliche Grösse g, daraus folgt $v_n^\beta < n^{-\frac{\beta}{g}}$; die

Reihe $n^{-\frac{\beta}{g}}$, $(n+1)^{-\frac{\beta}{g}}$ etc. convergirt nun für $\frac{\beta}{g} > 1$, nimmt man also $\beta > g$, so wird die Reihe $v_n{}^\beta$, $v_{n+1}{}^\beta$, etc. convergent sein.

So ist z. B. die Reihe

$$(a^{-\sqrt{\log 1}})^\beta,\ (a^{-\sqrt{\log 2}})^\beta,\ (a^{-\sqrt{\log 3}})^\beta,\ (a^{-\sqrt{\log 4}})^\beta, \ldots..$$

divergent für einen noch so grossen Werth von β. Denn hier ist

$$\frac{1}{v_n} = a^{\sqrt{\log n}},\quad \frac{\log n}{\log.\frac{1}{v_n}} = \frac{\log n}{\sqrt{\log n}.\log a} = \frac{\sqrt{\log n}}{\log a},$$

welcher Werth mit n unendlich gross wird.

Auf Principien, denen ähnlich, welche im Vorhergehenden angewandt werden, beruhen folgende Sätze:

I. Die beliebige Funktion $f(u)$ sei mit ihren Ableitungen $f'(u)$, $f''(u)$, ... $f^{2m-1}(u)$ stetig in der Nähe von $u=0$ und verschwinde mit denselben für $u=0$, auch sei noch die folgende Ableitung $f^{2m}(u)$ stetig in der Nähe von 0. Wenn alsdann die Reihe

$$u_1{}^{2m},\ u_2{}^{2m},\ u_3{}^{2m}, \ldots.$$

convergirt, so wird

$$f(u_1),\ f(u_2),\ f(u_3), \ldots$$

ebenfalls eine convergente Reihe sein.

Nach dem Maclaurin'schen Satze ist unter den getroffenen Voraussetzungen, indem Θ zwischen 0 und 1 liegt,

$$f(u) = \frac{u^{2m}}{1.2.3....2m} f^{2m}(\Theta u)$$

für hinlänglich kleine Werthe von u, folglich

$$s_m = f(u_n) + f(u_{n+1}) + \ldots + f(u_{n+m-1})$$

$$= \frac{u_n{}^{2m}}{1.2....2m} f^{2m}(\Theta_n u_n) + \ldots + \frac{u_{n+m-1}{}^{2m}}{1.2....2m} f^{2m}(\Theta_{n+m-1} u_{n+m-1});$$

nun nähert sich $f^{2m}(\Theta_n u_n)$ der Grenze $f^{2m}(0)$, welche nicht ∞ sein kann, also bleibt diese Ableitung zuletzt immer kleiner als eine endliche Grösse, also convergirt die Reihe $f(u_n)$, $f(u_{n+1})$, etc. (Lemma I.)

2. Die Funktion $f(u)$ sei mit ihren Ableitungen $f'(u)$, $f''(u)$,.... ....$f^{2m-1}(u)$ stetig in der Nähe von $u=0$ und verschwinde mit denselben für $u=0$, auch sei die folgende Ableitung $f^{2m}(u)$ noch stetig in der Nähe von Null, verschwinde aber nicht für $u=0$; wenn alsdann die Reihe u_1^{2m}, u_2^{2m}, etc. divergirt, so jedoch, dass u_n mit $\frac{1}{n}$ unendlich klein wird, so wird $f(u_1)$, $f(u_2)$, etc. ebenfalls eine divergente Reihe sein.

Hier wird nämlich die Ableitung $f^{2m}(\Theta_n u_n)$, indem n unendlich gross, also u_n unendlich klein wird, gegen eine von Null verschiedene Grösse convergiren, also zuletzt immer das Vorzeichen von $f^{2m}(0)$ haben, woraus die Behauptung nach Lemma II. folgt.

3. Die Funktion $f(u)$ sei mit ihren Ableitungen $f'(u)$, $f''(u)$,... ....$f^{2m}(u)$ stetig in der Nähe von $u=0$ und verschwinde mit denselben für $u=0$, auch sei noch die folgende Ableitung $f^{2m+1}(u)$ stetig in der Nähe von Null; wenn alsdann u_n von einem gewissen Werth von n an immer dasselbe Zeichen behält, und u_1^{2m+1}, u_2^{2m+1}, u_3^{2m+1},.... eine convergirende Reihe ist, so wird die folgende $f(u)_1$, $f(u)_2$, etc. ebenfalls convergent sein.

4. Die Funktion $f(u)$ sei mit ihren Ableitungen $f'(u)$, $f''(u)$,... ....$f^{2m}(u)$ stetig in der Nähe von $u=0$ und verschwinde mit denselben für $u=0$, auch sei noch die folgende Ableitung $f^{2m+1}(u)$ stetig in der Nähe von Null, verschwinde aber nicht für $u=0$; wenn alsdann die Reihe u_1^{2m+1}, u_2^{2m+1}, etc. divergent ist, so jedoch, dass u_n von einem gewissen Werth von n an immer dasselbe Zeichen behält und mit $\frac{1}{n}$ verschwindet, so wird die Reihe $f(u_1)$, $f(u_2)$, etc. ebenfalls divergent sein.

5. Nehmen wir an, dass $f(0)$ verschwindet und setzen nach der Maclaurin'schen Reihe:

$$f(u)=uf'(0)+\frac{u^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{u^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}f^{2m-1}(0)+\frac{u^{2m}}{1.2\ldots2m}f^{2m}(\Theta u),$$

wo die Funktion mit allen Ableitungen in der Nähe von Null stetig sein muss, so kommt

$$f(u_n)+f(u_{n+1})+\ldots+f(u_{n+m-1})=U_n+U_{n+1}+\ldots+U_{n+m-1}$$
$$+\frac{u_n^{2m}}{(2m)!}f^{2m}(\Theta_n u_n)+\ldots+\frac{u_{n+m-1}^{2m}}{(2m)!}f^{2m}(\Theta_{n+m-1}u_{n+m-1}),$$

wo allgemein

$$U_n=u_nf'(0)+\frac{u_n^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{u_n^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}f^{2m-1}(0) \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung wird man Resultate ableiten können, die den in den Sätzen 3. bis 8. ausgesprochenen analog sind.

VII.

Directe Auflösung des Rösselsprungs.

Von
Herrn Hofrath Dr. *T. Clausen*
zu Dorpat.

Den Anfang zu einer systematischen Auflösung der Aufgabe: mit dem Springer auf dem Schachbrette in 64 Zügen alle Felder zu berühren, und auf das erste Feld zurückzukommen, machte bekanntlich Euler in den Berliner Memoiren für 1759, wo er eine indirecte Methode angiebt, eine Menge verschiedener Auflösungen der Aufgabe zu finden. Ich bin auf eine besondere Auflösung der Aufgabe gekommen, die, wie es scheint, so direct als möglich zum Ziele führt, und bei einer grossen Gleichförmigkeit den ganzen Gang auf einmal übersehen lässt.

Ich theile zu dem Ende die Felder in 4 kleine Quadrate von je 16 Feldern; jedes dieser Quadrate wieder in 4 Abtheilungen von je 4 Zügen, die in sich zurückkehrend sind, oder so gelegen, dass man, von einem beliebigen Felde derselben anfangend, in 4 Zügen über die drei übrigen Felder gehen, und auf das erstere Feld zurückkehren könne. Diese Abtheilungen zeigen das folgende Schema, worin die erwähnten Felder mit 0 bezeichnet sind:

0			
		0	
	0		
			0

			0
	0		
		0	
0			

		0	
0			
			0
	0		

	0		
			0
0			
		0	

Man kann nun ebenfalls in 16 aufeinanderfolgenden Z über alle ähnlichliegenden Abtheilungen der 4 Viertel des Scl bretts gehen, und auf ein beliebiges Ausgangsfeld zurückkom wie man aus den folgenden Darstellungen sieht.

2				6			
		3				7	
	1				5		
			4				8
16				12			
		13				9	
	15				11		
			14				10

			13				11
	15				12		
		14				10	
16				9			
			3				7
	2				8		
		4				6	
1				5			

	3				5		
			4				6
2				8			
		1				7	
	15				9		
			16				10
14				12			
		13				11	

		10				6	
11				7			
			9				5
	12				8		
		16				4	
13				1			
			15				3
	14				2		

Es kommt jetzt also nur darauf an, diese 4 Züge zu e einzigen zu verbinden, welches leicht auf folgende Art gesch

2	19	58	41	6	21	54	39
59	42	3	20	55	40	7	22
18	1	44	57	24	5	38	53
43	60	17	4	37	56	23	8
16	31	64	45	12	25	52	35
61	46	13	32	49	36	9	26
30	15	48	63	28	11	34	51
47	62	29	14	33	50	27	10

Es lassen sich noch mehr wiederkehrende Lösungen d andere Combinationen der 4 Gruppen finden; noch mehr wenn man mit den Gruppen zu je 4 Zügen wechselt.

VIII.

Ueber eine combinatorische Aufgabe.

Von

Herrn Hofrath Dr. *T. Clausen*

zu Dorpat.

In den englischen mathematischen Journalen findet sich eine n neuerer Zeit vielfältig bearbeitete Aufgabe: „Die Anzahl der Verbindungen zu je p Grössen zu finden, die man aus ı Grössen bilden kann; so dass jede Verbindung zu q rössen, und nur einmal vorkommt." Man ist jedoch von ler allgemeinen Auflösung der Aufgabe sehr weit entfernt, und at nur einige specielle Fälle gefunden. Selbst von dem einfachten Falle, wenn $p=3$, $q=2$ und n eine beliebige Zahl ist, hat an nur für besondere Werthe von n die Auflösung. Es ist schon on Dr. Kirkman und Prof. Steiner gezeigt worden, dass im etzteren Falle eine Auflösung nur dann möglich sei, wenn n von er Form $6\lambda+1$ oder $6\lambda+3$ ist. Nun behauptet Kirkman im Philosophical Magazine" Juli 1852 p. 527, und findet seine leinung bei späteren Untersuchungen nicht entkräftet: dass eine uflösung für $n=21$ und 33 auch nicht möglich sei. Es ist mir ber gelungen, durch ein indirectes Verfahren für diese Fälle Aufsungen zu finden. Es sind nämlich die Combinationen, wenn an die Grössen durch Zahlen bezeichnet, folgende:

$n=21.$

1. 4. 5.	2. 16. 18.	3. 17. 18.	5. 10. 12.	7. 10. 13.	10. 14. 19.
1. 10. 11.	2. 3. 8.	3. 4. 11.	5. 15. 17.	7. 17. 21.	10. 15. 21.
1. 8. 18.	2. 9. 19.	3. 20. 21.	5. 8. 11.	7. 8. 9.	11. 13. 20.
1. 6. 13.	2. 11. 21.	4. 8. 12.	5. 6. 18.	7. 18. 20.	11 12. 16.
1. 15. 20.	2. 12. 14.	4. 17. 19.	5. 14. 20.	8. 13. 19.	11. 14. 18.
1. 14. 21.	2. 4. 20.	4. 13. 21.	6. 8. 20.	8. 14. 15.	12. 18. 21.
1. 3. 7.	2. 6. 10.	4. 10. 18.	6. 11. 15.	8. 10. 17.	12. 13. 17.
1. 16. 19.	3. 6. 19.	4. 9. 15.	6. 14. 17.	8. 16. 21.	12. 19. 20.
1. 9. 12.	3. 5. 9.	4. 7. 14.	6. 7. 12.	9. 13. 18.	15. 18. 19.
1. 2. 17.	3. 10. 16.	4. 6. 16.	6. 9. 21.	9. 11. 17.	16. 17. 20.
2. 5. 7.	3. 12. 15.	5. 19. 21.	7. 15. 16.	9. 14. 16.	
2. 13. 15.	3. 13. 14.	5. 13. 16.	7. 11. 19.	9. 10. 20.	

$n=33.$

1. 14. 15.	2. 11. 12.	4. 15. 18.	6. 14. 16.	8. 20. 24.	11. 24. 33.
1. 16. 17.	2. 19. 20.	4. 19. 21.	6. 8. 19.	8. 10. 32.	11. 23. 32.
1. 24. 25.	2. 17. [illegible]4.	4. 20. 23.	6. 9. 12.	8. 13. 31.	11. 21. 30.
1. 2. 29.	2. 13. 33.	4. 11. 27.	6. 31. 32.	8. 9. 29.	11. 19. 28.
1. 12. 22.	2. 3. 31.	4. 25. 28.	6. 10. 11.	8. 23. 26.	11. 20. 29.
1. 13. 19.	2. 8. 28.	4. 8. 17.	6. 24. 29.	9. 28. 31.	11. 13. 26.
1. 11. 18.	2. 5. 18.	4. 24. 31.	6. 22. 25.	9. 24. 27.	12. 16. 21.
1. 3. 10.	3. 9. 11.	4. 5. 6.	6. 7. 28.	9. 19. 22.	12. 19. 25.
1. 9. 33.	3. 12. 14.	4. 26. 29.	6. 21. 26.	9. 18. 21.	12. 23. 24.
1. 8. 30.	3. 16. 18.	4. 14. 33.	6. 23. 33.	9. 14. 20.	12. 17. 31.
1. 5. 31.	3. 17. 19.	5. 8. 12.	7. 27. 30.	9. 15. 23.	12. 18. 27.
1. 4. 32.	3. 20. 22.	5. 9. 13.	7. 21. 24.	9. 17. 32.	12. 29. 30.
1. 6. 27.	3. 29. 32.	5. 10. 14.	7. 12. 15.	9. 16. 30.	12. 28. 32.
1. 26. 28.	3. 5. 27.	5. 11. 15.	7. 11. 14.	9. 10. 26.	12. 26. 33.
1. 7. 20.	3. 4. 30.	5. 19. 23.	7. 18. 31.	10. 27. 29.	12. 18. 20.
1. 21. 23.	3. 8. 25.	5. 25. 30.	7. 8. 22.	10. 25. 33.	13. 18. 25.
2. 26. 27.	3. 15. 33.	5. 24. 32.	7. 29. 33.	10. 17. 23.	13. 30. 28.
2. 21. 32.	3. 6. 13.	5. 22. 26.	7. 13. 32.	10. 18. 24.	13. 14. 28.
2. 4. 22.	3. 24. 26.	5. 7. 17.	7. 25. 26.	10. 20. 31.	13. 17. 27.
2. 14. 23.	3. 7. 23.	5. 21. 29.	7. 10. 19.	10. 13. 21.	13. 15. 29.
2. 6. 30.	3. 21. 28.	5. 16. 33.	8. 11. 16.	10. 16. 28.	13. 22. 24.
2. 9. 25.	4. 7. 9.	5. 20. 28.	8. 14. 18.	10. 22. 30.	14. 22. [illegible]
2. 10. 15.	4. 10. 12.	6. 18. 20.	8. 15. 21.	11. 17. 22.	14. [illegible]. [illegible]
2. 7. 16.	4. 13. 16.	6. 15. 17.	8. 27. 33.	11. 25. 31.	14. 19. [illegible]

25. 27.	15. 24. 28.	16. 20. 26.	17. 21. 25.	16. 25. 32.	26. 30. 31.
17. 26.	15. 16. 22.	20. 32. 33.	20. 21. 27.	19. 27. 32.	22. 27. 28.
24. 30.	15. 19. 30.	18. 30. 32.	21. 22. 33.	17. 18. 33.	
31. 27.	16. 19. 24.	18. 23. 28.	16. 23. 27.	17. 28. 29.	
20. 25.	23. 25. 29.	22. 23. 31.	19. 31. 33.	18. 22. 29.	
26. 32.	28. 30. 33.	17. 20. 30.	16. 29. 31.	18. 19. 26.	

Um leichter zu übersehen, dass alle Verbindungen zu je 2 ɪrkommen, habe ich folgendes Verfahren angewandt. Jede Verndung zu je 2 ist von einer dritten Grösse begleitet. Ich :hreibe nun alle vorkommenden Zahlen, wie im nachstehenden 'uadrate für $n = 21$ geschehen:

14	11	20	13	19	9	17	16	6	15	2	18	4	1	10	8	7	12	5	3	21
15	4	21	2	14	8	18	6	10	9	13	19	11	5	1	17	16	7	12	20	3
16	9	6	17	21	3	11	13	2	14	7	20	8	10	18	1	4	15	19	12	5
8	16	17	10	6	5	20	1	13	4	14	21	9	11	19	2	3	18	15	7	12
2	1	18	19	15	14	21	10	11	8	9	13	12	6	5	20	17	3	4	16	7
19	18	10	6	13	4	15	21	14	3	12	11	5	9	7	16	20	2	1	17	8
20	13	12	9	17	11	16	14	4	21	6	3	2	8	15	7	5	19	18	1	10
21	12	13	7	20	17	4	15	16	19	18	2	3	14	8	9	6	11	10	5	1
6	15	14	21	16	1	10	19	18	7	20	17	13	3	2	5	12	9	8	11	4
9	14	15	8	10	7	6	4	1	5	16	12	17	2	3	11	13	21	20	19	18
10	21	4	3	8	15	19	5	17	1	11	16	20	18	6	12	9	14	7	13	2
11	6	16	18	12	2	13	17	20	10	1	5	7	19	21	3	8	4	14	9	15
12	19	5	15	3	21	8	7	9	20	17	1	18	16	4	14	11	13	2	10	6
18	3	2	12	11	20	9	8	7	17	5	4	19	15	14	21	10	1	13	6	16
3	5	1	14	2	12	7	9	8	13	19	6	10	4	16	15	21	20	11	18	17
13	10	19	16	18	6	12	20	21	2	15	7	1	17	11	4	14	5	3	8	9
4	7	9	1	5	18	2	11	3	12	8	10	16	20	17	13	15	6	21	14	19
5	20	11	4	1	16	14	12	15	18	3	8	21	7	9	6	19	10	17	2	13
7	8	3	11	9	19	1	2	5	16	4	15	14	13	12	10	18	17	6	21	20
17	2	8	20	7	10	5	3	19	6	21	14	15	12	13	18	1	16	9	4	11
1	17	7	5	4	13	3	18	12	11	10	9	6	21	20	19	2	8	16	15	14

einer Diagonale der natürlichen Folge nach. Bei jeder Verbinmg zu zweien gehe ich von der einen Zahl in der Vertical- und n der andern in der Horizontalcolumne fort, bis wo die Column sich schneiden, und schreibe in dem Durchschnittsfelde die gleitende Zahl. Man sieht, dass auf diese Weise nach vollen-

deter Auflösung die eine Hälfte des Quadrats ausgefüllt sein muss, und dass jedes Feld nur eine Zahl enthalten könne. Schreibt man nun dieselben Zahlen auf dieselbe Weise in die andere Hälfte, so ergiebt sich ein magisches Quadrat, in dessen Horizontal- und Verticalreihen alle Zahlen in jeder Reihe vorkommen, und das in der Weise symmetrisch ist, dass wenn man es über die obengenannte Diagonale zusammenbiegt, es in den aufeinanderfallenden Feldern gleiche Zahlen enthält. Dasselbe Quadrat hat noch die Eigenschaft, dass wenn man durch zwei beliebige Felder z. B. 5 und 15 in der besagten Diagonale Linien in horizontaler und verticaler Richtung zieht, die Zahl, die in den beiden übrigen Durchschnitten der 4 Linien vorkommt, hier 17, in der Diagonale sucht, und ebenfalls durch dieselbe in beiden Richtungen Linien zieht: dass dann die in den 9 Durchschnitten dieser 6 Linien stehenden Zahlen ebenfalls ein magisches Quadrat bilden. Das obige Quadrat enthält also solchergestalt 70 andere magische Quadrate von 9 Feldern.

Für die Fälle $n=7$, 13, 19 habe ich ebenfalls Auflösungen gefunden, so dass ich glauben mögte, es gebe in allen Fällen, wo n von der Form $6\lambda+1$ oder $6\lambda+3$ ist, Auflösungen.

IX.

Verschiedene mathematische Bemerkungen und Aufgaben; aus einem Briefe an den Herausgeber

von

Herrn Hofrath Dr. *T. Clausen*

zu Dorpat.

---

1. Die von Ihnen im 16ten Bande des Archivs S. 204. angeführte Methode von Servois mittelst des schiefen Winkelkreuzes unzugängliche Entfernungen zu messen, lässt sich, wie mir scheint, noch vereinfachen, Hat man den Punct C (Taf. I. Fig. 1.) gefunden, in dem der Winkel ACB dem des Winkelmaasses gleich ist, so drehe man es an derselben Stelle bis es etwa nach E und D über zugängliches Feld zeigt. Man stecke die Linien CE und CD ab, und gehe auf jeder bis zu den Puncten E und D, wo die Winkel AEB und ADB dem des Winkelkreuzes gleich sind; dann ist, wie leicht zu übersehen, $DE = AB$. Ausser dem Vortheile, dass man nur eine Linie zu messen braucht, hat man noch den Vortheil, die Operation ausführen zu können, auch wenn zwischen C, D und E Hindernisse liegen, die eine Messung der Linien CE und CD nicht gestatten.

2. Auf dem beiliegenden Zettelchen*) habe ich vier verschiedene magische Quadrate geschrieben, in denen in jeder horizontalen und verticalen Reihe die Zahlen von 1 bis 6 alle vorkommen. Es wird nun gestattet in jedem Quadrate besonders die senkrechten Columnen beliebig zu verwechseln, wodurch also die Zahlen in jeder Horizontalreihe in andere Reihenfolge kommen, jedoch so, dass alle Horizontalreihen auf dieselbe Art umgestellt werden. Das so erhaltene Quadrat wird jetzt eben so in Beziehung auf die Horizontalreihen beliebig umgestellt. Es frägt sich nun, welche von den vier Quadraten lassen sich durch diese beiden Umsetzungen in eine solche Stellung bringen, dass,

---

*) M. s. unten.

wenn man sie über eine Diagonale zusammenbiegt, die aufeinanderliegenden Felder gleiche Zahlen enthalten? Welche sind auf dieselbe Weise in Beziehung auf beide Diagonalen symmetrisch? Und wie beweist man es, dass es unmöglich ist, wenn solches stattfindet?

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	4	6	2	5
4	6	5	3	1	2
5	4	6	2	3	1
6	5	2	1	4	3

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	1	2	6	4	5
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	4	5	3	1	2

1	2	3	4	5	6
2	3	4	1	6	5
3	1	5	6	2	4
4	5	6	2	1	3
5	6	1	3	4	2
6	4	2	5	3	1

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	2	6	4	1
4	6	5	2	1	3
5	4	6	1	3	2
6	3	1	5	2	4

3. Ein Tischler hat eine Tischplatte von der Form eines rechtwinkligen Parallelogramms *CDEF* (Taf. I. Fig. 2.), wovon die Hälfte *ABEF* sich über *AB* auf die andere Hälfte umklappen lässt. Das Fussgestell ist von der Form *GHJK*, und die Hälfte der Platte *ABCD* ist mit demselben in einem Punkte so verbunden, dass sie sich in der Horizontalebene frei herumdrehen lässt. Es soll nun dieser Verbindungspunkt bestimmt werden, der eine solche Lage haben muss, dass der Tisch zusammengeklappt symmetrisch auf dem Fuss ruht, und wenn man ihn aufklappt und in seiner

Ebene um eine Viertel Umdrehung dreht, die Lage in Beziehung auf den Fuss wieder symmetrisch wird.

Man verlangt die Auflösung derselben Aufgabe in Beziehung auf eine rechtwinklig gleichseitige Tischplatte ABD (Taf. I. Fig. 3.), die sich um BC zusammenklappen lässt und auf einem Fussgestell von ähnlicher Form EFG ruht, wobei ich bemerke, dass in diesem Falle die Drehung nicht einen Viertel Umfang beträgt.

X.

Vier Sätze über das rechtwinklige Dreieck.

Von
Herrn Dr. *Lilienthal*,
Director des Progymnasiums zu Rössel.

Unter den im Braunsberger Programm von 1845 gelieferten vierundfunfzig Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck führten No. 16, 17, 47 und 48 auf cubische Gleichungen. Dass die in den Grenzen der Möglichkeit liegenden Bedingungen der Natur des rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, konnte bei jenen vier Aufgaben aus Rücksicht auf Raumersparniss nur durch Ermittelung des Maximums und Minimums der betreffenden Funktionen und durch Auffinden der Wurzeln von biquadratischen Gleichungen nachgewiesen werden. Der in Hinsicht auf die Schüler angemessenere, wiewohl weitläufigere, und, ich habe Grund, hinzuzufügen, schwierigere Nachweis auf elementarem Wege folgt hier in der Form von vier Sätzen.

Bezeichnet man im rechtwinkligen Dreiecke mit c die Hypotenuse, mit a und b die Katheten, mit F den Inhalt und mit h die Höhe, und setzt $c+a=s$, $c-a=d$, dann ist:

$$\text{I.}\quad \frac{s^2}{2F} \geqq 3\sqrt{3}.$$

Beweis. Es kann $c \gtreqless 2a$ sein.

1) Ist $c = 2a$, dann ist

$$\frac{s^2}{2F} = 3\sqrt{3};$$

denn aus $c = 2a$ folgt

$$c + a = s = 3a;$$

also

$$s^2 = 9a^2 \text{ (A)}.$$

Aus $c = 2a$ folgt ferner

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Demnach ist

$$2F = ab = a^2\sqrt{3} \text{ (B)}.$$

(A) durch (B) dividirt giebt

$$\frac{s^2}{2F} = \frac{9a^2}{a^2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

2) Ist $c \gtrless 2a$, dann ist

$$\frac{s^2}{2F} > 3\sqrt{3};$$

denn aus $c \gtrless 2a$ folgt:

$$c - 2a \gtrless 0,$$

aber

$$(c - 2a)^2 = c^2 - 4ac + 4a^2 > 0.$$

Also

$$c^2 + 2ac + a^2 > 6ac - 3a^2$$

oder

$$(c + a)^2 = s^2 > 3a(2c - a) \text{ (A)}.$$

Aus $c^2 - 4ac + 4a^2 > 0$ folgt ferner

$$4c^2 - 4ac + a^2 > 3c^2 - 3a^2$$
$$> 3(c^2 - a^2)$$

oder

$$(2c - a)^2 > 3b^2,$$
$$2c - a > b\sqrt{3} \text{ (B).}$$

Aus (A) und (B) aber ergiebt sich, dass um so mehr

$$s^2 > 3ab\sqrt{3}$$

sei. Für ab gesetzt $2F$ giebt:

$$s^2 > 6F\sqrt{3}$$

oder

$$\frac{s^2}{2F} > 3\sqrt{3}.$$

$$\text{II.} \quad \frac{d^2}{2F} \gtreqless 3\sqrt{3}.$$

Beweis. Es kann $c \gtreqless 7a$ sein.

1) Ist $c = 7a$, dann ist

$$\frac{d^2}{2F} = 3\sqrt{3};$$

denn aus $c = 7a$ folgt:

$$c - a = d = 6a,$$

also

$$d^2 = 36a^2 \text{ (A).}$$

Aus $c = 7a$ folgt ferner:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{48a^2} = 4a\sqrt{3}.$$

Demnach ist

$$2F = ab = 4a^2\sqrt{3} \text{ (B).}$$

(A) durch (B) dividirt giebt

$$\frac{d^2}{2F} = \frac{36a^2}{4a^2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

2) Ist $c \gtrless 7a$, dann ist

$$\frac{d^2}{2F} \gtrless 3\sqrt{3};$$

denn aus $c \gtrless 7a$ folgt: $c-a \gtrless 6a$ und, mit $c-a$ multiplic

$$(c-a)^2 \gtrless 6a(c-a)$$

oder

$$c^2-2ac+a^2 \gtrless 6ac-6a^2,$$

also

$$c^2-8ac+7a^2 \gtrless 0$$

und

$$\frac{c^2}{4}-2ac+\frac{7a^2}{4} \gtrless 0.$$

Daraus

$$c^2-\frac{3c^2}{4}-2ac+a^2+\frac{3a^2}{4} \gtrless 0$$

oder

$$c^2-2ac+a^2 \gtrless \frac{3}{4}(c^2-a^2),$$

d. i.

$$(c-a)^2 = d^2 \gtrless \frac{3b^2}{4} \quad \text{(A)}.$$

Aus $c \gtrless 7a$ folgt ferner

$$c^2 \gtrless 49a^2 \quad \text{oder} \quad a^2+b^2 \gtrless 49a^2,$$

also

$$b^2 \lessgtr 48a^2,$$

$$b \gtrless 4a\sqrt{3}$$

und, mit b multiplicirt:

$$b^2 \gtrless 4ab\sqrt{3}$$

oder

$$\frac{3b^2}{4} \gtrless 3ab\sqrt{3} \quad \text{(B)}$$

Aus (A) und (B) aber ergiebt sich, dass um so mehr

$$d^2 \gtrless 3ab\sqrt{3}$$

sei. Für ab gesetzt $2F$ giebt

$$d^2 \gtrless 6F\sqrt{3}$$

oder

$$\frac{d^2}{2F} \gtrless 3\sqrt{3}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{s}{h} \overset{=}{>} \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

Beweis. Es kann $c \overset{=}{\gtrless} a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sein.

1) Ist $c=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dann ist

$$\frac{s}{h}=\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}};$$

denn aus

$$c=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

folgt:

$$c+a=s=a\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(A)}.$$

Aus $c=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ folgt ferner

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-a^2}=a\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-4}{4}}$$
$$=a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Demnach ist

$$h=\frac{ab}{c}=a^2\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}:a\frac{1+\sqrt{5}}{2}=a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}:\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=a\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5}}=a\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-2}{4}}$$
$$=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{(B)}.$$

(A) durch (B) dividirt giebt:

$$\frac{s}{h}=a\frac{3+\sqrt{5}}{2}:a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}:\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}}=\sqrt{\frac{(7+3\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1}}=\sqrt{\frac{22+10\sqrt{5}}{4}},$$

also

$$\frac{s}{h}=\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

2) Ist $c \gtrless a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dann ist $\frac{s}{h}>\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$; denn aus

$$c \gtrless a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

folgt

$$c-a\frac{1+\sqrt{5}}{2}\gtrless 0,$$

aber

$$(c-a\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2=c^2-ac(1+\sqrt{5})+a^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}>0.$$

Also

$$c^2+2ac+a^2>ac(3+\sqrt{5})-a^2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

oder

$$(c+a)^2>a\frac{2c(3+\sqrt{5})-a(1+\sqrt{5})}{2}$$

oder

$$c+a=s>\sqrt{a\frac{2c(3+\sqrt{5})-a(1+\sqrt{5})}{2}} \quad \text{(A).}$$

Aus $c^2-ac(1+\sqrt{5})+a^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}>0$ folgt ferner

$$c^2>ac(1+\sqrt{5})-a^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

und

$$c^3>ac^2(1+\sqrt{5})-a^2c\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(B).}$$

Auch folgt aus $c^2-ac(1+\sqrt{5})+a^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}>0$, und wenn man mit $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ multiplicirt:

$$c^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}-ac\frac{3+\sqrt{5}}{2}+a^2\frac{2+\sqrt{5}}{2}>0$$

oder

$$c^2(1+\sqrt{5})-3c^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}-ac\frac{3+\sqrt{5}}{2}+a^2\frac{2+\sqrt{5}}{2}>0;$$

also

$$c^2(1+\sqrt{5})-ac\frac{3+\sqrt{5}}{2}>3c^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}-a^2\frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

oder

$$ac^2(1+\sqrt{5})-a^2c\frac{3+\sqrt{5}}{2}>3ac^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}-a^3\frac{2+\sqrt{5}}{2}\quad \text{(C)}.$$

Aus (B) und (C) folgt, dass um so mehr

$$c^3>3ac^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}-a^3\frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

sei, also

$$c^3-3ac^2\frac{1+\sqrt{5}}{4}+a^3\frac{2+\sqrt{5}}{2}>0,$$

$$2c^3-3ac^2\frac{1+\sqrt{5}}{2}+a^3(2+\sqrt{5})>0,$$

$$2c-3a\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{a^3}{c^2}(2+\sqrt{5})>0,$$

$$2c-\frac{3a}{2}-\frac{3a\sqrt{5}}{2}+\frac{a^3}{c^2}(2+\sqrt{5})>0,$$

$$2c-\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a}{2}-2a-a\sqrt{5}+\frac{a^3}{c^2}(2+\sqrt{5})>0,$$

$$2c-\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a}{2}>2a+a\sqrt{5}-\frac{a^3}{c^2}(2+\sqrt{5}),$$

$$\begin{aligned}2c-a\frac{\sqrt{5}-1}{2}&>a(2+\sqrt{5})-\frac{a^3}{c^2}(2+\sqrt{5})\\&>\left(a-\frac{a^3}{c^2}\right)(2+\sqrt{5})\\&>a\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)(2+\sqrt{5})\\&>a\frac{c^2-a^2}{c^2}(2+\sqrt{5})\\&>\frac{ab^2}{c^2}(2+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Dieses mit $3+\sqrt{5}$ multiplicirt, giebt

$$2c(3+\sqrt{5})-a(1+\sqrt{5})>\frac{ab^2}{c^2}(11+5\sqrt{5})$$

und mit $\frac{a}{2}$ multiplicirt:

$$a\frac{2c(3+\sqrt{5})-a(1+\sqrt{5})}{2}>\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot\frac{11+5\sqrt{5}}{2};$$

und für $\frac{ab}{c}$ gesetzt h:

$$>h^2\frac{11+5\sqrt{5}}{2}.$$

Also ist

$$\sqrt{a\frac{2c(3+\sqrt{5})-a(1+\sqrt{5})}{2}}>h\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} \quad \text{(D)}.$$

Aus (A) und (D) aber folgt, dass um so mehr

$$s>h\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$$

sei, also

$$\frac{s}{h}>\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\text{IV.} \quad \frac{d}{h}\gtreqless\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

Beweis. Es kann $c\gtreqless a(2+\sqrt{5})$ sein.

1) Ist $c=a(2+\sqrt{5})$, dann ist

$$\frac{d}{h}=\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}};$$

denn aus $c=a(2+\sqrt{5})$ folgt:

$$c-a=d=a(1+\sqrt{5}) \quad \text{(A)}.$$

Aus $c=a(2+\sqrt{5})$ folgt ferner:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{a^2(9+4\sqrt{5})-a^2}=a\sqrt{8+4\sqrt{5}}=2a\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

Demnach ist

$$h=\frac{ab}{c}=2a^2\sqrt{2+\sqrt{5}}:a(2+\sqrt{5})=2a\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}}$$

$$=2a\sqrt{\frac{(2+\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{81-80}}=2a\sqrt{\sqrt{5}-2} \quad \text{(B)}.$$

(A) durch (B) dividirt, giebt

$$\frac{d}{h}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4(\sqrt{5}-2)}}=\sqrt{\frac{2(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{4(5-4)}};$$

also

$$\frac{d}{h}=\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

2) Ist $c \gtrless a(2+\sqrt{5})$, dann ist $\frac{d}{h} \gtrless \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$; denn aus $c \gtrless a(2+\sqrt{5})$ folgt:

$$c-a \gtrless a(1+\sqrt{5})$$

und, mit $c-a$ multiplicirt:

$$c^2-2ac+a^2 \gtrless ac+ac\sqrt{5}-a^2-a^2\sqrt{5},$$

also

$$c^2-3ac-ac\sqrt{5}+2a^2+a^2\sqrt{5} \gtrless 0,$$

$$c^2-ac(3+\sqrt{5})+a^2(2+\sqrt{5}) \gtrless 0.$$

Durch $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ dividirt:

$$c^2\frac{3-\sqrt{5}}{2}-2ac+a^2\frac{1+\sqrt{5}}{2} \gtrless 0$$

oder

$$c^2-2ac+a^2+c^2\frac{1-\sqrt{5}}{2}+a^2\frac{\sqrt{5}-1}{2} \gtrless 0,$$

$$c^2-2ac+a^2 \gtrless c^2\frac{\sqrt{5}-1}{2}-a^2\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$(c-a)^2 \gtrless (c^2-a^2)\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\gtrless b^2.\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

also

$$c-a=d \gtrless b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{(A)}.$$

Aus $c \gtrless a(2+\sqrt{5})$ folgt ferner

$$c^2 \gtrless a^2(9+4\sqrt{5}).$$

Dieses mit $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ multiplicirt giebt

$$c^2\frac{\sqrt{5}-1}{2} \gtrless a^2\frac{11+5\sqrt{5}}{2}.$$

Daraus folgt weiter

$$c\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \gtrless a\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}},$$

und mit $\frac{b}{c}$ multiplicirt:

$$b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \gtrless \frac{ab}{c}\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$$

oder, für $\frac{ab}{c}$ gesetzt h:

$$b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \gtrless h\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} \quad \text{(B)}.$$

Aus (A) und (B) ergiebt sich, dass um so mehr

$$d \gtrless h\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}$$

sei. Also ist

$$\frac{d}{h} \gtrless \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

Anmerkung 1. Setzt man die Bedingungen und Behauptungen in trigonometrische Funktionen um, dann lauten die vier Sätze, wenn α der Gegenwinkel von a heisst:

I. 1) Ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, dann ist

$$\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3\sqrt{3}.$$

2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{2}$, dann ist

$$\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} > 3\sqrt{3}.$$

II. 1) Ist $\sin\alpha = \frac{1}{7}$, dann ist

$$\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3\sqrt{3}.$$

2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{7}$, dann ist

$$\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} \gtrless 3\sqrt{3}.$$

III. 1) Ist $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dann ist

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dann ist

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} > \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

IV. 1) Ist $\sin\alpha = \sqrt{5}-2$, dann ist

$$\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \sqrt{5}-2$, dann ist

$$\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \gtrless \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

Die Beweise lassen sich offenbar nach Analogie der gegebenen führen; z. B.

II. 2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{7}$, dann ist

$$\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} \gtrless 3\sqrt{3}.$$

Aus $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{7}$ folgt:

$$\cos\alpha \gtrless \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

und um so mehr:

$$\cos\alpha \gtrless 4\sin\alpha\sqrt{3}.$$

Aus $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{7}$ ergiebt sich ferner:

$$1-\sin\alpha \gtrless \frac{6}{7}.$$

Mit $1-\sin\alpha$ multiplicirt:

$$(1-\sin\alpha)^2 \gtrless \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\sin\alpha$$

oder

$$1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha - \frac{6}{7} + \frac{6}{7}\sin\alpha \gtrless 0,$$

$$\frac{1}{7} - \frac{8}{7}\sin\alpha + \sin^2\alpha \gtrless 0.$$

Mit $\frac{7}{4}$ multiplicirt:

$$\frac{1}{4} - 2\sin\alpha + \frac{7}{4}\sin^2\alpha \gtrless 0,$$

$$1 - \frac{3}{4} - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha \gtrless 0,$$

$$1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha \gtrless \frac{3}{4}(1-\sin^2\alpha),$$

$$(1-\sin\alpha)^2 \gtrless \frac{3}{4}\cos^2\alpha \quad \text{(A)}.$$

Aus $\sin\alpha \lessgtr \frac{1}{7}$ folgt ferner:

$$1 \gtrless 7\sin\alpha,$$

$$1 \gtrless 49\sin^2\alpha,$$

$$1-\sin^2\alpha \gtrless 48\sin^2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha \gtrless 48\sin^2\alpha,$$

$$\cos\alpha \gtrless 4\sin\alpha\sqrt{3}.$$

Mit $\cos\alpha$ multiplicirt:

$$\cos^2\alpha \gtrless 4\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{3},$$

$$\frac{3}{4}\cos^2\alpha \gtrless 3\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{3} \quad \text{(B)}.$$

Aus (A) und (B) aber ergiebt sich, dass um so mehr

$$(1-\sin\alpha)^2 \gtrless 3\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{3}$$

sei. Also ist

$$\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} \gtrless 3\sqrt{3}.$$

Oder auch unabhängig von jenen algebraischen Beweisen, z. B.

III. 2) Ist $\sin\alpha \lessgtr \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dann ist

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} > \sqrt{\frac{11+\sqrt{5}}{2}}.$$

Aus $\sin\alpha \lessgtr \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ folgt:

$$\cos\alpha \gtrless \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \text{ d. i. } \gtrless \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Um so mehr ist also

$$\cos\alpha \gtrless \sin\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Daraus folgt

$$\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \gtrless 0,$$

aber

$$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sin^2\alpha\frac{\sqrt{5}+1}{2} > 0,$$

oder

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sin^2\alpha\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0,$$

also

$$1 > 2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - \sin^2\alpha\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{(A)}.$$

Setzt man $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$, dann ist ferner

$$\cos(\alpha-\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi = \cos\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \sin\alpha\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

oder

$$1 > \cos\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \sin\alpha \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

und

$$\sin\alpha > \sin\alpha\cos\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \sin^2\alpha \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{(B)}.$$

(A) und (B) addirt giebt

$$1 + \sin\alpha > 2\sin\alpha\cos\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sin\alpha\cos\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Also ist

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} > 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$> \sqrt{\left[2\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right]^2}$$

$$> \sqrt{\left[4 \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 4\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}}\right]}$$

$$> \sqrt{\left[\frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + 4\right]}.$$

Also

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} > \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}.$$

XI.

De integrali quodam definito.

Auctore

Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengn.

(E conspectu actorum Reg. Acad. Scient. Holm.)

Pag. CCCXL. Tomi X. praecedentis Professor Schlömilch invenit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2}}{a^2+x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-a^2b^2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^{ab}e^{-t^2}dt\right\}.$$

Quia non indicavit, quomodo id obtinuerit, duobus fere abhinc annis mihi venit in mentem in hoc integrale inquirere. Ita reperi, erratum quoddam vel scripturae vel typographicum se irrepsisse, quod legendum est $e^{+a^2b^2}$, ut mox demonstrabo. Integrale quidem ipsum reperire mihi non contigit, sed tantum in aliud transformare, quod tamen aliquanto simplicius mihi videatur quodque quadraturis computare liceat. Quia eadem ratio adhiberi potest, etiamsi exponens ipsius x est numerus integer >2, integrale generalius

$$J_n = \int_0^\infty \frac{e^{-cx^n}}{a+x^n}dx \qquad (1)$$

mihi proposui, ubi sunt a, c constantes positivae et n numerus integer $\geqq 2$.

Primum patet in promtuque est, integrale J_n esse finitum, quippe quod multo velocius decrescat quam $\int_0^\infty e^{-cx^2}dx$, quod est finitum. Sine ullo negotio eruitur, derivatam secundam

$$\int_0^\infty \frac{d^2\left(\frac{e^{-cx^n}}{a+x^n}\right)}{dc^2}dx$$

per J_n et $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ exprimi posse ob eamque caussam esse finitam, quare differentiatio sub signo $\int$ fieri possit. Ita habebimus

$$\frac{dJ_n}{dc} = -\int_0^\infty \frac{x^n e^{-cx^n}}{a+x^n} dx$$

$$= -\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{c^{\frac{1}{n}}} + aJ_n,$$

unde prodit haec aquatio differentialis linearis

$$\frac{dJ_n}{dc} - aJ_n + \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{c^{\frac{1}{n}}} = 0,$$

quae integrata dabit

$$J_n = e^{ac}\left[C - \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\int c^{-\frac{1}{n}} e^{-ac} dc\right] \qquad (2)$$

ubi est C=const. Ut constans illa determinaretur, $c=0$ pon posset in (1) et (2); at vero quum limites sint $=0$ et ∞, ita facer commodum non videtur, quamobrem valor ipsius J_n pro $c=$ sigillatim quaerendus est. Posito $x^n=y$ prodit

$$J_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{n}-1} e^{-cy}}{a+y} dy.$$

Quoniam e^{-cy} in seriem semper convergentem evolvi potest evadit

$$J_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{a+y} dy - \frac{1}{n}\mathop{S}_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \cdot c^p \int_0^\infty \frac{y^{p+\frac{1}{n}-1}}{a+y} dy.$$

Exsistente

$$\frac{y^{p+\frac{1}{n}-1}}{a+y} = \mathop{S}_{r=1}^{r=p} (-1)^{r-1} a^{r-1} y^{p+\frac{1}{n}-r-1} + (-1)^p \frac{a^p y^{\frac{1}{n}-1}}{a+y},$$

habebimus

$$c^p \int \frac{y^{p+\frac{1}{n}-1}}{a+y} dy = c^p \mathop{S}_{r=1}^{r=p} (-1)^{r-1} a^{r-1} . \frac{y^{p+\frac{1}{n}-r}}{p+\frac{1}{n}-r}$$

$$+ (-1)^p (ac)^p \int \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{a+y} dy$$

Pro $y=0$ est quoque $\dfrac{y^{p+\frac{1}{n}-r}}{p+\frac{1}{n}-r}=0$. Posito $y=\frac{1}{z}$, prodit

$$\frac{c^p y^{p+\frac{1}{n}-r}}{p+\frac{1}{n}-r}=\frac{c^{r-\frac{1}{n}}}{p+\frac{1}{n}-r}\left(\frac{c}{z}\right)^{p+\frac{1}{n}-r},$$

quod fit $=0$ pro $c=0$, $z=0$. Praeterea est

$$\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{a+y}dy=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}},$$

quod per c^p multiplicatum in nihilum abit pro $c=0$. Omnes igitur termini sub signo S pro $c=0$ evanescunt, quamobrem hoc casu evadit

$$J_n=\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{a+y}dy=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}\pi}{n\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}} \text{ (pro } c=0).$$

Quia integrale in (2) pro $c=0$ evanescit invenitur

$$C=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}\pi}{n\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}$$

et

$$J_n=e^{ac}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}-1}\pi}{n\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}-\Gamma(1+\frac{1}{n})\int_0^c t^{-\frac{1}{n}}e^{-at}\,dt\right] \qquad (3)$$

postquam t pro c sub signo S substituimus *). Itaque J_n ab alio integrali pendet, cujus tamen valor facilius inveniri possit. Functione enim e^{-at} in seriem evoluta, nullo usque negotio habemus

$$\int_0^c t^{-\frac{1}{n}}e^{-at}dt=c^{1-\frac{1}{n}}\overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)}\cdot\frac{(ac)^p}{p+1-\frac{1}{n}}. \qquad (4)$$

---

*) Si in (3) posuerimus $n=2$, $c=b^2$, $a=a^2$, $a^2t=u$, habebimus

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2}}{a^2+x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{a^2b^2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^{ab}e^{-u^2}du\right],$$

quo elucet, formulam Cl. Schlömilch veram non esse.

Quia est

$$e^{-ac} = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p (ac)^p}{\Gamma(p+1)},$$

patet, seriem inventam paullo velocius convergere quam seriem exponentialem. Convergentia hoc modo paullo major fieri potest. Posito

$$s = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p x^p}{\Gamma(p+2)}, \quad \sigma = sx = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{\Gamma(p+2)},$$

habebimus

$$\frac{d\sigma}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p x^p}{\Gamma(p+1)} = e^{-x}, \quad \sigma = K - e^{-x},$$

ubi $K =$ const. Quia est $\sigma = 0$ pro $x = 0$, sequitur, ut sit

$$K = 1, \quad \sigma = 1 - e^{-x}, \quad s = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

Substituto ac pro x in valoribus ipsius s per $c^{1-\frac{1}{n}}$ multiplicatis, hoc deinde valore ad dextrum membrum formulae (4) addito et illo ab eodem membro subtracto, habebimus

$$\int_0^c t^{-\frac{1}{n}} e^{-at} dt = c^{1-\frac{1}{n}} \left[\frac{1 - e^{-ac}}{ac} + \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+2)} \cdot \frac{(ac)^p}{n(p+1)-1} \right].$$

Posito jam

$$s = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p x^p}{\Gamma(p+3)}, \quad \sigma = sx^2 = \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p x^{p+2}}{\Gamma(p+3)},$$

duplici differentiatione et integratione eodem atque antea modo invenitur

$$\int_0^c t^{-\frac{1}{n}} e^{-at} dt = c^{1-\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{ac} - \frac{n-1}{acn} e^{-ac} + \frac{n+1}{n} \overset{p=\infty}{\underset{p=0}{S}} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+3)} \cdot \frac{(ac)^p}{n(p+1)-1} \right],$$

quae series satis bene convergit, nisi a, c sunt magnae quantitates.

Praeterea patet, integralia formae

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx^n}}{(a + x^n)^r} dx,$$

differentiatione respectu ipsius a facta, per J_n exprimi posse.

XII.

Miscellen.

Miscellanea *).

Auctore Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengn.

I. Si n, q sunt numeri integri, semper est

$$\frac{1}{q+1}-\frac{n_1}{q+2}+\frac{n_2}{q+3}-\ldots+(-1)^n\frac{n_n}{q+n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{q_1}{n+2}+\frac{q_2}{n+3}-\ldots+(-1)^q\frac{q_q}{n+q+1}.$$

II. Contiguis lateribus Trapezii in eandem rationem sectis unctisque sectionis eorum junctis, prodit parallelogrammum, cujus iagonales se mutuo secent in linea, quae conjungit puncta, ubi iagonales Trapezii in duas partes aequales divisae sint, et hanc ineam secent in eandem rationem, in quam secta sunt latera.

III. Per tria puncta data rectas ducere, quae triangulum equilaterum constituant.

IV. Si anguli et latera opposita $\Delta^i ABC$ (Tab. I. Fig. 4.) soito modo per A, B, C, a, b, c resp. denotantur, rectae per A, B, C ductae in unum idemque punctum convenire non possunt, isi anguli φ, ψ, ω satisfaciant aequationi

$$\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\psi\operatorname{Sin}\omega=\operatorname{Sin}(A-\varphi)\operatorname{Sin}(B-\psi)\operatorname{Sin}(C-\omega)$$

*) Zum Theil würde das Folgende unter die Rubrik: „Uebungsaufgaben" gehören; da aber der Herr Verfasser die Ueberschrift „Miscellanea" gewählt hat, so habe ich geglaubt, diese Rubrik beibehalten zu müssen. G.

vel partes laterum x, y, z, his angulis oppositae, satisfacian aequationi

$$xyz=(a-x)(b-y)(c-z).$$

V. Invenire φ ex aequatione

$$2(1-\operatorname{tg}\varphi)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Auszug aus einem Briefe des Herrn Director Strehlke zu Danzig an den Herausgeber.

Danzig, den 12. Juni 1853.

Seit einem Jahre haben Professor Anger und ich, jener im Local des Gymnasiums, ich in dem der Petrischule, Einrichtungen zur Anstellung des Foucaultschen Versuchs getroffen. Die Localität in der Petrischule, wo ein 30 Pariser F. langes Pendel angebracht ist, gab zu einer Beobachtung Veranlassung, von der ich nicht weiss, ob sie sonst schon gemacht ist. Das Pendel wird durch ein Fenster im Dachfirst von oben beleuchtet und der Schatten der bewegten Pendelkugel kann mit der Richtung eines horizontalen Lineals oder eines durch Gewichte über einen horizontalen Tisch in der Nähe der Kugel gespannten hellen Bandes verglichen werden; ich lege das Lineal so, dass der Schatten der bewegten Pendelkugel den Rand desselben berührt. Nach einigen Minuten sieht man dann den Schatten über den Rand des Lineals nach Osten abweichen, auf der entgegengesetzten Seite vom Lineal sich entfernen. Auf diese Weise kann sich eine Anzahl von Personen gleichzeitig von der Wahrheit der Winkeländerung in Bezug auf die Umdrehung der Erde überzeugen.

Vor längerer Zeit wurde mir eine Aufgabe vorgelegt, von der ich wohl wissen möchte, ob sie eine leichtere Lösung hat, als ich ihr bisher abgewinnen konnte.

Von einem ebenen Dreiecke (Taf. I. Fig. 5.) sind gegeben:

1) die einen Winkel A halbirende Linie $AE=k$ 2) die Höhe $BD=h$; 3) die AB in F halbirende Linie $CF=m$; man soll das Dreieck bestimmen.

Wenn ich von den Gleichungen ausgehe:

(1) $$k=\frac{2bc.\cos\frac{1}{2}A}{b+c},$$

(die aus der Proportion $c:k=BG:GC=b+c:2b\cos\frac{1}{2}A$ erhellt);

(2) $$h=c\sin A;$$

(3) $$m^2=b^2+\tfrac{1}{4}c^2-bc.\cos A$$
$$=(b+\tfrac{1}{2}c)^2-2bc.\cos\tfrac{1}{2}A^2;$$

so komme ich für $\sin\frac{1}{2}A$ auf eine Gleichung vom 6ten Grade.

Professor Richter in Elbing hat mir vor einigen Wochen 333 verbürgte Decimalen von seiner Berechnung der Zahl π übersandt, die ich Ihnen hier mittheile:

Die Zahl $\pi=$

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
69399	37510	58209	74944	59230	78164	06286	20899
86280	34825	34211	70679	82148	08651	32823	06647
09384	46095	50582	23172	53594	08128	48111	74502
84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165
27120	19091	45648	56692	34603	48610	45432	66482
13393	60726	02491	41273	72458	70066	06315	58817
48815	20920	098....					

Berichtigung.

In meinem Aufsatze über den Obelisken Thl. IX. Nr. IX. S. 84. hat sich, wie ich nachträglich gefunden habe, ein Uebereilungsfehler eingeschlichen, indem nämlich die beiden Prismen $ABHJD'E'$ und $DEKLD'E'$ durch Drehung des einen um die Linie $D'E'$ nicht unbedingt und in allen Fällen zur Deckung gebracht werden können, aus längst allgemein bekannten und oft discutirten Gründen. Indess hat dies, wie Jeder sogleich übersehen haben wird, auf den ganzen Beweis gar keinen Einfluss, da es bloss auf die Gleichheit dieser beiden Prismen ankommt, welche auf der Stelle erhellt, weil diese beiden Prismen, wie auf verschiedene Arten leicht gezeigt werden kann, gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, z. B. die gleichen Grundflächen

AJE' und ELE', in Bezug auf welche auch die Höhen der beiden Prismen gleich sind, weil die Ebenen $BCDG$ und AEF, zwischen denen die beiden Prismen liegen, einander parallel sind. Ich bitte daher, nur auf S. 84. im dritten Absatze Z. 8—Z. 11. die Worte:

„dass sie zur Deckung gebracht werden können, wobei
„man sich am besten etwa das obere Prisma um die Linie
„$D'E'$ gedreht und in das untere Prisma gelegt denkt“

durch die folgenden zu ersetzen:

„dass sie einander gleich sind, weil sie, wie auf ver-
„schiedene Arten leicht gezeigt werden kann, gleiche
„Grundflächen und Höhen haben.“

Grunert.

Druckfehler.

Thl. XIX. Heft 4. Seite 472. Z. 6 v. u. (ohne die Note) setze man „visum non est“ für „visum est.“

Theil XX. Heft 3. S. 296. Z. 7 statt „ang $\frac{1}{2}x^2$“ s. m. „tang $\frac{1}{2}x^2$“

Thl. XXI. Heft 1. Seite 1. Z. 5. vom Anfange des Aufsatzes setze man Arccos“ statt Arccos*.

XIII.

Beitrag zur Berechnung der Zahl π, welche das Verhältniss des Kreis-Durchmessers zum Umfang ausdrückt.

Von
Herrn Doctor *Lehmann*
zu Potsdam.

Nachdem das Bestreben, die Zahl π auf mehr Decimalen als vorher zu bestimmen, seit fast einem Jahrhundert geruht hatte, ist es in den letzten Jahren von Einzelnen wieder aufgenommen worden, und zwar so, dass es für das nicht-mathematische Publikum den Anschein gewinnen konnte, als sei es dabei lediglich auf einen Wetteifer abgesehen, indem immer einer den andern in weiterer Ausführung einer so langwierigen Arbeit zu übertreffen suchte. Aber die Sache hatte wohl andere Gründe. Theils lag die Veranlassung, wie bei Dahse, in der Absicht, eine blosse Rechen-Uebung anzustellen, war also psychologisch; theils wollte man diese Gelegenheit benutzen, gewisse analytische Methoden kennen zu lernen, um bei allen Arten verwickelter Rechnungen sehr versteckte Fehler zu entdecken (dies ist auch bei der gegenwärtigen Abhandlung vorwaltende Hauptrücksicht); oder man wurde von dem Gedanken geleitet, dass es schade wäre, wenn irgend eine Erfindung des menschlichen Geistes verloren ginge oder einer gewissen Abrundung entbehrte, und dass es daher wünschenswerth sei, die letzten herausgebrachten Decimalen, welche die bisherigen Berechner als unzuverlässig aufführten, ohne jedoch die Grenzen des Fehlers bestimmt anzugeben, sicher zu bestimmen (auch dies war bei der gegenwärtigen Abhandlung eine Nebenrücksicht); endlich wollte man durch die That beweisen, wie übertrieben es sei, wenn die Aufgabe, die Zahl π auf eine sehr grosse

Anzahl von Decimalen zu bestimmen, als eine äusserst langwierige und als eine Geduldsprobe verschrieen wird, deren Ausführung es nöthig mache, sich halbe Jahre lang von der Aussenwelt ganz abzuschliessen, — (man erzählt, dass der Engländer Sharp im 17ten Jahrhundert, um π auf 74 Decimalen zu finden, sich sechs Monate in einer Klause einschloss, wohin ihm das Essen nur durch eine in der Wand angebrachte Oeffnung gereicht wurde). Am wenigsten aber konnten die allmälig weiteren Ausführungen der Arbeit aus der Rücksicht auf irgend eine physicalische oder technische Anwendung hervorgehen, von welcher wir vielmehr überzeugt sein können, dass sie niemals, niemals, niemals gemacht werden wird; — wollte man den Körperinhalt einer Kugel, deren Halbmesser gleich ist einer Trillion Meilen oder gleich der Entfernung der entlegensten bisher gesehenen Nebelflecke nach Herschels Schätzung, so genau bestimmen, dass der Fehler weniger betrage als die kleinste mikroskopische Grösse, nämlich weniger als ein Würfel, dessen Kante ein Zweimilliontel-Zoll beträgt, so würde man dazu die Zahl π doch nur höchstens auf neunzig Bruchstellen gebrauchen.

Die grössere Mühe, welche man sonst auf die in Rede stehende Aufgabe verwenden musste, war wohl nur durch die unvollkommneren Methoden bedingt, indem z. B. Ludolf von Ceulen bei der Berechnung seiner 35 Decimalen nichts von den späterhin durch analytische Entwickelung gefundenen unendlichen Reihen wusste und daher Wurzelausziehungen über Wurzelausziehungen machen musste, aber auch die späteren Berechner bis zur Mitte des 18ten Jahrhunderts nicht darüber wegkamen, π durch eine einzelne unendliche Reihe auszudrücken, für welche wenigstens Eine verdriessliche Quadratwurzel-Ausziehung auf eine sehr grosse Anzahl von Decimalen nöthig war, — abgesehen davon, dass die angewandte Reihe im Vergleich zu den späterhin entdeckten schlecht convergirte. Sharp, Machin und Lagny bedienten sich der Gleichung

$$\pi = 6 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}.\left(1 - \frac{1}{3^1.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \ldots\right).$$

Diese Reihe berechnete Machin in unveränderter Gestalt bis zur 100sten Decimale; es fragt sich, wieviele Glieder dazu erforderlich waren. Die Anzahl der Glieder sei x, und es seien für jedes Glied $100+y$ Decimalen berechnet worden, so ist der grösste Fehler jedes Gliedes $= \frac{1}{10^{100+y}.2}$, also der grösste Fehler aller x Glieder zusammen $= \frac{x}{10^{100+y}.2}$, das $(x+1)$ste Glied aber ohne

Rücksicht auf das Zeichen $=\frac{\sqrt{12}}{2x+1}\cdot\frac{1}{3^x}$, also der überhaupt übrig-gebliebene grösste Fehler

$$=\frac{x}{10^{100+y}.2}+\frac{\sqrt{12}}{2x+1}\cdot\frac{1}{3^x}.$$

Wir finden also x durch die Gleichung

$$\frac{x}{10^{100+y}.2}+\frac{\sqrt{12}}{2x+1}\cdot\frac{1}{3^x}=\frac{1}{10^{100}.2},$$

woraus

$$100+y+\tfrac{1}{2}\log 48-\log(10^y-x)-\log(2x+1)=x\log 3$$

folgt. Hier ist nun der erste genäherte Werth von $x=\frac{100}{\log 3}=209{,}5\ldots$, woraus sich zugleich, da 10^y-x positiv sein muss (damit $\log(10^y-x)$ eine mögliche Grösse sei), der kleinste Werth von $y=\log 209,\ldots$, also >2, d. i. $=3$ ergiebt. Dadurch findet sich der definitive Werth von $x=206{,}0\ldots$. Es mussten also, um 100 Decimalen sicher zu haben, 207 Glieder berechnet werden, und zwar jedes auf 103 Bruchstellen.

Wollte man π nach derselben unveränderten Formel auf 127 Stellen haben, so findet sich x auf ähnliche Art $=262{,}5\ldots$. Es mussten also, um 127 Decimalen sicher zu haben, 263 Glieder und zwar jedes auf 130 Bruchstellen berechnet werden. Diese nach der 100sten folgenden 27 Decimalen nun berechnete Lagny, wie Kästner (Analysis des Unendlichen, §. 308.) sagt, durch einen noch nicht bekannten Kunstgriff, ohne dass ihm von Hause aus eine bequemere Reihe bekannt gewesen wäre. Es scheint daher, als wenn er die Reihe

$$\frac{\sqrt{12}}{3^{207}.415}\left(1-\frac{415}{417}\cdot\frac{1}{3^1}+\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{419}{421}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\right),$$

durch welche die von Machin nicht angewandten Glieder ausgedrückt werden können, in eine convergentere Reihe verwandelt habe. Zu dem Ende stellen wir uns die allgemeine Aufgabe, die Reihe

$$1\mp\frac{m}{(m+n)\,a}+\frac{m(m+2)}{(m+n)(m+n+2)a^2}\mp\frac{m(m+2)(m+4)}{(m+n)(m+n+2)(m+n+4)a^3}+\ldots,$$

worin n sehr klein gegen m, und $a>1$ ist, zu einer schnelleren Convergenz zu bringen.

Wäre $n=0$, so wäre die Reihe eine geometrische, und ihre Summe $=\frac{1}{1\pm\frac{1}{a}}$; die Reihe wird also, auch wenn n nicht 0 ist, mit $1\pm\frac{1}{a}$ multiplicirt näherungsweise 1 geben, d. h. die Reihe nimmt eine viel schnellere Convergenz an, wenn sie mit $1\pm\frac{1}{a}$ multiplicirt wird. Nachher ist sie wieder durch $1\pm\frac{1}{a}$ zu dividiren, d. h. mit $\frac{a}{a\pm1}$ zu multipliciren. Dadurch verwandelt sich die Reihe in

$$\frac{a}{a\pm1}\cdot\Big(1\pm\frac{n}{(m+n)a}\Big(1\mp\frac{m}{(m+n+2)a}+\frac{m(m+2)}{(m+n+2)(m+n+4)a^2}$$
$$\mp\frac{m(m+2)(m+4)}{(m+n+2)(m+n+4)(m+n+6)a^3}+\ldots\Big)\Big);$$

und wenn wir auf ähnliche Art mit der Verwandlung fortfahren, so wird die Reihe

$$=\frac{a}{a\pm1}\Big(1\pm\frac{n}{(m+n)(a\pm1)}\Big(1\pm\frac{n+2}{(m+n+2)a}\Big(1\mp\frac{m}{(m+n+4)a}$$
$$+\frac{m(m+2)}{(m+n+4)(m+n+6)a^2}\mp\frac{m(m+2)(m+4)}{(m+n+4)(m+n+6)(m+n+8)a^3}+\ldots\Big)\Big)\Big),$$

u. s. w., also überhaupt

$$=\frac{a}{a\pm1}\Big(1\pm\frac{n}{(m+n)(a\pm1)}+\frac{n(n+2)}{(m+n)(m+n+2)(a\pm1)^2}$$
$$\pm\frac{n(n+2)(n+4)}{(m+n)(m+n+2)(m+n+4)(a\pm1)^3}+\ldots\Big).$$

Diese Reihe convergirt viel schneller als die ursprüngliche, bis man auf ein Glied

$$a\cdot\frac{n(n+2)(n+4)\ldots.(n+2p-4)}{(m+n)(m+n+2)(m+n+4)\ldots.(m+n+2p-4)(a\pm1)^p}$$

kommt, worin $n+2p$ sehr gross gegen m ist; alsdann kann man die folgenden Glieder wieder auf ähnliche Art in die schnell convergirende Reihe

$$\frac{n(n+2)(n+4)\ldots.(n+2p-2)}{(m+n)(m+n+2)(m+n+4)\ldots.(m+n+2p-2)(a\pm1)^p}\cdot\left(1\mp\frac{m}{(m+n+2p)a}+\frac{m(m+2)}{(m+n+2p)(m+n+2p+2)a^2}\mp\ldots\ldots\right)$$

erwandeln; und so kann man denselben Verwandlungs-Prozess ortsetzen so weit man will.

Lagny mag also die Reihe

$$=\sqrt{12}\cdot\left(1-\frac{1}{3^1.3}+\frac{1}{3^2.5}-\frac{1}{3^3.7}+\ldots+\frac{1}{3^{206}.413}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3^{206}.830}\left(1+\frac{2}{417}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{6}{421}\cdot\frac{1}{4^3}+\ldots\right)$$

ıgewandt haben. Es fragt sich nun, wie viel Glieder **dieser** eihe erforderlich waren, um 127 Decimalen sicher zu haben. ie Anzahl der Glieder sei x und es seien in jedem Gliede 130 ecimalen berechnet worden, so ist der grösste Fehler jedes liedes $=\frac{1}{10^{130}.2}$, das $(x+1)$ste Glied aber

$$=-3^{-205,5}\cdot\frac{1.2.3\ldots.(x-207)}{830.834.838\ldots.(4x+2)},$$

nd die Summe aller nach dem $x$sten Gliede folgenden Glieder hne Rücksicht auf das Zeichen

$$<\frac{3^{-206,5}}{415.417}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdot\frac{4}{846}\cdots\frac{x-207}{4x+2}$$

welchen Werth man erhält, wenn man die Reihe wie eine geoıetrische summirt, deren erstes Glied $3^{-205,5}\cdot\frac{1.2.3\ldots.(x-207)}{830.834.838\ldots.(4x+2)}$, nd deren Exponent $\frac{1}{4}$ ist.) Folglich liegt der überhaupt übrig ebliebene grösste Fehler zwischen

$$\frac{x}{10^{130}.2}+\frac{3^{-205,5}}{830}\cdot\frac{1}{834}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdots\frac{x-207}{4x+2}$$

nd

$$\frac{x}{10^{130}.2}+\frac{3^{-206,5}}{415.417}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdot\frac{4}{846}\cdots\frac{x-207}{4x+2}.$$

olglich liegt x zwischen den beiden Werthen, welche durch ie Gleichungen

$$\frac{x}{10^{130}}+\frac{3^{-205,5}}{415}\cdot\frac{1}{834}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdots\frac{x-207}{4x+2}=\frac{1}{10^{127}},$$

$$\frac{x}{10^{180}}+2.\frac{3^{-206,5}}{415.417}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdot\frac{4}{846}\cdots\frac{x-207}{4x+2}=\frac{1}{10^{127}}$$

bestimmt werden. Statt dieser beiden Gleichungen können wir schreiben:

$$\frac{3^{-205,5}}{415}\cdot\frac{1}{834}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdots\frac{x-207}{4x+2}=\frac{1000-x}{10^{180}},$$

$$2.\frac{3^{-206,5}}{415.417}\cdot\frac{2}{838}\cdot\frac{3}{842}\cdot\frac{4}{846}\cdots\frac{x-207}{4x+2}=\frac{1000-x}{10^{180}}$$

oder:

$$130-\frac{411}{2}\log 3-\log 415-\log\frac{834}{1}-\log\frac{838}{2}-\log\frac{842}{3}-\ldots$$
$$\ldots-\log\frac{4x+2}{x-207}=\log(1000-x),$$

$$130-\frac{413}{2}\log 3-\log\frac{415}{2}-\log 417-\log\frac{838}{2}-\log\frac{842}{3}-\log\frac{846}{4}-\ldots$$
$$\ldots-\log\frac{4x+2}{x-207}=\log(1000-x).$$

Nun aber ist $\log 3=0{,}4771213$, also $\frac{411}{2}\log 3=98{,}04842715$ und $\frac{413}{2}\log 3=98{,}522554845$; $\log 415+\log 834=\log 346110=5{,}5392141$ und $\log\frac{415}{2}+\log 417=\log 86527{,}5=4{,}9371542$, also $130-\frac{411}{2}\log 3-\log 415-\log 834=26{,}41235875$ und $130-\frac{413}{2}\log 3-\log\frac{415}{2}-\log 417=26{,}53729735$. Die übrigen Brüche $\frac{838}{2},\frac{842}{3},\frac{846}{4}$, u. s. w. entwickeln wir in je 5 geltenden Decimalziffern und schreiben den Rest in Gestalt eines gemeinen Bruches, z. B. $\frac{874}{11}=79{,}454\frac{6}{11}$, welches bedeuten soll $\frac{79454+\frac{6}{11}}{1000}$; beim Aufschlagen der Logarithmen in 7ziffrigen Tafeln benutzen wir nicht die am Rande ausgesetzten Proportionaltheile der Differenzen, sondern interpoliren mit Hülfe der gemeinen Brüche, durch welche wir den jedesmaligen Rest ausgedrückt haben. Haben wir die Reihe $\log\frac{838}{2}+\log\frac{842}{3}+\log\frac{846}{4}+\ldots$ bis zu $\log\frac{878}{12}$ inclusive fortgesetzt, so fin-

den wir die Summe 23,5875039; hier brechen wir versuchsweise ab und subtrahiren diese Summe von den oben angeführten Werthen 26,41235875 und 26,53729735, was so viel ist, als wenn wir $x-207=12$, also $x=219$ setzen. Dann machen wir die Probe. Setzen wir nämlich $x=219$, so ist das $(x+1)$ste Glied

$$= -3^{-205,5} \cdot \frac{1.2.3....12}{830.834.838....878}$$

$$= \frac{-3^{-205,5}}{12151.19787.26291.61021.71878.9657700}.$$

Nun haben wir oben $\log(3^{205,5}) = 98,04842715$ gefunden; die Logarithmen der Factoren des Nenners, 12151, 19787, 26291, u. s. w. schlagen wir in 7ziffrigen Tafeln auf und finden so den Logar. des $(x+1)$sten Gliedes $= -127,47617525$. Da nun bei $\log 3 = 0,4771213$ der Fehler 0,00000005, also bei $\log(3^{205,5}) = 98,04842715$ der Fehler 0,000010275 betragen kann, so kann bei 127,47617525 der Fehler 0,000010575 betragen, und statt 127,47617525 ist also irgend eine zwischen 127,476164675 und 127,476185825 liegende Zahl zu setzen; folglich liegt der Log. des $(x+1)$sten Gliedes zwischen 0,523835325—128 und 0,523814175—128; das $(x+1)$ste Glied beträgt also $-3,340....$ Einheiten der 128sten Bruchstelle, und folglich das $(x+2)$te Glied $-\frac{26}{441} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3,340....$ Einheiten der 128sten Bruchstelle, die Summe aller nach dem $(x+1)$sten Gliede folgenden Glieder aber ohne Rücksicht auf das Zeichen weniger als $\frac{6}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,340....$ Einheiten der 128sten Bruchstelle. Folglich beträgt die Summe aller nach dem $x$sten Gliede folgenden Glieder zwischen 3,38 und 3,41 Einheiten der 128sten Bruchstelle; und da der grösste Fehler der x ersten Glieder zusammen 1,095 Einheiten der 128sten Bruchstelle beträgt, so beträgt der grösste Fehler, wenn man die Reihe mit dem 219ten Gliede abbricht, zwischen 4,475 und 4,505 Einheiten der 128sten Bruchstelle; wollte man aber die Reihe mit dem 218ten Gliede abbrechen, so würde (weil das 219te Glied $\frac{78}{2}$mal so gross ist als das 220ste) der Fehler mehr als 2 Einheiten der 126sten Bruchstelle betragen können. Es sind also nicht mehr und nicht weniger als 219 Glieder zu berechnen, um 127 Decimalen sicher zu haben; folglich werden durch den Kunstgriff, welchen wir für den Lagny'schen halten, 44 Glieder gespart, und der Fall, dass $n+2p$ sehr gross gegen m wird, tritt bei der Berechnung von π auf 127 Decimalen nicht ein; die Reihe bleibt bis zum 219ten Gliede viel convergenter, als sie vom 1sten zum 2ten Gliede ist.

Die eben entwickelte Rechnung, in welcher von der 263 Glieder enthaltenden Reihe die letzten 56 Glieder durch die Umwandlung der Reihe in 12 Glieder zusammengeschmolzen sind, veranlasst uns zu der Frage, ob nicht, wenn man dieselbe Umwandlung bei einem früheren oder späteren Gliede angefangen hätte, noch mehr Glieder hätten gespart werden können. Da 263:56 = 56:12 (wenigstens sehr nahe), so vermuthen wir, dass, wenn in der irgendwo abgebrochenen Reihe $\text{Arctg}\,\varphi = \varphi(1 - \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{1}{5}\varphi^4 - \ldots)$, welche q Glieder enthält, die letzten r Glieder auf die angezeigte Art in eine convergentere Reihe verwandelt werden, wenn also überhaupt die genannte Reihe in

$$\text{Arctg}\,\varphi = \varphi - \tfrac{1}{3}\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\varphi^5 - \ldots \frac{1}{2q-2r+1} \cdot \frac{\varphi^{2q-2r+1}}{1+\varphi^2}$$

$$\times\left(1 + \frac{2}{2q-2r+3} \cdot \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} + \frac{2.4}{(2q-2r+3)(2q-2r+5)} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2 + \ldots\right)$$

übergeht, diese letztere Reihe, bei dem Gliede

$$\frac{1}{2q-2r+1} \cdot \frac{\varphi^{2q-2r+1}}{1+\varphi^2}$$

$$\times \frac{2.4.6\ldots\left(\frac{2r^2}{q}-2\right)}{(2q-2r+3)(2q-2r+5)(2q-2r+7)\ldots(2q-2r+\frac{2r^2}{q}-1)} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^{\frac{r^2}{q}-1}$$

abgebrochen, $\text{Arctg}\,\varphi$ auf eben so viele Decimalen genau gebe als die Reihe $\text{Arctg}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{1}{5}\varphi^5 - \ldots \frac{1}{2q-1}\varphi^{2q-1}$. Da auf diese Art q Glieder auf $q - r + \frac{r^2}{q}$ Glieder, d. i. auf $\frac{q^2 - qr + r^2}{q}$ Glieder zusammenschmelzen, so werden wir, um die leichteste Rechnung zu haben, r so bestimmen müssen, dass $q^2 - qr + r^2$ so klein als möglich, also $\left(\frac{\partial(q^2 - qr + r^2)}{\partial r}\right) = 0$ wird; dies giebt $r = \frac{1}{2}q$ und

$$\text{Arctg}\,\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}a^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}a^{-\frac{5}{2}} - \ldots \frac{a^{\frac{1-q}{2}}}{(q+1)(a+1)} \cdot \left(1 + \frac{2}{(q+3)(a+1)}\right.$$

$$\left. + \frac{2.4}{(q+3)(q+5)(a+1)^2} + \frac{2.4.6}{(q+3)(q+5)(q+7)(a+1)^3} + \ldots\right).$$

Diese Reihe wollen wir benutzen, wenn wir statt der aus

$\pi = 6 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{3}}$ hervorgehenden einzelnen Reihe zwei bequemere Reihen anwenden, wobei die Wurzelausziehung gespart wird. Wollten wir

$$\pi = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{9.3} + \frac{1}{9^2.5} - \frac{1}{9^3.7} + \ldots\right) + \frac{4}{7}\left(1 - \frac{1}{49.3} + \frac{1}{49^2.5} - \frac{1}{49^3.7} + \ldots\right)$$

unverändert anwenden und dabei π auf 201 Decimalen *) genau haben (diese Anzahl von Ziffern setzten wir uns sogleich vor, zu berechnen, um dem Kunstgriff, welchen wir für den Lagnyschen halten, mehr Interesse zu geben; wir kannten damals nur die 140 in den älteren Ausgaben der Vega'schen Logarithmentafeln vorkommenden Stellen und wussten nichts von der Dahse'schen Rechnung und noch weniger von der Clausen'schen und Richter'schen, die erst ganz neuerlich bekannt geworden sind), so dürfte der Fehler von $\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{9.3} + \frac{1}{9^2.5} - \frac{1}{9^3.7} + \ldots\right)$ höchstens $\frac{1}{10^{201}.4}$, und der Fehler von $\frac{4}{7}\left(1 - \frac{1}{49.3} + \frac{1}{49^2.5} - \frac{1}{49^3.7} + \ldots\right)$ ebenfalls höchstens $\frac{1}{10^{201}.4}$ betragen; es wird (auf ähnliche Art wie oben) bewiesen, dass zu diesem Ende von der $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ ausdrückenden Reihe 210 Glieder, von der $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ ausdrückenden Reihe aber 118 Glieder berechnet werden müssten. Da nun 210 halbirt 105 giebt, 118 aber halbirt 59, so vermuthen wir, dass wir die Reihen durch Verwandlung am convergentesten machen, wenn wir

$$8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{9.3} + \frac{1}{9^2.5} - \frac{1}{9^3.7} + \ldots + \frac{1}{9^{104}.209}\right)$$
$$- \frac{0{,}8}{3^{209}.211}\left(1 + \frac{0{,}2}{213} + \frac{0{,}2}{213}\cdot\frac{0{,}4}{215} + \frac{0{,}2}{213}\cdot\frac{0{,}4}{215}\cdot\frac{0{,}6}{217} + \ldots\right)$$

und

$$4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7} = \frac{4}{7}\left(1 - \frac{1}{49.3} + \frac{1}{49^2.5} - \frac{1}{49^3.7} + \ldots + \frac{1}{49^{58}.117}\right)$$
$$- \frac{0{,}08}{7^{117}.119}\left(1 + \frac{0{,}04}{121} + \frac{0{,}04}{121}\cdot\frac{0{,}08}{123} + \frac{0{,}04}{121}\cdot\frac{0{,}08}{123}\cdot\frac{0{,}12}{125} + \ldots\right).$$

---

*) Man muss, um 200 Bruchstellen sicher zu haben, die Rechnung so anlegen, dass der Fehler weniger als eine halbe Einheit der 201sten Bruchstelle beträgt, weil eine Vermehrung oder Verminderung des Resultats um 4 bis 5 Einheiten der 201sten Stelle leicht die 200ste Stelle abändern könnte.

schreiben. Wir haben aber noch zu untersuchen, ob auf diese Art 8 Arctg $\frac{1}{5}$ und 4 Arctg $\frac{1}{7}$ sich in der That durch die geringste Anzahl von Gliedern berechnen lassen, oder ob zu dem Ende die Umwandlung der Reihe bei einem früheren oder späteren Gliede beginnen muss.

Die auf obige Art umgewandelte Reihe für 8 Arctg $\frac{1}{5}$ sei, um 8 Arctg $\frac{1}{5}$ auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ genau zu geben, mit dem $x$sten Gliede abzubrechen, so wird auf ähnliche Art wie oben gezeigt, dass x zwischen den beiden Werthen liegt, welche durch die Gleichungen

$$204-20{,}9.\log 59049-\log(263{,}75-\frac{1}{16}\log 65536)-\log\frac{1065}{1}$$
$$-\log\frac{1075}{2}-\log\frac{1085}{3}-\ldots.-\log\frac{10x+5}{x-105}-\log(500-x)=0, \quad (1)$$

$$204-21{,}1.\log 59049-\log(26{,}375-\frac{1}{16}\log 65536)-\log\frac{1065}{1}$$
$$-\log\frac{1075}{2}-\log\frac{1085}{3}-\ldots.-\log\frac{10x+5}{x-105}-\log(500-x)=0 \quad (2)$$

bestimmt werden. Hier werden $\log\frac{1065}{1}$, $\log\frac{1075}{2}$, $\log\frac{1085}{3}$,... auf ähnliche Art wie oben aufgeschlagen. Bedenkt man nun, dass der grösste Fehler, den man bei der einfachen Interpolation einer von log 10100 bis log 101000 reichenden Tafel siebenziffriger Logarithmen der natürlichen Zahlen begehen kann, 0,00000005053211877057 72... und also mit Berücksichtigung der nach der Interpolation abgeworfenen achten und folgenden Bruchziffern 0,0000001005321187705772... ist, während der Log. einer in 5 geltenden Ziffern ausgedruckten Zahl, welche keine Interpolation nöthig macht, nur mit einem Fehler von 0,00000005 behaftet ist; und bricht man die linke Seite der Gleichungen (1) und (2) versuchsweise erst mit $-\log\frac{1605}{55}$ $-\log(500-160)$, dann mit $-\log\frac{1615}{56}-\log(500-161)$ ab, so überzeugt man sich, dass

die linke Seite der Gleich. (1), wenn $x=160$ gesetzt wird:
$= +1{,}00332494375 \pm 0{,}00000627....$,

die linke Seite der Gleich. (2), wenn $x=160$ gesetzt wird:
$= +1{,}04908244375 \pm 0{,}00000628....$,

die linke Seite der Gleich. (1), wenn $x=161$ gesetzt wird:

$$=-0,45665955625 \pm 0,00000637....,$$

die linke Seite der Gleich. (2), wenn $x=161$ gesetzt wird:

$$=-0,41090205625 \pm 0,00000638....,$$

'o allemal nach dem Zeichen $\pm$ die übrigbleibende Ungewissheit esetzt ist. Folglich ist $x=161$, also etwas mehr als $\frac{3}{4}.210$. Vir wollen daher die Umwandlung der Reihe für 8 Arctg $\frac{1}{3}$ nun ersuchsweise bei einem anderen als dem 106ten Gliede begin. en, und zwar bei demjenigen, welches nach der Umwandlung ch zum folgenden verhält wie 834:1 (dies ist nämlich das Verıltniss, welches bei der obigen umgewandelten Reihe sich herısstellt, die wir als eine zur Bestimmung von 6 Arctg $\sqrt{\frac{1}{3}}$ auf 27 Decimalen bequeme nachgewiesen haben). Das $(x+1)$ste Glied er Reihe $\frac{8}{3}(1-\frac{1}{9.3}+\frac{1}{9^2.5}-\frac{1}{9^3.7}+....)$ ist $=\frac{8}{(2x+1).3^{2x+1}}$; es erhält sich zum folgenden wie $1:\frac{2x+1}{9(2x+3)}$, nach der Umwandıng aber wie $1:\frac{2}{10(2x+3)}=834:\frac{166,8}{2x+3}$. Soll dies Verhältniss $=834:1$ sein, so ist $2x+3=166,8$, also $x=81,9$; die Umwandıng ist also beim 83sten Gliede zu beginnen. Dann finden wir ırch ähnliche Schlüsse, dass

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=157$ gesetzt wird:

$$=+0,54288094375 \pm 0,00000729....,$$

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=157$ gesetzt wird:

$$=+0,58863844375 \pm 0,00000730....,$$

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=158$ gesetzt wird:

$$=-0,77506675625 \pm 0,00000739....,$$

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=158$ gesetzt wird.

$$=-0,72930925625 \pm 0,00000740....,$$

so $x=158=\frac{3}{4}.210$. Wenn wir noch ein Glied weiter zurückehen, also die Umwandlung beim 82sten Gliede beginnen, so ıden wir

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=157$ gesetzt wird:

$$=+0,46677954375 \pm 0,00000738....,$$

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=157$ gesetzt wird:

$$=+0,51253704375 \pm 0,00000739....,$$

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=158$ gesetzt wird:
$$= -0{,}84549105625 \pm 0{,}00000748\ldots,$$

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=158$ gesetzt wird:
$$= -0{,}79973355625 \pm 0{,}00000749\ldots,$$

also x ebenfalls $=158$. Wenn wir noch ein Glied weiter zurück gehen, so finden wir für $x=157$ und 158 die Resultate:

$$+0{,}40171684375 \pm 0{,}00000747\ldots,$$
$$+0{,}44747434375 \pm 0{,}00000748\ldots,$$
$$-0{,}90494985625 \pm 0{,}00000757\ldots,$$
$$-0{,}85919235625 \pm 0{,}00000758\ldots,$$

also x ebenfalls $=158$. Folglich ändert sich, wenn wir die Umwandlung erst beim 82sten, dann beim 83sten Gliede beginnen,

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=157$ gesetzt wird,
um $+0{,}0761014$,

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,
um $+0{,}0761014$,

die linke Seite der Gleichung (1), wenn $x=158$ gesetzt wird,
um $+0{,}0704243$,

die linke Seite der Gleichung (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,
um $+0{,}0704243$.

Wenn wir aber die Umwandlung erst beim 81sten, dann beim 82sten Gliede beginnen, so ändert sich

die linke Seite der Gleichung (1) oder (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,
um $+0{,}0650627$,

die linke Seite der Gleichung (1) oder (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,
um $+0{,}0594588$.

Wir vermuthen daher, dass, wenn wir die Umwandlung erst beim 80sten, dann beim 81sten Gliede beginnen, die linke Seite der Gleichung (1) oder (2), wenn $x=157$ gesetzt wird, sich um $+0{,}0650627+0{,}0650627-0{,}0761014=+0{,}0540244$ ändern, und dass, wenn wir die Umwandlung erst beim 79sten, dann beim 80sten Gliede beginnen, die linke Seite der Gleichung (1) oder (2), wenn $x=157$ gesetzt wird, sich um $+0{,}0540244+0{,}0540244-0{,}0650627$ $=+0{,}0429861$ ändern, u. s. w., dass also, wenn wir die Umwandlung beim 76sten Gliede beginnen, die linke Seite der Gleichung (1),

wenn $x = 157$ gesetzt wird, ihr Minimum $= +0{,}54288094375 - 0{,}0761014 - 0{,}0650627 - 0{,}0540244 - 0{,}0429861 - 0{,}0319474 - 0{,}0209087 - 0{,}0098700 = +0{,}24198024375$, und die linke Seite der Gleichung (2) ihr Minimum $= +0{,}24198024375 + \log\frac{10}{9} = +0{,}28773774375$ erreiche, dass also, wenn die Umwandlung beim 76sten Gliede beginnt, der Fehler der mit dem 157sten Gliede abgebrochenen Reihe am kleinsten und doch noch etwas grösser als $\frac{1}{10^{201}.4}$ sei. Um dies genauer zu untersuchen, ist es (weil in der Gegend des Minimums die Aenderung der linken Seite der Gleichung (1) geringer ist als der Unterschied der linken Seite der Gleichung (1) von der linken Seite der Gleichung (2), ebenso die Aenderung der linken Seite der Gleichung (2) geringer als der Unterschied der linken Seite der Gleichung (1) von der linken Seite der Gleichung (2)) nöthig, den Fehler in engere Grenzen einzuschliessen, dadurch, dass man auch noch das 159ste Glied mit berücksichtigt. Wir wollen die drei Fälle betrachten, wo die Umwandlung beim 75sten Gliede, wo sie beim 76sten und wo sie beim 77sten beginnt, um dann zu erkennen, ob sich bei der mit dem 76sten Gliede beginnenden Umwandlung das Minimum mit aller Entschiedenheit herausstellt.

Wenn die Umwandlung beim 75sten Gliede beginnt, so ist das 158ste Glied

$$= \frac{0{,}8}{3^{147}.149} \cdot \frac{0{,}2}{151} \cdot \frac{0{,}4}{153} \cdot \frac{0{,}6}{155} \cdots \frac{16{,}6}{315},$$

die Summe des 158sten und 159sten Gliedes

$$= \frac{0{,}8}{3^{147}.149} \cdot \frac{0{,}2}{151} \cdot \frac{0{,}4}{153} \cdot \frac{0{,}6}{155} \cdots \frac{16{,}6}{315}\left(1 + \frac{16{,}8}{317}\right)$$

$$= \frac{0{,}8}{3^{147}.149} \cdot \frac{0{,}2}{151} \cdot \frac{0{,}4}{153} \cdot \frac{0{,}6}{155} \cdots \frac{16{,}6}{315} \cdot \frac{333{,}8}{317},$$

und die Summe aller nach dem 157sten Gliede folgenden Glieder

$$< \frac{0{,}8}{3^{147}.149} \cdot \frac{0{,}2}{151} \cdot \frac{0{,}4}{153} \cdot \frac{0{,}6}{155} \cdots \frac{16{,}6}{315} \cdot \left(1 + \frac{10}{9} \cdot \frac{16{,}8}{317}\right),$$

d. i.

$$< \frac{0{,}8}{3^{149}.149} \cdot \frac{0{,}2}{151} \cdot \frac{0{,}4}{153} \cdot \frac{0{,}6}{155} \cdots \frac{16{,}6}{315} \cdot \frac{3021}{317}.$$

Die Summe des 159sten und 160sten Gliedes aber ist

$$=\frac{0,8}{3^{147}.149}\cdot\frac{0,2}{151}\cdot\frac{0,4}{153}\cdot\frac{0,6}{155}\cdots\frac{16,8}{317}\cdot\frac{336}{319},$$

und die Summe aller nach dem 158sten Gliede folgenden Gliedei kleiner als

$$\frac{0,8}{3^{149}.149}\cdot\frac{0,2}{151}\cdot\frac{0,4}{153}\cdot\frac{0,6}{155}\cdots\frac{16,8}{317}\cdot\frac{3041}{319}.$$

Wir werden also, indem wir übrigens die obige Entwickelung beibehalten,

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{333,8}{317}$ hinzufügen,

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{3170}{3021}$ subtrahiren,

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$\log\frac{336}{319}$ hinzufügen,

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$\log\frac{3190}{3041}$ subtrahiren,

wobei wir, wie oben, die Brüche $\frac{333,8}{317}$, $\frac{3170}{3021}$ u. s. w. in 5 gelten den Decimalziffern nebst angehängten gemeinen Brüchen entwickeln. Auf diese Art finden wir für $x=157$ und 158 die Resultate:

$+0,26548444375\pm0,00000807\ldots$
$+0,26790624375\pm0,00000808\ldots$
$-1,00887605625\pm0,00000817\ldots$
$-1,00644145625\pm0,00000818\ldots$

Wenn aber die Umwandlung beim 76sten Gliede beginnt, so haben wir

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{333,6}{317}$ hinzuzufügen,

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{3170}{3019}$ zu subtrahiren,

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$$\log \frac{335{,}8}{319} \text{ hinzuzufügen,}$$

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$$\log \frac{3190}{3039} \text{ zu subtrahiren.}$$

Das giebt die Resultate:

$$+0{,}26405974375 \pm 0{,}00000798\ldots$$
$$+0{,}26645424375 \pm 0{,}00000799\ldots$$
$$-1{,}01550025625 \pm 0{,}00000808\ldots$$
$$-1{,}01309295625 \pm 0{,}00000809\ldots$$

Wir sehen, dass wir hier, um den Fehler in gehörig enge Grenzen einzuschliessen, noch ein Glied weiter gehen müssen.

Wenn die Umwandlung beim 75sten Gliede beginnt, so ist der obige Factor $1+\frac{16{,}8}{317}$ in $1+\frac{16{,}8}{317}\cdot\left(1+\frac{17}{319}\right)$, der Factor $1+\frac{10}{9}\cdot\frac{16{,}8}{317}$ in $1+\frac{16{,}8}{317}+\frac{10}{9}\cdot\frac{16{,}8}{317}\cdot\frac{17}{319}$, der Factor $1+\frac{17}{319}$ in $1+\frac{17}{319}\cdot\left(1+\frac{17{,}2}{321}\right)$, und der Factor $1+\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{319}$ in $1+\frac{17}{319}+\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{319}\cdot\frac{17{,}2}{321}$ zu verwandeln. Wir haben also

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$$\text{nicht } \log\frac{333{,}8}{317}, \text{ sondern } \log\frac{106767{,}8}{101123} \text{ hinzuzufügen,}$$

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$$\text{nicht } \log\frac{3170}{3021}, \text{ sondern } \log\frac{5056150}{4805979} \text{ zu subtrahiren,}$$

zur linken Seite der Gleich. (1), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$$\text{nicht } \log\frac{336}{319}, \text{ sondern } \log\frac{108148{,}4}{102399} \text{ hinzuzufügen,}$$

von der linken Seite der Gleich. (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$$\text{nicht } \log\frac{3190}{3141}, \text{ sondern } \log\frac{1023990}{973628} \text{ zu subtrahiren.}$$

Das giebt die Resultate:

$$+0{,}26664774375 \pm 0{,}00000807\ldots$$
$$+0{,}26677674375 \pm 0{,}00000808\ldots$$
$$-1{,}00770025625 \pm 0{,}00000817\ldots$$
$$-1{,}00756985625 \pm 0{,}00000818\ldots$$

Jetzt können wir also die Gleichungen (1) und (2) so weit für gleichbedeutend halten, dass wir sagen: Wenn die Umwandlung beim 75sten Gliede beginnt, so ist die linke Seite der auf 0 gebrachten x bestimmenden Gleichung, wenn $x=157$ gesetzt wird, $=+0{,}266....$, und, wenn $x=158$ gesetzt wird, $=-1{,}007....$

Wenn aber die Umwandlung beim 76sten Gliede beginnt, so haben wir

zur linken Seite der Gleichung (1), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{106697{,}28}{101123}$ hinzuzufügen,

von der linken Seite der Gleichung (2), wenn $x=157$ gesetzt wird,

$\log\frac{1264037{,}5}{1200693}$ zu subtrahiren,

zur linken Seite der Gleichung (1), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$\log\frac{36025{,}8}{34133}$ hinzuzufügen,

von der linken Seite der Gleichung (2), wenn $x=158$ gesetzt wird,

$\log\frac{1706650}{1621637}$ zu subtrahiren.

Das giebt die Resultate:

$$+0{,}265196343 75\pm 0{,}00000798....$$
$$+0{,}26532244375\pm 0{,}00000799....$$
$$-1{,}01435105625\pm 0{,}00000808....$$
$$-1{,}01422355625\pm 0{,}00000809....$$

Die linke Seite der auf 0 gebrachten x bestimmenden Gleichung ist also, wenn $x=157$ gesetzt wird, $=+0{,}265....$, und, wenn $x=158$ gesetzt wird, $=-1{,}014....$

Wenn endlich die Umwandlung beim 77sten Gliede beginnt, so ist respective $\log\frac{106626{,}84}{101123}$ hinzuzufügen, $\log\frac{5056150}{4799569}$ zu subtrahiren, $\log\frac{36002{,}16}{34133}$ hinzuzufügen, und $\log\frac{853325}{810281}$ zu subtrahiren. Das giebt die Resultate:

$$+0{,}27480024375\pm 0{,}00000789....$$
$$+0{,}27492344375\pm 0{,}00000790....$$
$$-1{,}01000965625\pm 0{,}00000799....$$
$$-1{,}00988505625\pm 0{,}00000800....$$

Die linke Seite der x bestimmenden Gleichung ist also, wenn $x=157$ gesetzt wird, $=+0{,}274....$, und, wenn $x=158$ gesetzt wird, zwischen $-1{,}0100....$ und $-1{,}0098....$

Aus allem diesem geht hervor, dass, wenn die Umwandlung beim 76sten Gliede beginnt, die linke Seite der auf 0 gebrachten x bestimmenden Gleichung, wenn $x=157$ gesetzt wird, ihr Minimum $=+0{,}266....$ erreicht, und, wenn $x=158$ gesetzt wird, ihr negatives Maximum $=-1{,}014....$ erreicht, dass es also nicht möglich ist, durch einmalige Umwandlung der Reihe

$$\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{9.3}+\frac{1}{9^2.5}-\frac{1}{9^3.7}+.....\right)$$

den Werth von $8\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{3}$ vermittelst weniger als 158 Glieder auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ zu berechnen, und dass die geringste Anzahl der dazu erforderlichen Glieder statt findet, wenn die Umwandlung beim 76. Gliede beginnt. Hat man die Umwandlung beim 76. Gliede begonnen, so entsteht das 158. Glied aus dem 157. durch Multiplication mit $\frac{164}{315}\cdot\frac{1}{10}$, d. i. mit $\frac{1}{19{,}2....}$; wollte man also beim 157. Gliede eine zweite Umwandlung auf die oben angezeigte Art beginnen, so würde das 158. Glied aus dem 157. durch Multiplication mit $\frac{315-164}{315}\cdot\frac{1}{9}$ entstehen, d. i. durch Multiplication mit $\frac{1}{18{,}7....}$; die Convergenz würde also, anstatt verstärkt, vermindert werden; vielmehr drückt die Multiplication mit $\frac{1}{19{,}2....}$ immer noch eine stärkere Convergenz aus, als vom 2ten zum 3ten Gliede statt findet. Es ist also überhaupt nicht möglich, $8\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{3}$ durch weniger als 158 Glieder auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ zu berechnen.

Da $75=\frac{5}{14}.210$, so vermuthen wir, dass $4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{7}$ sich durch die geringste Anzahl von Gliedern berechnen lasse, wenn wir von der Reihe $\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{49.3}+\frac{1}{49^2.5}-\frac{1}{49^3.7}+....\right)$ nur $\frac{5}{14}.118$, d. i. 42 Glieder unverändert lassen und beim 43. Gliede die Umwandlung beginnen, also $4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{7}=\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{49.3}+\frac{1}{49^2.5}-\frac{1}{49^3.7}+....-\frac{1}{49^{41}.83}\right)$

$$+\frac{0{,}08}{7^{83}.85}\left(1+\frac{0{,}04}{87}+\frac{0{,}04}{87}\cdot\frac{0{,}08}{89}+\frac{0{,}04}{87}\cdot\frac{0{,}08}{89}\cdot\frac{0{,}12}{91}+......\right)$$ schreiben.

Diese Reihe sei, um $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ auszudrücken, beim $x$sten Gliede abzubrechen, so ist das $(x+1)$ste Glied $=\frac{0{,}08}{7^{83}.85}\cdot\frac{1}{2175}\cdot\frac{2}{2225}\cdot\frac{3}{2275}\cdots\frac{x-42}{50x+25}$; nehmen wir aber noch die beiden folgenden Glieder hinzu, so können wir sagen, die Summe aller nach dem $x$sten Gliede folgenden Glieder sei

$$>\frac{0{,}08}{7^{83}.85}\cdot\frac{1}{2175}\cdot\frac{2}{2225}\cdot\frac{3}{2275}\cdots\frac{x-42}{50x+25}\left(1+\frac{x-41}{50x+75}\left(1+\frac{x-40}{50x+125}\right)\right),$$

aber

$$<\frac{0{,}08}{7^{83}.85}\cdot\frac{1}{2175}\cdot\frac{2}{2225}\cdot\frac{3}{2275}\cdots\frac{x-42}{50x+25}\left(1+\frac{x-41}{50x+75}\left(1+\frac{50}{49}\cdot\frac{x-40}{50x+125}\right)\right),$$

d. i.

$$>\frac{8}{7^{83}.5312500}\cdot\frac{2551x^2+7994x+5890}{(2x+3)(2x+5)}\cdot\frac{1}{2175}\cdot\frac{2}{2225}\cdot\frac{3}{2275}\cdots\frac{x-42}{50x+25}$$

und

$$<\frac{1}{7^{85}.5312{,}5}\cdot\frac{1000x^2+3133x+2322}{(2x+3)(2x+5)}\cdot\frac{1}{2175}\cdot\frac{2}{2225}\cdot\frac{3}{2275}\cdots\frac{x-42}{50x+25}.$$

Folglich liegt x zwischen den beiden Werthen, welche durch die Gleichungen

$$204-16{,}6.\log 16807-\left(\log 5312500-\frac{1}{4}\log 65536\right)$$
$$+\log\frac{2551x^2+7994x+5890}{(2x+3)(2x+5)}-\log\frac{2175}{1}-\log\frac{2225}{2}-\log\frac{2275}{3}-\ldots$$
$$\ldots-\log\frac{50x+25}{x-42}-\log(500-x)=0$$

und

$$204-17\log 16807-\left(\log 5312{,}5-\frac{1}{16}\log 65536\right)$$
$$+\log\frac{1000x^2+3133x+2322}{(2x+3)(2x+5)}-\log\frac{2175}{1}-\log\frac{2225}{2}-\log\frac{2275}{3}-\ldots$$
$$\ldots-\log\frac{50x+25}{x-42}-\log(500-x)=0$$

bestimmt werden. Summirt man $\log\frac{2175}{1}+\log\frac{2225}{2}+\log\frac{2275}{3}+\ldots$ bis zu $\log\frac{4425}{46}$ (was so viel heisst als $x=88$ setzen; man be-

rücksichtige, dass $88 = \frac{3}{4}.118$ ist), so zeigt die numerische Ausführung, dass man weit davon entfernt ist, die linke Seite der x bestimmenden Gleichungen $= 0$ zu haben, und dass zu diesem Zwecke x weit grösser als 88 zu setzen ist. Wir vermuthen daher, dass die kleinste Anzahl der Glieder, welche erforderlich sind um $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ auszudrücken, **nicht** bei der mit dem 43sten Gliede beginnenden Umwandlung stattfindet. Wir versuchen daher, anstatt $\frac{5}{14}.118$, $\frac{1}{2}.118$, d. i. 59 Glieder unverändert zu lassen und also die Umwandlung beim 60sten Gliede anzufangen. Hierbei ist das $(x+1)$ste Glied der umgewandelten Reihe $= \frac{0{,}08}{7^{117}.119} \cdot \frac{1}{3025} \cdot \frac{2}{3075} \cdot \frac{3}{3125} \cdots \frac{x-59}{50x+25}$, folglich die Summe aller nach dem $x$sten Gliede folgenden Glieder

$$> \frac{0{,}08}{7^{117}.119} \cdot \frac{1}{3025} \cdot \frac{2}{3075} \cdot \frac{3}{3125} \cdots \frac{x-59}{50x+25}\left(1 + \frac{x-58}{50x+75}\left(1 + \frac{x-57}{50x+125}\right)\right),$$

aber

$$< \frac{0{,}08}{7^{117}.119} \cdot \frac{1}{3025} \cdot \frac{2}{3075} \cdot \frac{3}{3125} \cdots \frac{x-59}{50x+25}\left(1 + \frac{x-58}{50x+75}\left(1 + \frac{50}{49} \cdot \frac{x-57}{50x+125}\right)\right),$$

d. i.

$$> \frac{8}{7^{117}.7437500} \cdot \frac{2551x^2+7110x+5431}{(2x+3)(2x+5)} \cdot \frac{1}{3025} \cdot \frac{2}{3075} \cdot \frac{3}{3125} \cdots \frac{x-59}{50x+25}$$

und

$$< \frac{2}{7^{119}.74375} \cdot \frac{5000x^2+13931x+10777}{(2x+3)(2x+5)} \cdot \frac{1}{3025} \cdot \frac{2}{3075} \cdot \frac{3}{3125} \cdots \frac{x-59}{50x+25}.$$

Folglich liegt x zwischen den beiden Werthen, welche durch die Gleichungen

$$204 - 23{,}4 . \log 16807 - \left(\log 7437500 - \frac{1}{4} \log 65536\right)$$
$$+ \log \frac{2551x^2+7110x+5431}{(2x+3)(2x+5)} - \log \frac{3025}{1} - \log \frac{3075}{2} - \log \frac{3125}{3} - \ldots$$
$$\ldots - \log \frac{50x+25}{x-59} - \log (500-x) = 0,$$

$$204 - 23{,}8 . \log 16807 - \left(\log 74375 - \frac{1}{8} \log 65536\right)$$
$$+ \log \frac{5000x^2+13931x+10777}{(2x+3)(2x+5)} - \log \frac{3025}{1} - \log \frac{3075}{2} - \log \frac{3125}{2} - \ldots$$
$$\ldots - \log \frac{50x+25}{x-59} - \log (500-x) = 0$$

bestimmt werden. Aber auch hier zeigt sich's, dass x weit grösser als 88 zu setzen ist; wir fahren also in der Summirung der Reihe $\log\frac{3025}{1}+\log\frac{3075}{2}+\log\frac{3125}{3}+\ldots$ fort und finden für $x=100$ und $x=101$ die Resultate:

$$\begin{array}{l} +1{,}5794086695 \pm 0{,}00000484\ldots \\ +1{,}57940932275 \pm 0{,}00000486\ldots \\ -0{,}501640905 \pm 0{,}00000494\ldots \\ -0{,}5016402725 \pm 0{,}00000496\ldots \end{array}$$

Folglich ist $x=101$.

Wenn wir die Verwandlung nun wieder beim 43sten Gliede beginnen, so finden wir für $x=100$ und $x=101$ die Resultate:

$$\begin{array}{l} +1{,}3570167555 \pm 0{,}00000637\ldots \\ +1{,}357017893375 \pm 0{,}00000638\ldots \\ -0{,}576444245 \pm 0{,}00000647\ldots \\ -0{,}57644310625 \pm 0{,}00000648\ldots \end{array}$$

Folglich ist x auch hier $=101$.

Es ist daher zu vermuthen, dass x am kleinsten werde, wenn wir die Umwandlung mit dem $\frac{43+60}{2}$ten, d. i. mit dem 51sten Gliede beginnen. Hierbei ist das $(x+1)$ste Glied der umgewandelten Reihe $=\frac{0{,}88}{7^{99}.101}\cdot\frac{1}{2575}\cdot\frac{2}{2625}\cdot\frac{3}{2675}\cdots\frac{x-50}{50x+25}$, also die Summe aller nach dem $x$sten Gliede folgenden Glieder

$$>\frac{0{,}08}{7^{99}.101}\cdot\frac{1}{2575}\cdot\frac{2}{2625}\cdot\frac{3}{2675}\cdots\frac{x-50}{50x+25}\left(1+\frac{x-49}{50x+75}\left(1+\frac{x-48}{50x+125}\right)\right),$$

aber

$$<\frac{0{,}08}{7^{99}.101}\cdot\frac{1}{2575}\cdot\frac{2}{2625}\cdot\frac{3}{2675}\cdots\frac{x-50}{50x+25}\left(1+\frac{x-49}{50x+75}\left(1+\frac{50}{49}\cdot\frac{x-48}{50x+125}\right)\right),$$

d. i.

$$>\frac{8}{7^{99}.6312500}\cdot\frac{2551x^2+7578x+5602}{(2x+3)(2x+5)}\cdot\frac{1}{2575}\cdot\frac{2}{2625}\cdot\frac{3}{2675}\cdots\frac{x-50}{50x+25}$$

und

$$<\frac{2}{7^{101}.63125}\cdot\frac{5000x^2+14849x+11074}{(2x+3)(2x+5)}\cdot\frac{1}{2575}\cdot\frac{2}{2625}\cdot\frac{3}{2675}\cdots\frac{x-50}{50x+25}.$$

Folglich liegt x zwischen den beiden Werthen, welche durch die Gleichungen

$$204 - 19{,}8 . \log 16807 - \left(\log 6312500 - \frac{1}{4}\log 65536\right)$$

$$+ \log\frac{2551x^2 + 7578x + 5602}{(2x+3)(2x+5)} - \log\frac{2575}{1} - \log\frac{2625}{2} - \log\frac{2675}{3} - \ldots$$

$$\ldots - \log\frac{50x+25}{x-25} - \log(500-x) = 0,$$

$$204 - 20{,}2 . \log 16807 - \left(\log 63125 - \frac{1}{8}\log 65536\right)$$

$$+ \log\frac{5000x^2 + 14849x + 11074}{(2x+3)(2x+5)} - \log\frac{2575}{1} - \log\frac{2625}{2} - \log\frac{2675}{3} - \ldots$$

$$\ldots - \log\frac{50x+25}{x-50} - \log(500-x) = 0$$

bestimmt werden. Wir finden für $x=100$ und $x=101$ die Resultate:

$$+0{,}836225915 \pm 0{,}00000582\ldots$$
$$+0{,}8362266475 \pm 0{,}00000584\ldots$$
$$-1{,}160510285 \pm 0{,}0000059259\ldots$$
$$-1{,}1605095525 \pm 0{,}000005939\ldots,$$

also die linke Seite der x bestimmenden Gleichung, wenn $x=100$ gesetzt wird, $= +0{,}8362\ldots$, und, wenn $x=101$ gesetzt wird, $= -1{,}1605\ldots$.

Für $x=100$ ist also,

wenn wir die Verwandlung mit dem 43sten Gliede beginnen, die linke Seite der x bestimmenden Gleichung $= +1{,}3570\ldots$

wenn wir die Verwandlung mit dem 51sten Gliede beginnen, die linke Seite der x bestimmenden Gleichung $+0{,}8362\ldots$

wenn wir die Verwandlung mit dem 60sten Gliede beginnen, die linke Seite der x bestimmenden Gleichung $+1{,}5794\ldots$

Wir vermuthen daher, dass für $x=100$, wenn wir die Verwandlung mit dem $r$ten Gliede beginnen, die linke Seite der x bestimmenden Gleichung $= +0{,}8362\ldots + \varepsilon(r-51) + \zeta(r-51)^2$ sei, wo ε und ζ durch die Gleichungen

$$+0{,}8362\ldots + \varepsilon(43-51) + \zeta(43-51)^2 = +1{,}3570\ldots$$
$$+0{,}8362\ldots + \varepsilon(60-51) + \zeta(60-51)^2 = +1{,}5794\ldots$$

bestimmt werden. Ist dies der Fall, so findet für $x=100$ das Minimum der linken Seite der x bestimmenden Gleichung statt,

wenn die Umwandlung beim 51sten Gliede beginnt. Um dies genauer zu untersuchen, haben wir noch für $x=100$ und $x=101$ die linke Seite der x bestimmenden Gleichung streng zu berechnen, wenn die Umwandlung beim 50sten und wenn sie beim 52sten Gliede beginnt.

Statt des Bruches $\frac{2551x^2+7578x+5602}{(2x+3)(2x+5)}$, welcher angewandt wurde, als die Umwandlung beim 51sten Gliede begann, haben wir, wenn sie beim 50sten Gliede beginnt, $\frac{2551x^2+7630x+5631}{(2x+3)(2x+5)}$, und, wenn sie beim 52sten Gliede beginnt, $\frac{2551x^2+7526x+5575}{(2x+3)(2x+5)}$ zu schreiben, statt des Bruches $\frac{5000x^2+14849x+11074}{(2x+3)(2x+5)}$ aber respective $\frac{5000x^2+14951x+11127}{(2x+3)(2x+5)}$ und $\frac{5000x^2+14747x+11025}{(2x+3)(2x+5)}$. Die Veränderungen, welche hiernach mit den x bestimmenden Gleichungen vorzunehmen sind, wollen wir Kürze halber übergehen, da Jeder sie leicht selbst wird vornehmen können, und wir schreiben nur noch die Resultate hin:

$+0{,}840503395 \pm 0{,}0000059059\ldots$	$+0{,}849234835 \pm 0{,}0000058016\ldots$
$+0{,}8405043275 \pm 0{,}000005919\ldots$	$+0{,}8492356675 \pm 0{,}0000058154\ldots$
$-1{,}147800405 \pm 0{,}0000060064\ldots$	$-1{,}15610067125 \pm 0{,}0000058516\ldots$
$-1{,}1477995725 \pm 0{,}000006020\ldots$	$-1{,}15609983875 \pm 0{,}0000058654\ldots$

Folglich ist, wenn die Umwandlung mit dem 50., 51. und 52. Gliede beginnt, die linke Seite der x bestimmenden Gleichung:

für $x=100$:	$+0{,}840\ldots$	$+0{,}8362\ldots$	$+0{,}8492\ldots$
und für $x=101$:	$-1{,}147\ldots$	$-1{,}1605\ldots$	$-1{,}156\ldots$

Folglich findet, wenn die Umwandlung mit dem 51sten Gliede beginnt, für $x=100$ das Minimum der linken Seite der auf 0 gebrachten x bestimmenden Gleichung statt, und für $x=101$ das negative Maximum. Es ist also nicht möglich, durch einmalige Umwandlung der Reihe

$$\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{49.3}+\frac{1}{49^2.5}-\frac{1}{49^3.7}+\ldots\right)$$

den Werth von $4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{7}$ vermittelst weniger als 101 Glieder bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ zu berechnen, und die geringste An-

ahl der dazu erforderlichen Glieder findet statt, wenn die Umwandlung mit dem 51sten Gliede beginnt. Hat man die Umwandlung beim 51sten Gliede begonnen, so entsteht das 101ste Glied aus dem 00sten durch Multiplication mit $\frac{100}{201}\cdot\frac{1}{50}$; da nun der Zähler 100 kleiner ist als der Nenner 201, so würde, wenn man beim 100sten Gliede eine zweite Umwandlung auf die oben angezeigte Art beginnen wollte, die Convergenz, anstatt verstärkt, vermindert werden; vielmehr drückt die Multiplication mit $\frac{100}{201}\cdot\frac{1}{50}$ immer noch eine stärkere Convergenz aus, als vom 2ten zum 3ten Gliede stattfindet. Es ist also überhaupt nicht möglich, 4 Arctg$\frac{1}{7}$ durch weniger als 101 Glieder bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ zu berechnen.

So lässt sich π durch die Gleichung

$$\pi=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{9.3}+\frac{1}{9^2.5}-\frac{1}{9^3.7}+\dots+\frac{1}{9^{74}.149}\right)$$
$$-\frac{0{,}8}{3^{149}.151}\left(1+\frac{0{,}2}{153}+\frac{0{,}2}{153}\cdot\frac{0{,}4}{155}+\frac{0{,}2}{153}\cdot\frac{0{,}4}{155}\cdot\frac{0{,}6}{157}+\dots\right)$$
$$+\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{49.3}+\frac{1}{49^2.5}-\frac{1}{49^3.7}+\dots-\frac{1}{49^{49}.99}\right)$$
$$+\frac{0{,}08}{7^{99}.101}\left(1+\frac{0{,}04}{103}+\frac{0{,}04}{103}\cdot\frac{0{,}08}{105}+\frac{0{,}04}{103}\cdot\frac{0{,}08}{105}\cdot\frac{0{,}12}{107}+\dots\right)$$

ermittelst 259 Glieder so genau berechnen, dass der Fehler weniger als eine halbe Einheit der 201sten Bruchstelle beträgt, vorausgesetzt, dass man jedes Glied so genau berechnet, dass der Fehler weniger als eine halbe Einheit der 204ten Bruchstelle beträgt.

Das glückliche Fortschreiten und die Sicherheit dieser Rechnung ist nur durch unablässige Controllen erreichbar. Das erste Glied bildet die Periode 2,666...., das 159ste aber die Periode 571428571428.... Das Dreifache des 2ten Gliedes, das Fünffache des 3ten, das Siebenfache des 4ten, u. s. w., werden durch continuirliche Division mit 9, das Dreifache des 160sten, das Fünffache des 161sten, das Siebenfache des 162sten .... aber durch continuirliche Division mit 49 gefunden, welche letztere am schnellsten von statten geht, wenn man stetige Mittelglieder berechnet, also continuirlich durch 7 dividirt. Jede Division mit 9 ist auf der Stelle zu controlliren, dadurch, dass man, ohne etwas aufzuschreiben, Dividendus und Quotient addirt und die einzelnen Ziffern der Summe in Gedanken eine Stelle weiter rechts rückt, wodurch

man den Quotienten wieder erhalten muss. Jede Division mit 49 aber wird (gleichfalls ohne etwas aufzuschreiben) controllirt, indem man Dividendus und Quotient addirt und die einzelnen Ziffern der Summe in Gedanken 2 Stellen weiter rechts rückt, wodurch man die Hälfte des Quotienten erhalten muss. Was die Controllen der Divisionen mit 3, 5, 7,.... betrifft, so wird erstlich die Division mit 3 durch eine nochmalige Division mit 3 controllirt, nach welcher dann die für die Division mit 9 angeführte Controlle anzuwenden ist; die Division mit 5 ist erstlich direct auszuführen, dann in Gedanken durch die Multiplication mit 2 und Rückung der einzelnen Ziffern dieses Doppelten um eine Stelle rechts zu controlliren; die Division mit 7 controllirt man durch eine nochmalige Division mit 7, nach welcher dann die für die Division mit 49 angeführte Controlle anzuwenden ist; die Division mit 11 dadurch, dass man den Quotienten vom Dividendus subtrahirt und die einzelnen Ziffern des Restes eine Stelle weiter rechts rückt; unter den Divisoren 13, 15, 17,.... ist jedesmal derjenige, welcher keine Primzahl, auch nicht das Quadrat einer Primzahl ist, in 2 ungleiche Factoren a und b zu zerfällen, und die Division einmal erst durch a, dann durch b, ein andermal erst durch b, dann durch a zu vollziehen; ist aber der Divisor eine Primzahl oder das Quadrat einer Primzahl, so ist der Quotient zum Dividendus zu addiren oder von ihm zu subtrahiren und das Resultat durch den um 1 vermehrten (respective verminderten) Divisor zu dividiren, welche letztere Division dann leicht durch Zerfällung des Divisors in 2 oder mehrere Factoren (die man aber hier nicht in verschiedener Ordnung zu probiren braucht) auszuführen ist. Einfachere Controllen ergeben sich in speciellen Fällen leicht; z. B. die Division durch 99, obgleich 99 weder eine Primzahl noch das Quadrat einer Primzahl ist, controllirt sich am leichtesten, wenn man Dividendus und Quotient addirt. Das 76ste Glied entsteht aus dem 149fachen des 75sten durch Divison mit 1510, und das 209te Glied aus dem 99fachen des 208ten durch Division mit 5050; man hat also respective durch 151 und durch 505 zu dividiren (wobei sich die Controllen aus dem Obigen von selbst ergeben) und den Quotienten eine Stelle weiter rechts zu rücken. Das 77ste Glied ist aus dem 76sten, das 78ste aus dem 77sten .... continuirlich zu berechnen; hierbei ist es am einfachsten, von jedem Multiplicator oder Divisor, dessen Vielfache man nicht auswendig weiss, das Einfache, Zweifache .... bis zum Neunfachen auf einem Nebenblättchen unter einander zu schreiben (und zwar durch continuirliche Addition des Einfachen, wobei zuletzt das Zehnfache, das man durch Addition des Einfachen zum Neunfachen in Gedanken findet, als Controlle dient); der Anblick

dieses Schemas wird dazu dienen, das verlangte Product von der Rechten zur Linken oder den Quotienten von der Linken zur Rechten sogleich hinschreiben zu können; die Controlle geschieht dadurch, dass man zwischen jedem Gliede der Reihe und dem nächstfolgenden 2 Mittelglieder berechnet; soll das Glied B aus dem Gliede A durch Multiplication mit $\frac{a}{b}$ entstehen, so berechnet man erst Aa und dividirt dann durch b; dann berechnet man $\frac{A}{b}$ (und zwar schreibt man Aa unter A, $\frac{A}{b}$ unter Aa, $\frac{Aa}{b}$ unter $\frac{A}{b}$, und trennt Aa von A, desgleichen $\frac{Aa}{b}$ von $\frac{A}{b}$ durch einen horizontalen Strich, um nachher die zu addirenden Glieder der Reihe leichter zu übersehen), und multiplicirt dann, ohne etwas aufzuschreiben, $\frac{A}{b}$ mit a, wodurch man wiederum $\frac{Aa}{b}$ oder das Glied B erhalten muss. Die horizontalen Striche werden, der leichteren Uebersicht wegen, von senkrechten Strichen durchschnitten, zwischen denen sich je 6 Decimal-Columnen befinden. Solche horizontale und senkrechte Striche sind auch bei Berechnung der einzelnen Glieder der unverwandelten Reihe

$$\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{9.3}+\frac{1}{9^2.5}-\frac{1}{9^3.7}+\ldots\right) \text{ und } \frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{49.3}+\frac{1}{49^2.5}-\frac{1}{49^3.7}+\ldots\right)$$

anzuwenden, und zwar hat man die Horizontalstriche unter die Glieder

$$\frac{8}{3},\ \frac{8}{3^3.3},\ \frac{8}{3^5.5},\ldots; \qquad \frac{4}{7},\ \frac{4}{7^3.3},\ \frac{4}{7^5.5},\ldots;$$

die Glieder $\frac{8}{3^3.3}$, $\frac{8}{3^5.5}$, $\frac{8}{3^7.7}$, ... aber, so wie auch die Glieder $\frac{4}{7^3.3}$, $\frac{4}{7^5.5}$, $\frac{4}{7^7.7}$, ... respective unter

$$\frac{8}{3^3},\ \frac{8}{3^5},\ \frac{8}{3^7},\ldots; \qquad \frac{4}{7^3},\ \frac{4}{7^5},\ \frac{4}{7^7},\ldots$$

zu setzen, wo dann die Horizontalstriche die Uebersicht bei der Addition der einzelnen Glieder (mit gehöriger Berücksichtigung der Zeichen + und —) *) erleichtern werden. Eine Ausnahme der

*) Bequemer ist es, die positiven Glieder für sich und die negativen für sich zu addiren.

angeführten Controlle $\frac{Aa}{b}=\frac{A}{b}.a$ findet statt, wenn $a=1$ oder 10 oder 0,1 oder 100 oder 0,01 u. s. w. ist; hier kann man die Zerfällung von b oder $b+1$ oder $b-1$ in 2 ungleiche Factoren, mit denen dann in verschiedener Ordnung zu dividiren ist, nicht entbehren. Dass man den Bruch $\frac{a}{b}$ jedesmal auf seine kleinste Benennung zu bringen hat, brauche ich wohl nicht zu erinnern. Endlich, weil fast jeder Divisionsfehler alle weiter rechts liegenden Ziffern des Quotienten alterirt, ist noch zu bemerken, dass es eine kaum durchzuführende Arbeit sein würde, wenn man sich's vorsetzen wollte, in jedem Gliede alle 204 Stellen auf einmal zu berechnen; man hat vielmehr die Arbeit zu zertheilen; legt man sie zuerst auf 36 Stellen an, so hat man im Endresultat die Ludolf'sche Zahl; dann wird der Anblick der 3 letzten Stellen jedes Gliedes lehren, welche Reste bei jeder Division geblieben sind (zu diesem Zwecke hat man es zu vermeiden, die letzte Ziffer, wenn die zunächst weggelassene 5 oder >5 ist, um eine Einheit zu vermehren, was nur in der 204ten Stelle, überhaupt am Schluss der ganzen Rechnung, und auch da nicht in den Mittelgliedern, geschehen darf) *); dann kann man die Arbeit fortsetzen, indem man sie auf 42 neue Stellen anlegt, um die Sharp'sche Zahl sicher zu haben; 42 neue Stellen werden zeigen, dass Lagny die 113te Bruchstelle (wahrscheinlich durch einen Additionsfehler) fälschlich $=7$ anstatt 8 gesetzt hat; 42 neue Stellen werden nicht nur den in den älteren Ausgaben der Vega'schen Logarithmentafeln vorkommenden Fehler der 137sten, 139sten und 140sten Stelle, sondern auch den in Thibaut's Grundriss der reinen Mathematik vorkommenden Fehler der 155sten und 156sten Stelle berichtigen; endlich werden 42 neue Stellen den Fehler bis auf weniger als eine halbe Einheit der 201sten Stelle herabbringen. Zum Ueberfluss kann man noch einige nach dem 158sten Gliede der Reihe für 8 Arctg $\frac{1}{3}$ folgende Glieder berechnen und alle übrigen Glieder nach Art einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{10}$ summiren, um sich zu überzeugen, dass

$$\frac{0,8}{3^{149}.151}\cdot\left(\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{16,6}{317}+\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{16,8}{319}\right.$$
$$\left.+\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{17,0}{321}+\cdots\right)=\frac{17}{10^{204}}\pm\frac{5}{10^{205}}.$$

*) So oft man in der 204ten Stelle eines Gliedes der Reihe hinsichtlich der zu schreibenden Ziffer um eine Einheit zweifelhaft bleibt, hat man nicht nur die Mittelglieder, sondern oft auch das vorhergehende, ja wohl gar die beiden vorhergehenden Glieder der Reihe auf mehr als 204 Stellen zu berechnen.

ist; auf ähnliche Art überzeugt man sich, dass

$$\frac{0{,}08}{7^{99}.101}\left(\frac{0{,}04}{103}\cdot\frac{0{,}08}{105}\cdot\frac{0{,}12}{107}\cdots\frac{2{,}04}{203}+\frac{0{,}04}{103}\cdot\frac{0{,}08}{105}\cdot\frac{0{,}12}{107}\cdots\frac{2{,}08}{205}\right.$$
$$\left.+\frac{0{,}04}{103}\cdot\frac{0{,}08}{105}\cdot\frac{0{,}12}{107}\cdots\frac{2{,}12}{207}+\ldots\right)=\frac{14}{10^{204}}\pm\frac{5}{10^{206}}.$$

Addirt man diese 17 Einheiten der 204ten Stelle mit dem Zeichen — und die 14 Einheiten mit dem Zeichen + zu dem gefundenen Resultat, so hat man überhaupt 8 Arctg $\frac{1}{5}$ vermittelst 159 Glieder gefunden, deren jedes den möglichen Fehler von $\pm\frac{5}{10^{205}}$ hat; die gesammte Ungewissheit beträgt also nur $\pm\frac{79{,}5}{10^{204}}$; ebenso hat man 4 Arctg $\frac{1}{7}$ vermittelst 102 Glieder bis auf einen Fehler von $\pm\frac{51}{10^{204}}$ gefunden; die gesammte Ungewissheit von π beträgt also nur $\pm\frac{130{,}5}{10^{204}}$. Vorzüglich wichtig ist es aber noch, schliesslich auf die Controlle aller Additionen aufmerksam zu machen; jede Summe solcher Glieder der Reihe, welche sich auf einer und derselben Blattseite befinden, ist so zu controlliren, dass man jede Columne von Ziffern, nachdem man sie von unten nach oben summirt hat, auf der Stelle von oben nach unten summirt.

Aber alle hier angeführten Controllen sind bei einer so weitläuftigen Rechnung nicht hinreichend, die Richtigkeit des Endresultats zu verbürgen; es trifft sich irgend einmal (zumal wenn die Arbeit plötzlich unterbrochen wird), dass man eine Separat-Controlle versäumt, oder dass man, wenn man zu 42 neuen Stellen übergeht, irgendwo einen falschen, bei der Division gebliebenen Rest anwendet; auch kommt es, wiewohl selten, vor, dass man in einer zu summirenden Columne denselben Fehler bei der aufwärts gehenden und bei der unterwärts gehenden Summirung macht. Eine schon vorher von einem anderen Rechner ausgeführte Rechnung, bei welcher man die Versicherung der Controlle auf Autorität annimmt, kann zwar viel zur Erleichterung der Entdeckung versteckter Fehler beitragen; namentlich wird diese Entdeckung sehr erleichtert, wenn die Abweichung der Resultate nur einzelne discrete Ziffern betrifft (wo es dann augenscheinlich ist, dass es sich nur um Additionsfehler handelt, weil ein Divisionsfehler nach dem schon oben Angeführten sich weiter rechts bis zum Schluss der Rechnung fortpflanzt); aber da jede Autorität in der Wissenschaft mit Vorsicht angewandt werden muss

(wie schon der berühmte Wolff vor 150 Jahren bei Gelegenheit der Vergleichung verschiedener astronomischer Beobachtungsmethoden schrieb: Es ist allemal besser, wenn man sich nicht auf Andere zu verlassen braucht), und denjenigen, welcher die Rechnung über alles bisher Geleistete hinaus ausdehnen will, alle Autorität verlässt, so bleibt zur allgemeinen Controlle der ganzen Rechnung nichts übrig, als eine andere Reihe für π anzuwenden, welche ebenfalls die Wurzelausziehung umgeht und deren Berechnung von der Berechnung der bis hieher angewandten Reihe durchaus unabhängig ist. Wollten wir die von Dahse angewandte Reihe

$$\tfrac{1}{4}\pi = \mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2} + \mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{5} + \mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{8}$$

zur allgemeinen Controlle benutzen, so würden wir im Ganzen zu fünf gegebenen Tangenten die Bogen zu berechnen haben, nämlich $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$, $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$, $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$, $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}$ und $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{8}$. Glücklicherweise aber giebt es eine Reihe, welche, wenngleich im Ganzen weniger convergent, als jede der beiden Reihen

$$\pi = 8\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{7},$$
$$\pi = 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{5} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{8},$$

doch, mit der Reihe $\pi = 8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ zusammen, nicht zu mehr gegebenen Tangenten die Bogen zu berechnen verlangt als die Dahse'sche Reihe allein, und dabei vor der letzteren den Vortheil einer allgemeinen Controlle voraus hat, nämlich

$$\pi = 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{3}.$$

Hier ist nämlich $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ nicht von Neuem, Glied für Glied, zu berechnen, sondern man braucht nur den schon gefundenen Werth von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ zu halbiren.

Es ist hier nicht uninteressant, zu überlegen, wie grosse Fehler bei der Berechnung von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$, $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ und $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ überhaupt gestattet sind, damit der grösste Fehler von $\pi =$ einer halben Einheit der letzten beibehaltenen Decimale, der kleinste von jenen 3 Fehlern aber dabei so gross als möglich (oder, was dasselbe sagt, diese 3 Fehler so wenig als möglich ungleich unter einander) werden. Hierzu bedenken wir, dass der Fehler von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ kleiner sein muss, als eine halbe Einheit der letzten Decimale, also der Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} <$ als $\frac{1}{4}$ Einheit; da nun der Fehler von π bis auf eine halbe solche Einheit ansteigen darf, so ist in $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ jedenfalls ein Fehler gestattet, welcher grösser ist als $\frac{1}{4}$ Einheit. Dieser Fehler sei $= (\frac{1}{4} + x)$ Einheiten, so ist der stattgehabte Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} = (\frac{1}{4} - x)$ Einheiten, also der

Fehler von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}=(\frac{1}{2}-2x)$ Einheiten, also der Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}=2x$ Einheiten. Lässt man nun x sich von dem Werthe 0 bis zu dem Werthe $\frac{1}{4}$ ändern, so ändert sich der Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$, der Fehler von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ bis 0 und der Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ von 0 bis $\frac{1}{2}$. Ist $x=\frac{1}{8}$, so sind die drei genannten Fehler $=\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$; ist $x<\frac{1}{8}$, so ist der kleinste unter diesen 3 Fehlern $<\frac{1}{4}$; und ist $x>\frac{1}{8}$, so ist der kleinste unter den 3 Fehlern ebenfalls $<\frac{1}{4}$. Der kleinste unter den 3 Fehlern ist also am grössten, wenn $x=\frac{1}{8}$, und wir haben also $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ bis auf einen Fehler von $\frac{3}{10^{201}.8}$, $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ und auch $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^{201}.4}$ zu berechnen.

Wenn wir bei der Berechnung von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ die Umwandlung zum Behuf der Herbeiführung einer schnelleren Convergenz des Schlusses der Reihe unberücksichtigt lassen wollten, und wenn wir dabei dem Buchstaben q dieselbe Bedeutung wie oben geben wollten, so würden wir q durch die Gleichung

$$102+\log 2-\tfrac{1}{2}(\log(750-q)+\log(2q+1))=q\log 2,$$

und zwar $q=330{,}7\ldots$ finden, also ziemlich genau = der Summe der oben für $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ und $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ gefundenen Werthe von q. Wir vermuthen daher, dass wir, so wie wir in der Reihe für $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ die ersten 75 und in der Reihe für $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ die ersten 50 Glieder unverändert gelassen haben, in der Reihe für $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ die ersten 75 + 50, d. i. 125 Glieder, unverändert zu lassen und also die Umwandlung beim 126sten Gliede anzufangen haben, um $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ bis auf einen Fehler von $\frac{3}{10^{201}.8}$ durch so wenige Glieder als möglich ausdrücken zu können. Fangen wir die Umwandlung beim 126sten Gliede an, so liegt x zwischen den beiden Werthen, welche durch die Gleichungen

$$204-\frac{123}{8}\log 65536-\log 31375+\log\frac{124x^2-3018x+55183}{(2x+3)(2x+5)}-\log\frac{632{,}5}{1}$$
$$-\log\frac{637{,}5}{2}-\log\frac{642{,}5}{3}-\ldots-\log\frac{5x+2{,}5}{x-125}-\log(750-x)=0,$$

$$204-\frac{247}{16}\log 65536-\log 3137{,}5+\log\frac{25x^2-653x+14087}{(2x+3)(2x+5)}-\log\frac{632{,}5}{1}$$
$$-\log\frac{637{,}5}{2}-\log\frac{642{,}5}{3}-\ldots-\log\frac{5x+2{,}5}{x-12{,}5}-\log(750-x)=0$$

bestimmt werden. Das giebt für $x=213$ und $x=214$ die Resultate:

$+1{,}0696395375 \pm 0{,}000009462....$
$+1{,}07032944375 \pm 0{,}000009465...$
$-0{,}0103060625 \pm 0{,}000009563....$
$-0{,}00960755625 \pm 0{,}000009566....$

also die linke Seite der x bestimmenden Gleichung, wenn x= gesetzt wird, $=+1{,}0....$, und, wenn $x=214$ gesetzt wird, zwis $-0{,}009....$ und $-0{,}010....$ Folglich ist $x=214$.

Beginnen wir aber die Umwandlung beim 125sten Gliede, s ten an die Stelle der Brüche

$$\frac{124x^2-3018x+55183}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-653x+14087}{(2x+3)(2x+5)}$$

die Brüche

$$\frac{124x^2-2990x+54249}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-647x+13851}{(2x+3)(2x+5)},$$

und die Resultate sind für $x=213$ und 214:

$$\left.\begin{array}{l}+0{,}827383875 \pm 0{,}000009557....\\ +0{,}82808823125 \pm 0{,}000009560....\end{array}\right\}, \text{ d. i. } +0{,}82....$$

$$\left.\begin{array}{l}-0{,}247698925 \pm 0{,}000009657....\\ -0{,}24698586875 \pm 0{,}000009660....\end{array}\right\}, \text{ d. i. } -0{,}24....$$

Folglich ist $x=214$.

Beginnen wir die Umwandlung beim 124sten Gliede, so g die beiden oben erwähnten Brüche in $\frac{124x^2-2962x+53323}{(2x+3)(2x+5)}$ $\frac{25x^2-641x+13617}{(2x+3)(2x+5)}$ über, und die Resultate sind für $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}+0{,}5935688125 \pm 0{,}000009651....\\ +0{,}59433194375 \pm 0{,}000009654....\end{array}\right\}, \text{ d. i. } +0{,}59....$$

Wir vermuthen daher, dass die linke Seite der x bestimme Gleichung, wenn wir denjenigen Bruch anwenden, dessen Z mit $124x^2$ anfängt, für $x=213$ sich in folgender arithmeti Reihe der 2ten Ordnung ändere:

								Δ'
wenn die	Umwandlung	beim		126.	Gliede	beginnt,	+1,0696...	
								−2423
„	„	„	„	125.	„	„	+0,8273...	
								−2338
„	„	„	„	124.	„	„	+0,5935...	
								−2253
„	„	„	„	123.	„	„	+0,3682...	

u. s. w., dass also x am kleinsten werde, wenn die Umwandlung beim 97sten Gliede beginnt. Wir haben daher die 3 Fälle streng zu prüfen, wo die Umwandlung beim 96., 97. und 98. Gliede beginnt.

Beim 96sten Gliede beginnend, haben wir die Brüche

$$\frac{124x^2-2178x+30643}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-473x+7877}{(2x+3)(2x+5)}$$

anzuwenden und erhalten für $x=210$ und 211 die Resultate:

$$\left.\begin{matrix}+0{,}2501518625 \pm 0{,}000011282.... \\ +0{,}251319331 25 \pm 0{,}000011285....\end{matrix}\right\}, \text{ d. i. } +0{,}25....$$

$$\left.\begin{matrix}-0{,}7084517375 \pm 0{,}000011383.... \\ -0{,}707488896875 \pm 0{,}000011386....\end{matrix}\right\}, \text{ d. i. } -0{,}70....$$

Folglich ist $x=211$.

Beim 97sten Gliede beginnend, haben wir die Brüche

$$\frac{124x^2-2206x+31345}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-479x+8055}{(2x+3)(2x+5)}$$

anzuwenden, und erhalten für $x=210$ die Resultate:

$$+0{,}264230175$$
$$+0{,}26537898125.$$

Ohne hier die mit dem Zeichen $\pm$ anzuhängende Ungewissheit in Betracht zu ziehen, sehen wir schon, dass die Umwandlung noch früher als beim 96sten Gliede beginnen muss. Wenn sie beim 95sten Gliede beginnt, so haben wir die Brüche $\frac{124x^2-2150x+29949}{(2x+3)(2x+5)}$ und $\frac{25x^2-467x+7701}{(2x+3)(2x+5)}$ anzuwenden; dies giebt für $x=210$ und 211 die Resultate:

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}+0{,}24280455 \pm 0{,}000011376.... \\ +0{,}24390095625 \pm 0{,}000011380....\end{matrix}\right\}, \text{ d. i. } +0{,}24.... \\ \left.\begin{matrix}-0{,}71237645 \pm 0{,}000011476.... \\ -0{,}71118164375 \pm 0{,}000011480....\end{matrix}\right\}, \text{ d. i. } -0{,}71....\end{matrix}\right\} \quad (3)$$

Folglich ist x wiederum $=211$.

Beim 94sten Gliede beginnend, haben wir die Brüche

$$\frac{124x^2-2122x+29263}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-461x+7527}{(2x+3)(2x+5)}$$

anzuwenden, und erhalten für $x=210$ die Resultate:

$$\left.\begin{array}{l}+0{,}2436255375\ \pm 0{,}000011470\ldots\\ +0{,}24483104375 \pm 0{,}000011473\ldots\end{array}\right\},\ \text{d. i.}\ +0{,}24\ldots$$

Wir sehen, dass wir hier in der Summirung der Reihe noch ein Glied weiter gehen müssen. Wir verwandeln also, wenn die Umwandlung beim 95sten Gliede beginnt, die beiden Brüche

$$\frac{124x^2-2150x+29949}{(2x+3)(2x+5)} \text{ und } \frac{25x^2-467x+7701}{(2x+3)(2x+5)}$$

in

$$25.\left(1+\frac{x-93}{5x+7{,}5}\left(1+\frac{x-92}{5x+12{,}5}\left(1+\frac{x-91}{5x+17{,}5}\right)\right)\right)$$

und

$$5.\left(1+\frac{x-93}{5x+7,}\left(1+\frac{x-92}{5x+12{,}5}\left(1+\frac{5}{4}.\frac{x-91}{5x+17{,}5}\right)\right)\right),$$

d. i. in

$$\frac{249{,}6.x^3-3873{,}6.x^2+85473{,}6.x-1036110{,}6}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)}$$

und

$$\frac{50x^3-796{,}8.x^2+19126x-269509{,}8}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)}.$$

Die Logarithmen dieser beiden Brüche unterscheiden sich von den Logarithmen der beiden vorigen Brüche, wenn $x=210$ ist, um $+0{,}0005294$ und $-0{,}0005247$, und, wenn $x=211$ ist, um $+0{,}0005331$ und $-0{,}0005260$; um so viel rücken also die Resultate enger zusammen, und die oben mit (3) bezeichneten Werthe $+0{,}24\ldots$ und $-0{,}71\ldots$ werden dadurch genauer auf $+0{,}2433\ldots$ und $-0{,}711\ldots$ bestimmt.

Es fehlt nur noch, dass wir, beim 94sten Gliede beginnend, die Resultate für $x=211$ berechnen (wozu wir die Verwandlung der mit dem Nenner $(2x+3)(2x+5)$ behafteten Brüche in die mit dem Nenner $(2x+3)(2x+5)(2x+7)$ behafteten nicht nöthig haben); wir finden:

$$\left.\begin{array}{l}-0{,}7053000625\ \pm 0{,}000011571\ldots\\ -0{,}70408625625 \pm 0{,}000011574\ldots\end{array}\right\},\ \text{d. i.}\ -0{,}70\ldots$$

Wir sehen also, dass, wenn wir die Umwandlung mit dem 94., 95. und 96. Gliede beginnen, die linke Seite der auf 0 gebrachten x bestimmenden Gleichung

für $x=210$:

zwischen $+0,2436....$ und $+0,2448....$ $+0,2433....$ $+0,25....$

für $x=211$:

$-0,70....$ $-0,711....$ $-0,70....$

t; folglich findet, wenn die Umwandlung mit dem 95sten Gliede ginnt, für $x=210$ das Minimum der linken Seite der auf 0 geachten x' bestimmenden Gleichung statt, und für $x=211$ das gative Maximum. Es ist daher nicht möglich, durch einmalige mwandlung der Reihe $\frac{4}{2}\left(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+.....\right)$ den Werth n $4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{2}$ auf einen Fehler von $\frac{3}{10^{201}.8}$ vermittelst weniger als 1 Glieder zu berechnen, und die geringste Anzahl der dazu errderlichen Glieder findet statt, wenn die Umwandlung mit dem sten Gliede beginnt. Hat man die Umwandlung beim 95sten Gliede gonnen, so entsteht das 211te Glied aus dem 210ten durch Multiication mit $\frac{232}{421}\cdot\frac{1}{5}$, d. i. mit $\frac{1}{9,07....}$; wollte man also beim 210ten liede eine zweite Umwandlung auf die oben angezeigte Art beunen, so würde das 211te Glied aus dem 210ten durch Multiplication mit $\frac{421-232}{421}\cdot\frac{1}{4}$ entstehen, d. h. durch Multiplication mit $\frac{1}{9....}$; die Convergenz würde also, anstatt verstärkt, vermindert erden; vielmehr drückt die Multiplication mit $\frac{1}{9,07....}$ immer noch ne stärkere Convergenz aus, als vom 2ten zum 3ten Gliede stattndet. Es ist also überhaupt nicht möglich, $4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{2}$ durch eniger als 211 Glieder bis auf einen Fehler von $\frac{3}{10^{201}.8}$ zu beechnen.

So lässt sich π durch die Reihe,

$$\pi=2\left(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+....-\frac{1}{4^{93}.187}\right)$$

$$+\frac{0,1}{2^{184}.189}\left(1+\frac{0,4}{191}+\frac{0,4}{191}\cdot\frac{0,8}{193}+\frac{0,4}{191}\cdot\frac{0,8}{193}\cdot\frac{1,2}{195}+.....\right)+\frac{8\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{3}}{2}$$

ermittelst 212 Glieder (wenn man $\frac{8\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{3}}{2}$ als ein Glied für sich etrachtet) so genau berechnen, dass der Fehler weniger als eine albe Einheit der 201sten Bruchstelle beträgt, vorausgesetzt, dass er Fehler jedes der 211 ersten Glieder weniger als eine halbe

Einheit der 204ten Bruchstelle beträgt. Die continuirliche Division durch 4, vermittelst deren das Dreifache des 2ten Gliedes, das Fünffache des 3ten, u. s. w. gefunden wird, schreitet am schnellsten fort, wenn man nicht unablässig controllirt, sondern wenn man aus einem fehlerfreien Gliede $=\frac{2}{4^m}$ ohne Unterbrechung $\frac{2}{4^{m+1}}, \frac{2}{4^{m+2}}, \ldots$ etwa bis $\frac{2}{4^{m+10}}$ berechnet, und dann $\frac{2}{4^m}$ auf einmal durch 4^{10} dividirt. Schreibt man diese durch stetige Division mit 4 sich bildenden Glieder successiv unter einander, so nimmt das Schema der Rechnung etwa die Form des in unsern Breitengraden am Abendhimmel erscheinenden Zodiakallichts an; ein irgendwo begangener Fehler pflanzt sich hier nicht ohne Ende auf alle zur Rechten folgenden Ziffern fort, sondern in derselben Zodiakallichtform, so dass die Dreiecksseiten, den Seiten des ganzen Schemas parallel, einen Flächenraum einschliessen, welcher ein Bild des ganzen Schemas, aber (wenn man nach 10 Divisionen controllirt) in sehr verkleinertem Maassstabe, darstellt und dann ohne viele Umstände corrigirt werden kann. Es ist rathsam, die Berechnung der Glieder $2\left(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\ldots-\frac{1}{4^{93}.187}\right)$ nicht zu zertheilen, sondern jedes Glied auf Einmal durch alle 204 Bruchstellen zu berechnen, weil bei weitem die meisten unter diesen Gliedern Perioden enthalten, welche sich innerhalb der 204 Stellen mehrmals wiederholen; nachher kann man diese Glieder durch alle 204 Columnen auf einmal summiren, wobei sich nirgends ein Fehler einschleichen kann, welcher weiter als auf die zunächst links benachbarte Stelle Einfluss hätte. Das 95ste Glied, welches aus dem 187fachen des 94sten durch Division mit 945 entsteht, wird controllirt, indem man einmal erst durch 27, dann durch 35, ein andermal erst durch 35, dann durch 27 dividirt. Zum Ueberfluss kann man auch hier einige der Glieder

$$\frac{0,1}{2^{184}.189}\left(\frac{0,4}{191}\cdot\frac{0,8}{193}\cdot\frac{1,2}{195}\cdots\frac{46,8}{423}+\frac{0,4}{191}\cdot\frac{0,8}{193}\cdot\frac{1,2}{195}\cdots\frac{47,2}{425}\right.$$
$$\left.+\frac{0,4}{191}\cdot\frac{0,8}{193}\cdot\frac{1,2}{195}\cdots\frac{47,6}{427}+\ldots\right)$$

hinzuberechnen, und sich überzeugen, dass sie, ohne Ende fortgeführt, die Summe $\frac{52}{10^{204}}\pm\frac{5}{10^{205}}$ geben. Addirt man diese 52 Einheiten der 204. Stelle zu dem gefundenen Resultat, so hat man überhaupt $4\,\text{Arctg}\,\frac{1}{2}$ vermittelst 212 Glieder gefunden, deren jedes den möglichen Fehler von $\pm\frac{5}{10^{205}}$ hat; die gesammte Ungewiss-

heit würde also $\pm\frac{106}{10^{204}}$ betragen, wenn man es nicht vorzöge, so viele von den Anfangsgliedern $2(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\ldots)$, als sich in ein einziges und zwar periodisches Glied zusammenziehen lassen, wirklich zusammenzuziehen. Wir finden in der That

$$2(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\ldots+\frac{1}{4^{10}.21})$$
$$=1,854590\ 452862\ 441060\ 9\frac{731012}{2909907}.$$

Der Bruch $\frac{731012}{2909907}$ ist $\frac{1}{17}$ des mit einer achtzehnziffrigen Periode behafteten Bruches 4,270653 323284 902232 270653...., und bildet eine Periode von 144 Ziffern; wollte man aber das Glied $-\frac{2}{4^{11}.23}$ hinzunehmen, so würde man eine Periode von 1584 Ziffern erhalten, welche also die 204te Stelle weit überschreiten würde. Man erhält übrigens $\frac{2}{4^{11}}=0,000000\ 476837\ 158203\ 125$; von hier kann man die Division mit 4 stetig fortführen. Man hat auf diese Art wiederum 10 Glieder gespart, und der mögliche Fehler von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ ist also nur $\pm\frac{101}{10^{204}}$. Und da wir oben den möglichen Fehler von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}=\pm\frac{79,5}{10^{204}}$ gefunden haben, so erhalten wir π vermittelst der Formel $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}+4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ mit einem Fehler von $\pm\frac{101+\frac{79,5}{2}}{10^{204}}$ $=\pm\frac{140,75}{10^{204}}$ behaftet; hiervon gehen überdies noch ein paar Einheiten der 204ten Stelle ab, indem unter den Gliedern für $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ einige vorkommen, welche nicht alle 204 Bruchstellen ausfüllen, sondern fortlaufende Nullen geben, die wir nur deswegen wirklich hinschreiben, um in der Summirung der abwechselnd positiven und negativen Ziffern der einzelnen Columnen keinen Irrthum zu begehen. So sehen wir, dass wir π durch die beiden Formeln

$$\pi=8\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{3}+4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{7} \qquad \pi=4\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2}+\frac{8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}}{2}$$

ziemlich mit demselben Fehler erhalten.

Vergleicht man nun diese beiderseitigen Resultate mit einander und findet man die Abweichungen nur sporadisch, so

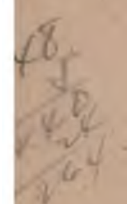
sind es, wie gesagt, blosse Summirungsfehler in den betreffenden Columnen. Zur Entdeckung derselben hat man nicht die jedesmal betroffene Columne allein zu revidiren, sondern auch die beiden nächstfolgenden zur Rechten, welche auf derselben Blattseite enthalten sind, — ausnahmsweise die drei nächstfolgenden, — deren Summe auf die betroffene Columne Einfluss haben kann; dass man die aus diesen benachbarten Columnen gezogene Summe jedesmal um die Anzahl der in einer Columne befindlichen Ziffern zu vermehren hat, um zu prüfen, ob dadurch der Einfluss auf die betroffene Columne sich ändert, brauche ich wohl kaum zu erinnern. Findet man aber die Abweichungen von einer gewissen Grenze an fortlaufend, so hat man es mit keinen blossen Summirungsfehlern zu thun, sondern mit einem solchen, der sich in irgend eine Division durch Anwendung eines falschen Restes eingeschlichen hat. Man braucht alsdann die Revision höchstens nur auf 7 Columnen auszudehnen, auf die 3 der ersten betroffenen Columne zunächst links benachbarten, um sich der anzuwendenden Divisionsreste zu versichern, auf die betroffene Columne selbst und auf die 3 zunächst rechts benachbarten; ein Fehler in einer weiter rechts befindlichen Columne kann auf die erste betroffene Columne keinen Einfluss haben. Entdeckt man einen Fehler in einem derjenigen Glieder, welche weder Mittelglieder sind (d. h. solche, welche zur Bildung der einzelnen Glieder der Reihe dienen, ohne selbst zu diesen Gliedern zu gehören), noch zu dem umgewandelten Theil der Reihe gehören, so braucht man den Fehler nur in dem betroffenen Gliede selbst zu corrigiren; er hat keinen Einfluss auf die folgenden Glieder und man kann die gefundene Verbesserung in unveränderter Grösse und mit unverändertem Zeichen auf das Endresultat übertragen. Aber auch selbst in dem Fall, wenn der entdeckte Fehler sich in einem Mittelgliede oder in einem Gliede des umgewandelten Theils der Reihe befindet, braucht man nicht die ganze nachfolgende Rechnung zu wiederholen; denn der Einfluss eines solchen Fehlers auf die folgenden Glieder hat genau dieselbe Convergenz als die folgenden Glieder selbst, d. h. er ändert sich proportional mit diesen Gliedern selbst; er bildet also im Schema einen Flächenraum, dessen schrägfortlaufende linke Grenze genau parallel ist der linken Grenze der geltenden Ziffern des ganzen Schemas; er erstreckt sich also nur auf eine verhältnissmässig kleine Anzahl der folgenden Glieder, vorausgesetzt, dass, nach dem oben besprochenen Plane, die Anzahl der jedesmal neu hinzutretenden Bruchstellen 42 nicht überschreitet. Und hat man die Correction der einzelnen Glieder durchgeführt, so braucht man auch die Summirung nicht durch alle auf derselben Blattseite befindlichen Glie-

ler hindurch zu wiederholen, sondern (vorausgesetzt, dass man lie corrigirten Ziffern vor der Correction auf ein Nebenblättchen ıbgeschrieben hat) man summirt nur die corrigirten Ziffern, die alschen separat und die richtigen separat, subtrahirt die Summe ler falschen von der Summe der richtigen und überträgt die dalurch gefundene Gesammtverbesserung in unveränderter Grösse ınd mit unverändertem Zeichen auf das Endresultat. — Eine grosse Hülfe leistet es, wie schon gesagt, wenn man eine schon von inem anderen Rechner herausgebrachte Bestimmung der Zahl π ur Vergleichung benutzen kann. Weicht dieselbe von dem Reultat der auf die Formel $\pi = 8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ gegründeten Rechnung ab, nicht aber von dem Resultat der Formel $\pi = 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$, so liegt der Fehler nur in der Berechnung des Werhes von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$. Im umgekehrten Fall liegt der Fehler nur in ler Berechnung von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$. Weichen alle 3 Resultate von einnder ab, und ist die Abweichung des gefundenen Werthes $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ von dem vorhandenen Original genau das Doppelte der Abweichung des gefundenen Werthes $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ von dem Original, und zwar beide Abweichungen mit demselben Zeichen behaftet, so liegt der Fehler nur in der Berechnung von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$. Und ist die erstere Abweichung genau das Doppelte ler letzteren, mit Ausnahme einiger sporadischen Unterschiede inzelner Ziffern, so liegt der Fehler ebenfalls in der Berechnung von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$, und es walten ausserdem so viele Additionsfehler ıb, als sich sporadische Unterschiede finden. — Eine besondere Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn man eine sporalische Abweichung zwischen dem gefundenen Werth von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ und dem gefundenen Werth von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ emerkt und sich nach einem in der betreffenden Columne von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ und $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$ vorhandenen Summirungsfehler durch die anze Rechnung hindurch vergebens umgesehen hat. In diesem Fall ist zwar im Allgemeinen anzunehmen, dass der Fehler in ler Summirung derselben Columne von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ liege und dopelt so gross sei als die bemerkte Abweichung; eine Ausnahme nacht es jedoch, wenn die bemerkte Abweichung 5 ist; alsdann ıat man nicht dieselbe Columne von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ zu prüfen (es sei lenn aushülfsweise, um den Einfluss auf die zunächst links beıachbarte Columne festzustellen), sondern vornehmlich die zunächst inks benachbarte Columne, wo sich dann ein Fehler von Einer Einheit herausstellen muss. Auch wenn eine Abweichung sich n 2 zunächst auf einander folgenden Ziffern findet, und zwar so, lass die Ziffer zur Rechten die Abweichung 5 giebt, während eide Ziffern zusammen eine Abweichung von weniger als 50 darieten, so ist (vorausgesetzt, dass sich zunächst weiter rechts und

zunächst weiter links **keine** Abweichung zeigt) die Präsumtion da, dass der Fehler sich in der Berechnung von $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ befinde, und zwar, dass er doppelt so gross sei, als die bemerkte Abweichung und sich daher nur auf die Summirung der linken unter den beiden betroffenen Columnen beschränke.

Die Erfahrung lehrt, dass bei Befolgung aller dieser Vorschriften und Vorsichtsmaassregeln ein Zeitraum von wenigen Wochen anhaltender Arbeit hinreicht, π mit Sicherheit auf 201 Bruchstellen zu bestimmen, und dass daher die Langwierigkeit dieser Rechnung unbedeutend ist im Vergleich zu derjenigen, welche bei der Berechnung der speciellen Störungen mancher Planeten und Kometen stattfindet.

Die von dem Unterzeichneten auf 204 Stellen angelegte Rechnung zeigte, dass die 201ste bis 205te bei **Dahse** falsch waren; es wurden daher, sobald das **Dahse**'sche Resultat dem Unterzeichneten bekannt wurde, von letzterem neue 6 Stellen hinzugefügt, so dass nun 207 Stellen sicher waren. **Clausen** und **Richter** stimmten in 247 Bruchstellen überein; hinsichtlich der 248sten bis 255sten war **Richter** (in seiner der Berliner **Spener**'schen Zeitung vom 15. October 1852 einverleibten Anzeige) seiner Sache nicht ganz gewiss und behielt sich eine nochmalige Prüfung derselben vor. Das veranlasste den Unterzeichneten, 54 neue Stellen zu berechnen, also die Rechnung auf 264 Stellen anzulegen, so dass nun 261 Stellen sicher waren, und die 262ste Stelle von $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ nur innerhalb der Grenzen 2.... und 6...., desgleichen die 262ste Stelle von $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ nur innerhalb der Grenzen 2.... und 6.... schwankte; hierbei ist der äusserst unwahrscheinliche Fall angenommen, dass **jedes** Glied der angewandten Reihen mit dem Maximum des Fehlers $\left(\pm \frac{5}{10^{265}}\right)$ behaftet sei und dass die Zeichen der Fehler auf die allerungünstigste Weise conspiriren. Uebrigens ist nirgends eine **zweite** Umwandlung der angewandten Reihen vorgenommen worden. Auf diese Art haben sich folgende Resultate ergeben (man bittet jeden geehrten Leser, sich durch wirkliche Summirung der beiden Theile der Formeln von der Richtigkeit der Rechnung und **davon** zu überzeugen, dass sich in die hier aufgeführten Ziffern kein Abschreibe- oder Druckfehler eingeschlichen hat):



$8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ = 2,574004 435173 137547 211236 914869 290552 166042 364461
249531 462424 474854 049899 246484 354851 267378 805130
995513 057355 017037 913186 141143 766101 075219 678474
256704 117269 145878 076084 836229 951097 241342 491465
725932 815517 796053 039556 540912 851158 871701 454683
836922 897531 124067 39(4968);

$4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7} = 0{,}567588$ 218416 655691 251406 468410 212332 031127 034913
856289 612520 117453 766507 039724 643776 767446 536986
072469 090731 496244 393460 952700 843449 507012 046885
151424 363848 304406 026617 102291 154462 403280 457489
204449 148911 014922 626376 905215 624489 362085 328481
434279 011614 524499 528(489);

$4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = 1{,}854590$ 436003 224464 857024 925844 857608 114148 217144
481055 243732 354880 791456 662966 821202 401135 939551
570226 119409 004764 350054 023272 726500 044621 886122
279776 422482 877345 064659 520406 130011 023951 703222
067415 556669 912949 146155 175672 050068 797936 055823
352740 460360 086533 22(5978);

$4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} = 1{,}287002$ 217586 568773 605618 457434 645276 083021 182230
624765 731212 237427 024949 623242 177425 633689 402565
497756 028677 508518 956593 070571 883050 537609 839237
128352 058634 572939 038042 418114 975548 620671 245732
862966 407758 898026 519778 270456 425579 435850 727341
918461 448765 562033 697(484);

$\pi = 3{,}141592$ 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375
105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117
067982 148086 513282 306647 093844 609550 582231 725359
408128 481117 450284 102701 938521 105559 644622 948954
930381 964428 810975 665933 446128 475648 233786 783165
271201 909145 648566 923$^{2}_{6}$....

Sollte es Jemandem einfallen, π auf eine noch grössere Anzahl von Decimalen berechnen zu wollen, so stehen ihm dazu zwei Wege offen. Entweder wird man überlegen, bei welchem Gliede der Reihen für $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$, $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ und $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$ man die Umwandlung anzufangen hat, um den Werth der Zahl π durch die möglichst geringste Anzahl von Gliedern auf die verlangte grössere Anzahl von Decimalen ausdrücken zu können, und man wird demgemäss die Rechnung von vorn anfangen. Oder man bleibt in der Berechnung von $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ dabei stehen, die Umwandlung mit dem 51sten Gliede zu beginnen, in der Berechnung von $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ dabei, die Umwandlung mit dem 76sten Gliede zu beginnen, und in der Berechnung von $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$ dabei, die Umwandlung mit dem 96sten Gliede zu beginnen, und überlegt nur, ob es nach der verlangten Anzahl von Decimalen rathsam sei, irgendwo eine zweite Umwandlung auf die oben entwickelte Art zu beginnen, bei welcher

die Zeichen der Glieder wiederum (wie beim Anfang der Reihe) abwechseln, und man setzt unsere angefangene Rechnung fort, indem man immer wieder etwa 42 neue Stellen hinzunimmt *) (auf diese Weise haben wir die 205te bis 210te Ziffercolumne hinzugefügt und dann auf einmal die 211 bis 264ste, was aber wegen der öfter einschleichenden Fehler schon merklich mühsamer ist als die Hinzufügung von nur 42 Columnen). Für solche etwa später auftretende Fortsetzer der Rechnung folgen hier die 259ste bis 264ste Stelle aller einzelnen Glieder und Mittelglieder, wie wir sie in unserer Rechnung gefunden haben; man wird hier durch Summirung der Columnen der 259sten bis 264sten Stelle und durch Vergleichung der Summen mit dem oben angeführten Endresultat sich davon überzeugen können, dass sich keine Abschreibe- oder Druckfehler eingeschlichen haben, und man hat dadurch zugleich eine Bürgschaft der Richtigkeit der 259sten bis 261sten Stelle aller einzelnen Glieder der Reihen (weil nämlich die von uns gefundenen Werthe von $8 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{7}$ und $4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ bis zur 261sten Stelle inclusive übereinstimmen); die Richtigkeit der 262sten bis 264sten Stelle aller einzelnen Glieder der Reihen ist durch die schon oben angeführte Controlle $\frac{Aa}{b} = \frac{A}{b} . a$ verbürgt. Vergleicht man dann die 259ste bis 261ste Stelle der Mittelglieder, welche durch stetige Division mit 4, 7 und 9 entstanden sind, mit der 259sten bis 261sten Stelle der Glieder, welche aus ihnen durch Division mit 3, 5, 7,.... entstanden sind, so erkennt man den bei der 201sten Stelle gebliebenen jedesmaligen Divisionsrest; vermittelst dieses Restes und der 3 folgenden Stellen des betreffenden Mittelgliedes kann man dann nochmals die 262ste bis 264ste Stelle des darunter stehenden Gliedes berechnen und dadurch entscheiden, ob die 264ste Stelle um der folgenden, weggelassenen Stellen willen um eine Einheit vermehrt ist oder nicht; auch hat man hierdurch eine Controlle der Richtigkeit der 259sten bis 261sten Stelle des Mittelgliedes und dass sich auch hier kein Abschreibe- oder Druckfehler eingeschlichen habe; endlich kann man auf ähnliche Art aus der 259sten bis 264sten Stelle jedes Mittelgliedes g und aus der 259sten bis 261sten Stelle des folgenden Mittelgliedes $\frac{g}{4}$ (respective $\frac{g}{9}$ oder $\frac{g}{49}$) die 262ste bis 264ste Stelle des Gliedes $\frac{g}{4}$ (oder $\frac{g}{9}$ oder $\frac{g}{49}$) nochmals berechnen, und sich dadurch von der Richtigkeit der 262sten bis 264sten Stelle aller Mittelglie-

---

*) Der zweite Weg ist der kürzere für Denjenigen, welchem es nicht an allem und jedem Autoritätsglauben fehlt.

der successiv überzeugen. Es wird nicht schwer sein, sich von der Richtigkeit der oben angeführten Werthe

$$2\left(1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\dots+\frac{1}{4^{10}.21}\right)$$

$$=1{,}854590\ 452862\ 441060\ 9\frac{731012}{2909907},$$

$$\frac{731012}{2909907}=\frac{4{,}270653\ 323284\ 902232\ 270653\dots}{17},$$

und dann davon zu überzeugen, dass sich $\frac{731012}{2909907}$ in die 144ziffrige Periode

0,251214 901369 700131 310038 430781 464837 192391 371957
935425 427685 489604 994248 957097 254310 876601 898273
724899 111896 015920 783722 641307 780626 666075 582484
251214 ....

auflösen lässt. Auf diese Weise hat man alles Material, um die nicht umgewandelten Glieder der Reihen für 8 Arctg $\frac{1}{3}$, 4 Arctg $\frac{1}{7}$ und 4 Arctg $\frac{1}{2}$ von der 264sten Stelle an so weit fortzuführen, als man will. Will man auch hier der Bequemlichkeit wegen die stetigen Divisionen mit 49 in Divisionen mit 7 auflösen, so überzeugt man sich von der Richtigkeit der 259sten Stelle von $\frac{4}{7^{2m}}$ dadurch, dass man die 259ste bis 264ste Stelle von $\frac{4}{7^{2m+1}}$ mit 7 multiplicirt; dann berechnet man nochmals vermittelst der 259sten bis 264sten Stelle von $\frac{4}{7^{2m-1}}$ und der 259sten Stelle von $\frac{4}{7^{2m}}$ die 260ste bis 264ste Stelle von $\frac{4}{7^{2m}}$, und überzeugt sich dadurch von der Richtigkeit derselben. Was aber die umgewandelten Glieder betrifft, so lassen sich die oben angeführten Divisionen mit 1510,5050 und 945 von der 264sten Stelle an so weit fortführen, als man will, da man vom Dividendus alle Stellen von der 259sten an, vom Quotienten aber die 259ste bis 264ste Stelle in der unten folgenden Tabelle vorräthig hat. Aus jedem Gliede, welches wir oben mit A bezeichnet haben, kann man, wenn die Stellen desselben von der 259sten an bekannt sind, Aa von der 262sten Stelle an mit Sicherheit finden und dann (vermittelst dieser Stellen von Aa und vermittelst der 262sten bis 264sten Stelle von B) B von der 264sten Stelle an fortführen, so weit man will; auf diese Weise kann man successiv alle umgewandelten Glieder von der 264sten

Stelle an fortführen, so weit man will. Will man das zur Controlle dienende Mittelglied $\frac{A}{b}$ berechnen, so überzeugt man sich von der Richtigkeit der unten angeführten 259sten bis 261sten Stelle desselben dadurch, dass man die angeführte 259ste bis 264ste Stelle desselben mit a multiplicirt, wodurch sich wenigstens 3 auf einander folgende Ziffern von B (deren Stellen mehr oder weniger rechts von der 258sten Stelle beginnen, je nachdem a mehr oder weniger Bruchstellen enthält) reproduciren müssen; dann berechnet man mit Hülfe von A und der 259sten bis 261sten zu $\frac{A}{b}$ gehörigen Stelle die 262ste bis 264ste zu $\frac{A}{b}$ gehörige Stelle nochmals und überzeugt sich dadurch von der Richtigkeit derselben, worauf man $\frac{A}{b}$ fortführen kann, so weit man will. Der leichteren Uebersicht wegen haben wir auch noch die 259ste und die nächstfolgenden Ziffern von Aa angeführt, so weit wir sie entwickelt haben, um uns der 264sten Stelle von B zu versichern; man überzeugt sich von der Richtigkeit der 259sten bis 261sten Stelle von Aa, wenn man die 259ste bis 264ste Stelle von B mit b multiplicirt; dagegen überzeugt man sich von der Richtigkeit der 262sten bis 264sten Stelle von Aa, wenn man die 259ste bis 264ste Stelle von A mit a multiplicirt. Die Bruchstellen der durch successive Division mit 4 entstehenden Mittelglieder bleiben in der Rechnung leer, weil hier die geltenden Ziffern lange nicht bis zur 259sten Bruchstelle reichen; wir haben indessen in der hier folgenden Tabelle die gedachten Stellen, der leichteren Uebersicht wegen, mit Nullen ausgefüllt. Schliesslich bemerken wir noch, dass in der folgenden Tabelle einige Ausnahmefälle vorkommen, wo B aus A nicht durch eine Multiplication und eine Division, sondern, grösserer Bequemlichkeit wegen, durch Multiplication mit 2 ungleichen Decimalbrüchen p und q hergeleitet ist; in solchen Fällen ist Ap an die Stelle von Aa und Aq an die Stelle von $\frac{A}{b}$ getreten.

1.

In der Columne links steht die Ordnungszahl des Gliedes der $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ ausdrückenden unverwandelten Reihe, welche Ordnungszahl wir mit m bezeichnen, in der Columne rechts aber die 259ste bis 264ste Bruchstelle von $\frac{8}{3^{2m-1}}$ und die 259ste bis 264ste Stelle von $\frac{8}{(2m-1).3^{2m-1}}$, mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehen, je

nachdem das betreffende Glied positiv oder negativ ist. Diese sechsziffrige Columne kann als erste sechsziffrige Columne bei einer etwa fortzusetzenden Rechnung gebraucht werden, wofern man nur die 264ste Stelle von $\frac{8}{(2m-1).3^{2m-1}}$ da, wo sie um eine Einheit vermehrt ist (was man auf die oben angezeigte Art entdecken kann), corrigirt.

1	666666.... +666667	20	601624.... —810298	39	248447.... +418811	58	835133.... —285523
2	296296.... —432099	21	844624.... +191332	40	138716... —571376	59	870570.... +776672
3	477366.... +695473	22	760513.... —622338	41	793190.... +676459	60	096730.... —185687
4	941029.... —420276	23	195612... +159903	42	088132... —073351	61	566303.... +227821
5	215769.... +468419	24	799512... —846798	43	676459.... +807958	62	618478.... —387142
6	468418.... —769856	25	755501... +892969	44	297384.... —578131	63	624275.... +764994
7	496490.... +653576	26	083944.... —609489	45	921931.... +763168	64	847141.... —825568
8	166276.... —677752	27	120438... +775857	46	324659... —816754	65	983015.... +077388
9	796252.... +752721	28	457826... —590142	47	258295.... +949014	66	775890.... —517373
10	199583.... —799978	29	606425... +291341	48	139810.... —022524	67	530654.... +394967
11	133287.... +149204	30	845158.... —997376	49	237756... +002451	68	503406.... —374099
12	681476... —812238	31	427239.... +990610	50	248639... —164128	69	611489.... +369427
13	964608... +198584	32	603026.... —755604	51	805404.... +899063	70	623498.... —558442
14	773845.... —769402	33	289225.... +712142	52	200600... —099035	71	402610.... +307820
15	308205.... +252007	34	587691.... —486383	53	800066... +540953	72	489178.... —429994
16	256467... —427628	35	065299... +232830	54	311118... —638422	73	721019.... +832559
17	584051... +835880	36	118366... —494625	55	812346.... +851489	74	969002.... —278701
18	731561... —249473	37	124262.... +440058	56	645816.... —636449	75	552111.... +057397
19	414617.... +335530	38	236029.... —149814	57	516201.... +553241		

II.

Der nun folgende Theil der Tabelle enthält abwechselnd Eine sechsziffrige Zahl, von 2 Horizontalstrichen eingefasst, und zwei sechsziffrige Zahlen, von 2 Horizontalstrichen eingefasst; die Eine sechsziffrige Zahl enthält links neben sich die Ordnungszahl des Gliedes der 8 Arctg $\frac{1}{3}$ ausdrückenden verwandelten Reihe (welche Ordnungszahl wir, das Glied $\frac{8}{3}$ als das erste betrachtend, mit m bezeichnen) und besteht selbst aus der 259sten bis 264sten Bruchstelle von

$$-\frac{0,8}{3^{149}.151}\cdot\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{\frac{2m}{10}-\frac{152}{10}}{2m-1};$$

von den je zwei sechsziffrigen Zahlen aber, welche sich unter der Einen zum $m$ten Gliede gehörigen sechsziffrigen Zahl befinden, ist die erste die 259ste bis 264ste Stelle von

$$\frac{0,8}{3^{149}.151}\cdot\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{\frac{2m}{10}-\frac{152}{10}}{2m-1}\cdot a,$$

und die zweite die 259ste bis 264ste Stelle von

$$\frac{0,8}{3^{149}.151}\cdot\frac{0,2}{153}\cdot\frac{0,4}{155}\cdot\frac{0,6}{157}\cdots\frac{\frac{2m}{10}-\frac{152}{10}}{2m-1}\cdot\frac{1}{b},$$

wo $\frac{a}{b}$ der oben erwähnte, auf die kleinste Benennung gebrachte Bruch ist, welcher, mit A multiplicirt, B hervorbringt; links neben diesen beiden sechsziffrigen Zahlen sind die jedesmaligen Werthe von a und b in Bruchform geschrieben, wobei wir bemerken, dass wir bei $m=80$ (wo $\frac{a}{b}=\frac{1}{161}$), $a=\frac{1}{23}$ und $b=7$ genommen haben, bei $m=100$ aber (wo $\frac{a}{b}=\frac{5}{201}$) $a=\frac{10}{6}$ und $b=67$.

76	—010962	79	—116806	82	—078177	85	—185722
0,2	602192....	0,8	69344....	0,28	261889....	2	37144....
153	359548....	159	164256....	33	941762....	171	042021..
77	—271910	80	—331405	83	—583694	86	—084044
0,08	821752....	$\frac{1}{23}$	666582....	1,6	1339....	2,2	18489....
31	718448....	7	904486....	167	662177....	173	312624..
78	—897476	81	—952369	84	—659484	87	—087774
0,6	338485....	1,2	74284....	1,8	38707....	0,096	128426..
157	528009....	163	398480....	169	992067....	7	869682..

88	—875489	103	—923273	118	—732558	133	—430711
2,6	87627....	5,6	5703....	8,6	....	11,6	3962....
177	377827....	207	782238....	237	800559....	267	619590....
89	—982352....	104	—780533	119	—284810	134	—387252
2.8	75058....	5,8	1270....	8,8	5063....	11,8	5695....
179	608839....	209	185552....	239	745961....	269	406644....
90	—104752	105	—876206	120	—964462	135	—998400
3	31425....	6	25723....	9	6801....	12	980....,
181	155274....	211	350124....	241	800682....	271	214016....
91	—465825	106	—100745	121	—206142	136	—568195
3,2	8906....	6,2	6246....	9,2	0965....	12,2	13197....
183	215660....	213	629580....	243	362988....	273	602813....
92	—890113	107	—303402	122	—539492	137	—154330
0,68	68527....	1,28	30835....	1,88	374244....	2,48	42273....
37	726759....	43	704730....	49	929377....	55	693715....
93	—694197	108	—542055	123	—987229	138	—280413
3,6	2991....	6,6	3775....	9,6	877....	12,6	133....
187	329915....	217	873465....	247	910879....	277	672492....
94	—787696	109	—964874	124	—744443	139	—473405
3,8	19324....	6,8	3611....	9.8	4955....	12,8	8595....
189	072950....	219	840022....	249	059214....	279	965854....
95	—477213	110	—312151	125	—580303	140	—762938
4	90885....	7	1850....	10	8030....	13	918....
191	342812....	221	779692....	251	229403....	281	091683....
96	—371251	111	—457851	126	—294036	141	—191880
4,2	75925....	7,2	0965....	10,2	3991....	13,2	7328....
193	442338....	223	046896....	253	024877....	283	679123....
97	—257820	112	—937653	127	—653752	142	—564427
0,88	26688....	1,48	02772....	2,08	83980....	2,68	07266....
39	724559....	45	087503....	51	404975....	57	009902....
98	—237612	113	—689505	128	—722349	143	—106538
4,6	89301....	7,6	4402....	10,6	456....	13.6	04891....
197	747399....	227	795989....	257	928880....	287	638001....
99	—238036	114	—649516	129	—846136	144	—076825
4,8	14257....	7,8	66622....	10,8	3382....	13,8	6601....
199	624311....	229	535587....	259	717552....	289	806494....
100	—196696	115	—177582	130	—549569	145	—929620
[illegible]	99449....	8	42065....	11	0452....	14	0146....
67	465622....	231	615487....	261	691760....	291	580514....
101	—776037	116	—923899	131	—609369	146	—127198
5,2	03539....	8,2	5759....	11,2	8249....	14.2	0062....
203	875744. ..	233	025424....	263	143001....	293	485075....
102	—753869	117	—208481	132	—801616	147	—488076
1,08	85417....	1,68	43024....	2,28	82768....	2,88	1256....
41	262289....	47	578903....	53	241539....	59	533696....

148	—697045	164	—605218	180	—978025	196	—449266
14,6	1768....	17,8	1728....	21	5385....	24.2	2722....
297	497296....	329	606702....	361	379440....	393	260685....
149	—660528	165	—599310	181	—968251	197	—308581
14.8	7758....	18	7875....	21,2	7269. ..	24.4	1293....
299	206222....	331	693653....	363	236827....	395	732426....
150	—852093	166	—485763	182	—420735	198	—671214
15	781....	18,2	8408....	21,4	2037....	24,6	9118....
301	095854....	333	983140....	365	762796....	397	570960....
151	—437812	167	—098621	183	—323846	199	—445622
15.2	8547....	18.4	4146....	21,6	5950....	24,8	8514....
303	281972....	335	340592....	367	812871....	399	793096 ...
152	—685989	168	—466909	184	—958025	200	—668801
15,4	1642....	18.6	084....	21.8	0849....	25	7200....
305	294052....	337	992483....	369	208558....	401	512889....
153	—928407	169	—460191	185	—146572	201	—822244
15,6	6831....	18,8	851....	22	2245....	25,2	1205....
307	742437....	339	496932....	371	388535....	403	877970....
154	—582030	170	—542335	186	—547775	202	—724865
15.8	9960....	19	3043....	22,2	560....	25,4	2115....
309	183113....	341	089566....	373	347313....	405	241295....
155	—893191	171	—701772	187	—910350	203	—128917
16	2910....	19,2	6740....	22.4	9918....	25,6	9002....
311	967502....	343	573474....	375	439760....	407	15058....
156	—480036	172	—010711	188	—050645	204	—385504
16,2	7765....	19,4	207....	22.6	1445....	25,8	94....
313	480766....	345	231915....	377	092972....	409	942....
157	—788424	173	—499153	189	—101179	205	— 24318
16.4	5301....	19.6	783....	22,8	3068....	26	6322....
315	110439....	347	569161....	379	725860....	411	59....
158	—411207	174	—555572	190	—549622	206	— 1538
16.6	8260....	19,8	0003....	23	64131....	26.2	40....
317	717385....	349	147723....	381	933201....	413	3....
159	—308599	175	—724929	191	—463625	207	— 98
16,8	18447....	20	4985....	23.2	556....	26.4	25....
319	066798....	351	244230....	383	802777....	415	....
160	—922[illegible]08	176	—884611	192	—424428	208	— 7
17	6775....	20,2	6691....	23,4	9316....		
321	121252....	353	722052....	385	598505....		
161	—061301	177	—585465	193	—605017		
17,2	4543....	20.4	3434....	23.6	278....		
323	532697....	355	765029....	387	905956....		
162	—162397	178	—806601	194	—380564		
17,4	225....	20,6	8159....	23.8	4574....		
325	126653....	357	786573....	389	057533....		
163	—403771	179	—803406	195	—569299		
17,6	9063....	20,8	1108....	24	6631....		
327	148023....	359	662405....	391	768719....		

Beim 208ten Gliede bricht die auf 264 Decimalen angelegte Rechnung ab, indem dieses Glied $= -\frac{6}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$, mit allen folgenden Gliedern zusammen aber $= -\frac{7}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$ ist. Folglich giebt die Summirung 8 Arctg $\frac{1}{3}$ mit einem möglichen Fehler von $\pm \frac{104}{10^{264}}$ behaftet, und da die Summirung die 261ste bis 264ste Stelle $=4968$ giebt, so sind diese 261ste bis 264ste Stelle innerhalb der Grenzen 4864.... und 5071.... eingeschlossen. Die Bruchstellen sind also nur bis zur 260sten inclusive absolut sicher; wir haben deswegen in der oben angegebenen Summe die 4 letzten Ziffern 4968 eingeklammert. Bei der Halbirung zieht sich der Fehler $\pm \frac{104}{10^{264}}$ auf $\pm \frac{52}{10^{264}}$ zusammen; die 3 letzten Ziffern von 4 Arctg $\frac{1}{3}$, nämlich 484, sind also innerhalb der Grenzen 432.... und 535.... schwankend; es brauchten also in dem oben angegebenen Werthe von 4 Arctg $\frac{1}{3}$ nur 3 Ziffern eingeklammert zu werden.

III.

In dem nun folgenden Theil der Tabelle steht links die Ordnungszahl m des Gliedes der 4 Arctg $\frac{1}{7}$ ausdrückenden unverwandelten Reihe, rechts aber die 259ste bis 264ste Stelle von $\frac{4}{7^{2m-2}}$, von $\frac{4}{7^{2m-1}}$ und von $\frac{4}{(2m-1)\,.\,7^{2m-1}}$. Das erste Glied, welches die Periode 571428.... bildet (so dass 571429 in die Summirung tritt) ist weggelassen.

	653061....		382548....		345841....		571667....
2	236151....	7	054649....	12	906548....	17	510238....
	—412051		+773435		—865502		+197280
	462307....		579235....		272364....		358605....
3	066043....	8	939890....	13	896052....	18	622657....
	+013209		—462659		+795842		—789219
	438006....		848555....		128007....		946093....
4	491143....	9	549793....	14	018286....	19	992299....
	—498735		+561753		—185862		+297089
	498734....		364256....		574040....		141757....
5	214104....	10	623465....	15	082005....	20	591679....
	+690456		—138077		+347655		—835684
	744872....		946209....		011715....		513097....
6	677838....	11	420887....	16	001673....	21	501871....
	—516167		+115280		—774248		+963460

	785981....		913223....		839518....		982573....
22	540854....	30	273317....	38	405645....	46	140367....
	—059090		—699548		—272075		—540004
	505836....		467616....		343663....		020052....
23	357976....	31	781088....	39	763380....	47	717150....
	+963511		+980018		+607317		+276528
	051139....		540155....		680482....		959592....
24	578734....	32	934307....	40	525783....	48	422798....
	—097420		—760862		—272478		—172872
	796962....		847758....		217969....		917542....
25	113851....	33	549679....	41	602567....	49	131077....
	+430895		+531534		+390155		+104444
	016264....		364239....		800366....		733011....
26	430894....	34	194891....	42	685766....	50	533287....
	—028057		—674551		—695009		—369023
	775842....		456413....		812252....		
27	539406....	35	779487....	43	116036....		
	+179989		+982311		+624895		
	648486....		682783....		159433....		
28	235498....	36	954683....	44	022776....		
	—477009		—661334		—080722		
	747928....		136383....		146110....		
29	392561....	37	876626....	45	878015....		
	+884080		+669543		+032337		

IV.

Der folgende Theil der Tabelle, welcher sich auf die **verwandelte** $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ ausdrückende Reihe bezieht, ist nach dem, was über Tafel II. gesagt worden, von selbst verständlich.

51	+520106	56	+259179	61	+472606	66	+118425
0,04	340804....	0,24	38220....	0,44	567946...	0,64	51579....
103	762331....	113	152736....	123	377826...	133	030965...
52	+430493	57	+516657	62	+606243	67	+379818
0,016	718887....	0,056	860932....	p=0,016	265699...	0,68	81827....
21	782404....	23	239854....	q=0,24	985498...	135	869480...
53	+748518	58	+037432	63	+143768	68	+791246
0,12	609822....	0,32	051978....	0,52	434759...	0.72	72969....
107	492976....	117	342200....	127	969635 ..	137	239352...
54	+099157	59	+829504	64	+704211	69	+932334
0,16	055865....	0,36	618621....	0,56	43435....	0,76	14857....
109	028432....	119	897726....	129	695381...	139	164980...
55	+844549	60	+963182	65	+189414	70	+605385
0,2	768909....	0,4	185272....	0,6	513648...	0,8	28430....
111	295896....	121	181513....	131	864041...	141	585853...

+668683	87	+823432	103	+593271	119	+054879
44169....	1,48	0986....	2,12	57773....	2,76	91146....
158522....	175	181848....	207	157455....	239	619476....
+933159	88	+309135	104	+973805	120	+229755
8611....	1.52	50988....	2,16	38341....	2,8	04331....
820228....	177	719260....	209	406573....	241	444936....
+281801	89	+093276	105	+638198	121	+045823
57925....	1,56	7055....	2,2	40403....	2,84	01013....
893073....	179	402755....	211	680749....	243	193604....
+221628	90	+188299	106	+897649	122	+349836
81276....	1,6	50127....	2,24	89073....	2,88	64752....
303500....	181	481703....	213	699049....	245	789183....
+891361	91	+770725	107	+285872	123	+312847
89136....	1,64	18398....	2.28	53178....	2.92	51351....
54894....	185	490550....	215	680399....	247	013412....
+548949	92	+924503	108	+551311	124	+759164
33090....	1,68	03316....	2,32	27904....	2,96	12712....
781365....	185	550943....	217	030190....	249	055257....
+812620	93	+805585	109	+310042	125	+763563
0776....	1,72	62560....	2,36	611....	3	2906....
585887....	187	597890....	219	581324....	251	911408....
+032759	94	+388372	110	+011926	126	+734226
7966....	1,76	12353....	2.4	22862....	3.04	95204....
172183....	189	689885....	221	782859....	253	595787....
+552845	95	+974199	111	+878863	127	+051194
441....	1,8	75355....	2,44	02442....	3,08	27767....
531778....	191	821854....	223	627259....	255	662945....
+656864	96	+679338	112	+170513	128	+561873
58823....	1 84	80998....	2.48	42287....	3.12	35304....
97302....	193	925799....	225	445202....	257	115026....
+767629	97	+983471	113	+504102	129	+518883
0318....	1,88	08892....	2,52	31033....	3,16	0396....
354402....	195	071710....	227	037463....	259	121694....
+239459	98	+974815	114	+534407	130	+544555
98650....	1,92	23164....	2,56	80808....	3,2	34257....
128723....	197	806978....	229	037268....	261	13580....
+284767	99	+549399	115	+335406	131	+43458
45589....	1,96	79682....	2,6	67205....	3,24	14080....
319070....	199	706278....	231	594525....	263	165....
+781173	100	+064306	116	+145766	132	+ 535
54239....	2	12861....	2.64	82482....	3,28	175....
767935....	201	771464....	233	030668....	265	2....
+204393	101	+542928	117	+200965	133	+ 7
8861....	2,04	50757....	2,68	65858....		
352072....	203	446024....	235	826387....		
+092901	102	+509890	118	+134717		
45377....	2,08	62057....	2,72	0064....		
405161....	205	939072....	237	667235....		

Beim 133sten Gliede bricht diese Rechnung ab, indem dieses Glied $= \frac{7}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$, mit allen folgenden Gliedern zusammen aber ebenfalls $= \frac{7}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$ ist. Folglich giebt die Summirung $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$ mit einem möglichen Fehler von $\pm \frac{665}{10^{265}}$ behaftet, und da die Summirung die 262ste bis 264ste Stelle $=489$ giebt, so sind die 262ste bis 265ste Stelle innerhalb der Grenzen 4225.... und 5554.... schwankend. Summirt man $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}$, so ist die Summe, d. i. π, mit einem möglichen Fehler von

$$\pm \left(\frac{104}{10^{264}} + \frac{665}{10^{265}}\right), \text{ d. i. } \pm \frac{1705}{10^{265}},$$

behaftet; da wir nun die 262ste bis 265ste Stelle von $8\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$ $= 9680$, und die 262ste bis 265ste Stelle von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7} = 4890$ fanden, so sind die 262ste bis 265ste Stelle von $\pi = 4570 \pm 1705$, also zwischen 2865.... und 6274.... schwankend.

V.

Die nun folgende Tabelle beginnt mit der 259sten bis 264sten Stelle des in Eins zusammengezogenen 1sten bis 11ten Gliedes von $4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}$; das Uebrige ist nach dem, was wir zu No. I. gesagt haben, von selbst verständlich.

1 bis 11	+372490	21	000000 +780488	31	000000 +344262	41	000000 +283951
12	000000 —347826	22	000000 —627907	32	000000 —507937	42	000000 —168675
13	000000 +000000	23	000000 +111111	33	000000 +076923	43	000000 +647059
14	000000 —851852	24	000000 —680851	34	000000 —761194	44	000000 —126437
15	000000 +517241	25	000000 +755102	35	000000 +028986	45	000000 +494382
16	000000 —516129	26	000000 —980392	36	000000 —070423	46	000000 —406593
17	000000 +515152	27	000000 +660377	37	000000 +739726	47	000000 +376344
18	000000 —428571	28	000000 —727273	38	000000 —666667	48	000000 —789474
19	000000 +054054	29	000000 +929825	39	000000 +558442	49	000000 +164948
20	000000 —512821	30	000000 —677966	40	000000 —620253	50	000000 —414141

51	000000 +980198	62	000000 −065041	73	000000 +068966	84	000000 −095808
52	000000 −582524	63	000000 +000000	74	000000 −217687	85	000000 +781065
53	000000 +904762	64	000000 −031496	75	000000 +859060	86	000000 −187135
54	000000 −663551	65	000000 +968992	76	000000 −960265	87	000000 +011561
55	000000 +302752	66	000000 −580153	77	000000 +973856	88	000000 −571429
56	000000 −504505	67	000000 +962406	78	000000 −806452	89	000000 +723164
57	000000 +725664	68	000000 −370370	79	000000 +178344	90	000000 −687151
58	000000 −304348	69	000000 +459854	80	000000 −805031	91	000000 +707182
59	000000 +273504	70	000000 −151079	81	000000 +875776	92	000000 −945355
60	000000 −008403	71	000000 +056738	82	000000 −748466	93	000000 +675676
61	000000 +198347	72	000000 −965034	83	000000 +575758	94	000000 −994652

VI.

Und nun wird auch der noch übrige Theil der Tafel, welcher sich auf die verwandelte 4 Arctg $\frac{1}{2}$ ausdrückende Reihe bezieht, nach dem, was über Tafel II. gesagt worden, von selbst verständlich. Hier bricht die Rechnung beim 279sten Gliede ab, indem dieses Glied $=\frac{3}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$, mit allen folgenden Gliedern zusammen aber $=\frac{4}{10^{264}} \pm \frac{5}{10^{265}}$ ist. Nach der Summirung ist die 261ste bis 265ste Stelle von 4 Arctg $\frac{1}{2}$, nämlich 59780, mit einem möglichen Fehler von $\pm$ 1395 behaftet.

95	+068783	98	+215041	101	+461221	104	+840399
0,4	227513....	1,6	94406....	0,4	184488....	4	36159....
191	408737....	197	412259....	29	843490....	209	018375..
96	+163495	99	+659615	102	+937396	105	+073500
0,8	73079....	2	3192....	0,64	239933....	4,4	523....
193	555251....	199	063616....	41	754570....	211	848689..
97	+444201	100	+127232	103	+322925	106	+334234
0,08	795536....	0,8	901785....	0,4	3291....	1,6	13477..
13	188015....	67	076525....	23	100996....	71	075130..

107	+720208	122	+737457	137	+431954	152	+760
1,04	10901....	0,32	515986....	17,2	6296....	23,2	245
43	319074....	7	533922....	275	496116....	305	569
108	+211838....	123	+930855	138	+333199	153	+617
0,8	369470....	11,6	9979....	17,6	064....	23,6	965
31	716510....	247	056400...	277	243080....	307	536
109	+173209	124	+854243	139	+278210	154	+654
2	34641....	4	41697....	2	5564....	8	236
73	605112....	83	588605....	31	008974....	103	841
110	+210225	125	+354421	140	+017949	155	+730
6,4	5454....	12,4	9948...	18,4	9302....	24,4	423
221	028100....	251	455595....	281	074796....	311	195
111	+979844	126	+649382	141	+576264	156	+364
6,8	8629....	12.8	1120....	18,8	2337....	24,8	044
223	143407....	253	089523....	283	846559....	313	371
112	+775170	127	+545898	142	+315314	157	+619
0,8	02013....	0,88	2803....	1,28	12360....	$p=0,2$	123
25	751006....	17	796817....	19	490279....	$q=0,4$	247
113	+400805	128	+781199	143	+427558	158	+249
7,6	6461....	13,6	824....	2.8	99716....	25.6	589
227	600884....	257	528331....	41	400672....	317	748
114	+566723	129	+785309	144	+121882	159	+159
8	53378....	2	57061....	20	4376....	26	149
229	268850....	37	237440....	289	896615....	319	066
115	+150803	130	+474882	145	+932310	160	+724
0,4	260321....	1,6	15981....	6,8	9397....	8,8	976
11	104618....	29	430168....	97	762188....	107	960
116	+841847	131	+488269	146	+782884	161	+448
8,8	2082....	14,8	4263....	20,8	8839....	26,8	616
233	900608....	263	089309....	293	442944....	323	428
117	+125357	132	+921773	147	+013256	162	+887
1,84	15065....	15,2	6109....	21,2	88102....	27,2	936
47	662241....	265	467629....	295	332248....	325	938
118	+258525	133	+107966	148	+443664	163	+516
3,2	4272....	5,2	16142....	0,8	35493....	9,2	753
79	560234....	89	596718....	11	222151....	109	041
119	+992750	134	+102937	149	+577721	164	+181
10	927....	16	6469....	22	7098....	4	7249
239	460220....	269	922315....	299	416647....	47	1953
120	+602207	135	+757052	150	+166254	165	+7813
10,4	8629....	16,4	2156....	3,2	93201....	28,4	5912
241	537768....	271	098734....	43	864331....	331	9510
121	+592792	136	+019246	151	+765861	166	+8084
0,4	637116....	0,8	61539....	7,6	8205....	3,2	9869
9	843643....	13	53994....	101	126394....	37	5894

+486135	182	+708706	197	+170567	212	+468390
9951....	35,2	3464....	41,2	6273....	47,2	90....
073092....	365	870434....	395	413090....	425	234043....
+534314	183	+439305	198	+419310	213	+846842
2156....	35,6	0392....	41,6	843....	6,8	95852....
577253....	367	619725....	397	872592....	61	997489....
+086693	184	+662232	199	+699857	214	+982927
86693....	4	64892....	2	39971....	16	7268....
655634....	41	845420....	19	036834....	143	762118....
+556345	185	+381681	200	+073669	215	+193894
312....	5,2	58474....	42,4	5235....	48,4	5844....
972305....	53	422295....	401	897939....	431	202306....
+558102	186	+595939	201	+472627	216	+191611
0556....	36,8	7305....	42,8	8284....	48,8	150....
603226....	373	325994....	403	653778....	433	425384....
+654197	187	+996597	202	+381708	217	+958777
8036....	12,4	157....	0,32	082146....	16,4	3239....
223079....	125	663972....	3	793902....	145	034198....
+720032	188	+833262	203	+694049	218	+360855
55....	37,6	1306....	43,6	8605....	49,6	098....
529452....	377	986295....	407	244948....	437	749109....
+730700	189	+684697	204	+279756	219	+155832
382....	38	018....	44	3092....	50	791....
199801....	379	756424....	409	585036....	439	865958....
+393646	190	+744112	205	+741587	220	+297931
47237....	12,8	32463....	14,8	3754....	0,8	63834....
876434....	127	974363....	137	399573....	7	47113...
+651721	191	+671848	206	+513690	221	+376906
5764....	38,8	46768....	6,4	48761....	50,8	946....
908361....	383	902537....	59	212096....	443	976020....
+194268	192	+818453	207	+957417	222	+981821
649....	5,6	78333....	45,2	0752....	51,2	2692....
087871....	55	869426....	415	517969....	445	755015....
+517323	193	+868788	208	+812230	223	+856785
62771....	4,4	82266....	15,2	945....	17,2	736....
148077....	43	415553....	139	473469....	149	878233....
+036925	194	+228434	209	+596733	224	+105615
2554....	40	1373....	46	449....	52	49....
222944....	389	545574....	419	965624	449	744110....
+580099	195	+822975	210	+418734	225	+693746
155....	40,4	648....	46,4	4292....	52,4	752....
018227....	391	388294....	421	561564....	451	063622....
+427023	196	+687080	211	+656602	226	+533819
7534....	13,6	3442....	5,2	0143....	17,6	5952....
267991....	131	203718....	47	205459....	151	659164....

227	+401293	241	+818943	255	+011008	269	+8
53,2	748....	2,8	0930....	9,2	9012....	10	7
455	620662....	23	209519....	73	822068....	77	3
228	+819228	242	+786654	256	+163031	270	+4
53.6	910....	59,2	569....	2,4	99127....	70,4	7
457	544462....	485	506776....	19	219106....	541	5
229	+783174	243	+401175	257	+525857	271	+4
2	56634....	59,6	7100....	65,2	485....	23,6	0
17	104892....	487	362220....	515	779661....	181	2
230	+209785	244	+188316	258	+033953	272	+1
54.4	412....	20	7663....	65,6	8273....	71,2	6
461	239066....	163	314038....	517	510703....	545	
231	+005233	245	+280775	259	+102181	273	+6
54,8	4867....	60,4	358....	22	2479....	71,6	1
463	749471....	491	933362....	173	740475....	547	
232	+271030	246	+575069	260	+290451	274	+
18,4	9869....	60,8	564....	66,4	0859....	8	7
155	356587....	493	674594....	521	967927....	61	
233	+961206	247	+015343	261	+470414	275	+
55,6	8430....	6,8	5043....	66,8	4236....	72,4	8
467	730109....	55	509369....	523	675851....	551	
234	+794096	248	+463715	262	+346890	276	+
8	3527....	61,6	1648....	$p=0,16$	575502....	10,4	
67	743195....	497	439564....	$q=0,8$	87751....	79	
235	+945564	249	+477193	263	+860402	277	+
18,8	376....	62	5859....	67,6	363....	24,4	
157	286277....	499	385725....	527	806186....	185	
236	+582017	250	+915002	264	+898222	278	+
56,8	8585....	20,8	6320....	68	0791....	73,6	
473	085797....	167	149191....	529	912851....	557	
237	+473274	251	+303186	265	+073874	279	+
57,2	671....	62,8	240....	7,6	5614....		
475	217838....	503	358455....	59	391082....		
238	+260361	252	+911014	266	+772228		
6,4	4663....	63,2	176....	68,8	329....		
53	004912....	505	255269....	533	097133....		
239	+631440	253	+133022	267	+482794		
58	623....	21,2	4200....	69,2	4093....		
479	757059....	169	278893....	535	552304....		
240	+909444	254	+712545	268	+219457		
58,4	9115....	64	602....	23,2	091....		
481	808543....	509	125171....	179	72748....		

XIV.

Ordnungselemente der einförmigen involutorischen Grundgebilde.

Von
Herrn *Christoph Paulus*,
Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt auf dem Salon bei Ludwigsburg.

Wer die Entwickelung vefolgt, welche die Methode der neueren Geometrie im Laufe der drei letzten Decennien erfahren hat, der wird bemerken, dass die Erforschung der einförmigen Grundgebilde (des geraden Gebildes und des Strahlenbüschels) von grossem Gewicht war, auch wird ihm die bedeutende Stelle nicht entgehen, welche die Involution der einförmigen Grundgebilde in dem ganzen Bereich der neueren Geometrie überall spielt. In Betreff der letzteren bin ich vor Kurzem auf eine Entdeckung geführt worden, die für die Methode der neueren Geometrie von hoher Bedeutung ist, die ich aber in meinen Grundlinien der neueren Geometrie nicht mehr berücksichtigen konnte. Ich erlaube mir daher dieselbe auf diesem Wege zur Kenntniss des mathematischen Publikums zu bringen. Man wird mir hierbei gestatten die Benennungen des geraden Gebildes und des Strahlenbüschels mit denen der geraden Punktreihe und des Vielstrahls zu vertauschen. Meine Gründe für diese Veränderung habe ich in meinen Grundlinien aus einander gesetzt.

A. Ordnungspunkte der geraden involutorischen Punktreihe.

Die Punkte zweier in einer Richtung vereinigter Reihen *CDE* und *CD'E'* bilden bekanntlich eine Involution, wenn sie in glei-

cher Ordnung auf einander folgen und gegen einen und denselben Punkt Q jener Richtung eine solche Lage haben, dass die Producte der Abschnitte zwischen diesem Punkt Q und den homologen Punkten der zwei Reihen einen constanten Werth haben, d. h. wenn

$$QC.QC' = QD.QD' = QE.QE'.$$

Der Punkt Q selbst ist ein Punkt dieser Involution und zwar derjenige, welcher dem unendlich entfernten Punkt Q' der Richtung entspricht. Er heisst der Centralpunkt der Involution. Die Involution heisst einstimmig oder entgegengesetzt, je nachdem die zwei Reihen CDE und $C'D'E'$ nach der gleichen oder nach entgegengesetzter Richtung auf einander folgen. In der einstimmigen Involution liegen jede zwei einander zugeordnete Punkte auf den entgegengesetzten Seiten des Centralpunktes Q, in der entgegengesetzten Involution liegen jede zwei solche Punkte auf einer und derselben Seite von Q. Alle diese Merkmale wurden von jeher unterschieden, auch hat man erkannt, dass die entgegengesetzte Involution stets zwei Punkte hat, in deren jedem zwei einander zugeordnete Punkte vereinigt sind, und hat dieselben Hauptpunkte oder auch Ordnungspunkte genannt. In der einstimmigen Involution hat man dagegen keine derartigen Punkte entdeckt; sie schien daher ein Merkmal zu entbehren, das der entgegengesetzten Involution überall eine so fruchtbare Anwendung verliehen hatte. Man kann daher billig die Frage stellen, ob dieser Mangel wirklich in dem Wesen der einstimmigen Involution oder nicht etwa blos in einer mangelhaften und zu beschränkten Auffassung dieser Verhältnisse zu suchen sei. Eine genauere Untersuchung der Sache wird das Letztere bestätigen.

Zuerst mag bemerkt werden, dass es unstatthaft ist, den Centralpunkt Q für sich und ohne seine Beziehung zu dem ihm zugeordneten unendlich entfernten Punkte Q' aufzufassen. Denn die Methode der neueren Geometrie ist durchaus darauf hingewiesen, auf jeder Richtung den Punkt des unendlichen Raumes als einen bekannten vorauszusetzen. Dieser Punkt des unendlichen Raumes ist selbst der wichtigste auf der ganzen Ausdehnung jener Richtung, weil er allein durch eine spezifische Lage ausgezeichnet ist. Auch der Centralpunkt Q gewinnt nur erst durch jenen Punkt Q' des unendlichen Raumes seine Bestimmtheit. Es wird daher zweckdienlich sein, diese zwei Punkte mit dem gemeinschaftlichen Namen der **Normalpunkte** zu bezeichnen.

Vergleicht man nun die Normalpunkte mit den Hauptpunkten einer entgegengesetzten Involution, so wird man leicht das Ge

meinsame dieser zwei Begriffe entdecken, welches darin besteht, dass der Abstand der conjugirten Punkte in ihnen durch einen extremen Werth ausgezeichnet ist. Die Entfernung der zwei Normalpunkte ist nämlich unendlich gross, während die Entfernung der zwei conjugirten Punkte, welche in einem Hauptpunkt vereinigt sind, unendlich klein ist. Will man zugleich aber auch die Beziehung zu den Strecken mit in den Begriff aufnehmen, welche durch jedes Paar der übrigen einander zugeordneten Punkte bestimmt werden — und hiezu ist man durch die Methode der neueren Geometrie, welche nur relative und keine absoluten Maasse kennt, durchaus aufgefordert — so wird man sagen: die Entfernung der zwei einander zugeordneten Punkte ist bei den Normalpunkten ein Maximum und bei den Hauptpunkten ein Minimum. Hiemit ist aber nicht nur der sachgemässe, sondern auch der Ausdruck gefunden, welcher eben so gut für die einstimmige Involution als für die entgegengesetzte zu Ordnungspunkten führt.

Ordnungspunkte einer Involution heissen also diejenigen Punkte, in welchen die Entfernung zweier einander zugeordneter Punkte ein Minimum ist.

Bei der entgegengesetzten Involution kann man immerhin den Begriff der Hauptpunkte als eines besonderen Falles der Ordnungspunkte beibehalten. Weil in der entgegengesetzten Involution jede zwei einander zugeordneten Punkte auf der gleichen Seite liegen, so erreicht die Entfernung solcher Punkte von einander nur dann ihr Minimum, wenn sie coincidiren. Weil aber das Product der Entfernungen zweier einander zugeordneter Punkte vom Centralpunkt eine constante Grösse hat, so ist die Entfernung eines Hauptpunktes vom Centralpunkt das geometrische Mittel zwischen den Entfernungen zweier anderer zugeordneter Punkte von diesem Centralpunkt. Zugleich sieht man, dass diese Involution zwei Hauptpunkte zu beiden Seiten des Centralpunktes hat.

In der einstimmigen Involution liegen jede zwei einander zugeordneten Punkte C und $\mathfrak{C}'$ (Taf. II. Fig. 1.) auf den entgegengesetzen Seiten des Centralpunktes Q, ihre Entfernung $C\mathfrak{C}'$ ist also der Summe $(QC + Q\mathfrak{C}')$ der Abschnitte gleich, welche zwischen ihnen und dem Centralpunkte liegen. Weil aber auch hier das Product $QC . Q\mathfrak{C}'$ eine constante Grösse hat, so wird die Entfernung derjenigen Punkte M und N ein Minimum sein, deren Abstände vom Centralpunkt einander gleich sind. Zu diesem Schluss berechtigt schon der bekannte Satz, dass von allen Rechtecken gleichen Inhalts das Quadrat den kleinsten Umfang hat. Es ist also auch hier die Entfernung (QM) eines Ordnungspunktes vom Centralpunkt das geometrische Mittel zwischen den Ent-

fernungen (QC und $Q\mathfrak{C}'$) zweier beliebigen einander zugeordneten Punkte der Involution.

Jede Involution hat also zwei Ordnungspunkte, welche auf beiden Seiten des Centralpunktes in gleichen Entfernungen von demselben liegen, und zwar ist die Entfernung eines solchen Ordnungspunktes vom Centralpunkt das geometrische Mittel zwischen den Entfernungen zweier beliebigen einander zugeordneten Punkte vom Centralpunkt.

Es stimmen somit die Ordnungspunkte beider Involutionen hinsichtlich ihres Verhältnisses zum Centralpunkt vollkommen mit einander überein, der einzige Unterschied zwischen ihnen betrifft die Lage der mit ihnen vereinigten einander zugeordneten Punkte der Involution. In beiden Involutionen sind die zwei Ordnungspunkte der Ort zweier einander zugeordneter Punkte, deren Abstand von einander ein Minimum ist; in der entgegengesetzten Involution sind diese zwei Paare der zugeordneten Punkte getrennt; das eine Paar derselben liegt in dem Ordnungspunkt M diesseits des Centralpunkts und das andere Paar befindet sich in dem anderen Ordnungspunkt N jenseits des Centralpunktes. In der einstimmigen Involution findet keine solche Sonderung Statt, sondern es decken sich die zwei Paare der zugeordneten Punkte so, dass die zwei Punkte, welche in dem einen Ordnungspunkt M vereinigt sind, nicht einander, sondern denjenigen zwei Punkten zugeordnet sind, welche in dem anderen Ordnungspunkt coincidiren.

Wie die Normalpunkte, so haben auch die Ordnungspunkte die Eigenschaft, dass alle übrigen Punkte der Involution unmittelbar auf sie bezogen werden können, es kommt selbst den Ordnungspunkten in dieser Beziehung noch ein Vorzug vor den Normalpunkten zu. Hinsichtlich der entgegengesetzten Involution ist nämlich bekannt, dass die Hauptpunkte durch jedes andere Paar einander zugeordneter Punkte harmonisch getrennt werden. Aber auch für die einstimmige Involution besteht ein ganz ähnliches Gesetz. Da nämlich für jede zwei einander zugeordnete Punkte C und $\mathfrak{C}'$ (Taf. II. Fig. 1.) das Product

$$QC.Q\mathfrak{C}' = QM.QN$$

oder

$$QM:QC = Q\mathfrak{C}':QN;$$

so folgt

$$(QM - QC):(QM + QC) = (Q\mathfrak{C}' - QN):(Q\mathfrak{C}' + QN)$$

oder weil

$$QM = QN$$

ist:

$$MC : NC = N\mathfrak{C}' : M\mathfrak{C}'.$$

In der einstimmigen Involution sind also die Entfernungen zweier einander zugeordneter Punkte indirekt proportional, während dieselben Entfernungen in der entgegengesetzten Involution direkt proportional sind. Sagt man nun von den zugeordneten Punkten der entgegengesetzten Involution, dass sie die Ordnungspunkte harmonisch trennen, so kann man in der einstimmigen Involution die Art, wie die Ordnungspunkte von zwei einander zugeordneten Punkten getrennt werden, harmonikal heissen, und man hat den Satz:

In der entgegengesetzten Involution werden die Ordnungspunkte durch jedes Paar einander zugeordneter Punkte harmonisch und in der einstimmigen Involution werden sie harmonikal getrennt.

Für die Normalpunkte selbst verschwindet dieser Unterschied, indem hier die harmonikale Theilung in eine harmonische übergeht. Und dieser Umstand wäre also das Ausgezeichnete derjenigen harmonischen Theilung, welche eine Strecke durch den Punkt in ihrer Mitte und den Punkt des unendlichen Raumes erfährt, dass sie nicht nur harmonisch, sondern auch harmonikal ist.

Soll nämlich eine gegebene Strecke MN in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ getheilt werden, so wird man zu vier Punkten geführt. Zwei dieser Punkte C und $\mathfrak{C}$ liegen auf der endlichen Strecke MN selbst in gleichen Entfernungen von den Punkten M und N; zwei andere Punkte C' und $\mathfrak{C}'$ liegen auf den beiderseitigen Verlängerungen der Strecke MN ebenfalls in gleichen Entfernungen von den Punkten M und N. Die Punkte C und C', welche den Ordnungspunkt M einschliessen, so wie die zwei Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, welche den Ordnungspunkt N einschliessen, theilen die Strecke MN harmonisch; die zwei Punkte C und $\mathfrak{C}'$; C' und $\mathfrak{C}$ theilen die Strecke MN harmonikal, und die Punkte C und $\mathfrak{C}$, C' und $\mathfrak{C}'$ theilen dieselbe symmetrisch. In der Mitte Q von MN fallen zwei innere symmetrische Punkte und in der unendlichen Entfernung der Richtung MN fallen zwei äussere symmetrische Punkte auf einander; die harmonikale Theilung also, welche durch die Mitte Q und den unendlich entfernten Punkt Q' bewirkt wird, ist daher zugleich auch eine harmonische.

Was nun die zwei Ordnungspunkte vor den Normalpunkten in ihrem Verhältniss zur ganzen Involution voraus haben, ist der Umstand, dass durch die ersteren die letzteren bestimmt werden, und somit durch sie die ganze Involution bestimmt ist.

Durch die zwei Ordnungspunkte ist die ganze Involution einer Richtung vollkommen bestimmt, so dass zu jedem gegebenen Punkt sein zugeordneter gefunden werden kann.

Schon hierin offenbart sich ein wichtiges praktisches Moment, das durch den allgemeinen Begriff der Ordnungspunkte gewonnen ist, indem man vermittelst ihrer in den Stand gesetzt ist, eine jede Involution durch zwei Punkte zu heben, während sonst hiezu vier Punkte, nämlich zwei Paare einander zugeordneter Punkte erforderlich waren.

B. Ordnungsstrahlen des involutorischen Vielstrahls.

Dieselbe Erweiterung des Begriffes, welche zu den Ordnungspunkten der involutorischen Reihe führte, ist auch am involutorischen Vielstrahl vorzunehmen. Es mag aber vorausgeschickt werden, dass unter dem Strahl eines Vielstrahls die ganze, beiderseits ins Unendliche sich verlaufende, Gerade verstanden wird, welche durch den Scheitel (Centrum) des Vielstrahls geht. Zwei solche Strahlen eines Vielstrahls bilden aber vier ebene Winkel, zwei Scheitelwinkel, die einander gleich sind, und ihre zwei Nebenwinkel, die die ersteren zu zwei Rechten ergänzen. Wenn nun diese Winkel ungleich sind, so wird nur einer der kleineren zum Maasse für die Bestimmung der Lage der zwei Strahlen benutzt, so dass der rechte Winkel das absolute Maximum des Winkels ist, den überhaupt zwei Strahlen eines Vielstrahls zu machen im Stande sind.

Nun ist bekannt, dass in jedem involutorischen Vielstrahl immer zwei einander zugeordnete Strahlen vorhanden sind, die auf einander senkrecht stehen; sie mögen Normalstrahlen heissen, nicht nur um ihre gegenseitige Stellung zu bezeichnen, sondern auch um ihre Analogie mit den Normalpunkten der involutorischen Punktreihe auszudrücken, welche darin besteht, dass ihr Winkel ein absolutes Maximum ist. Die Hauptstrahlen des entgegengesetzten involutorischen Vielstrahls, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass auf jeder Richtung derselben zwei einander zugeordnete Strahlen coincidiren, bieten den anderen extre-

nen Fall, wo der Zuordnungswinkel ein absolutes Minimum ist. Verallgemeinert man auch hier diese Merkmale dadurch, dass man die relativen Minima und Maxima statt der absoluten setzt, so gewinnt man auch hier, wie oben, den allgemein anwendbaren Begriff der Ordnungsstrahlen.

In jedem involutorischen Vielstrahle heissen also Ordnungsstrahlen diejenigen zwei Strahlen, in welchen der Zuordnungswinkel der Strahlen ein Minimum ist.

Die Kreisinvolution bietet ein sehr einfaches Mittel, um die Ordnungsstrahlen eines jeden involutorischen Vielstrahls zu construiren, für den entgegengesetzten Vielstrahl ist diese Construction in §. 72. meiner Grundlinien zu lesen. Auf eine ganz ähnliche Weise construirt man aber auch die Ordnungsstrahlen des einstimmigen involutorischen Vielstrahls. Ist nämlich P (Taf. II. Fig. 2.) ein solcher Vielstrahl, durch dessen Scheitel eine Kreislinie geht, welche von zwei einander zugeordneten Strahlen-Paaren in den Punkten C, C'; D, D' geschnitten wird, so convergiren die Richtungen CC' und DD' in dem Centrum O der Kreisinvolution, und jeder weitere Strahl des Centrums O bezeichnet auf der Kreislinie zwei weitere Punkte Q und Q', die ihrerseits wieder zwei einander zugeordnete Strahlen PQ und PQ' des involutorischen Vielstrahls P bestimmen. Zieht man nun einen Durchmesser QQ' durch das Centrum O der Kreisinvolution, und eine Sehne MN senkrecht auf QQ', so sind PQ und PQ' die zwei Normalstrahlen, weil QPQ' als Peripheriewinkel im Halbkreis ein Rechter ist, und es sind PM und PN die zwei Ordnungsstrahlen des involutorischen Vielstrahls P. Man sieht nämlich leicht, dass unter allen durch den Punkt O gehenden Sehnen des Kreises die auf QQ' senkrechte Sehne MN die kleinste ist; es ist also auch der Bogen MN der kleinste unter den Bögen, welche durch die Strahlen des Centrums O gebildet werden, und folglich ist auch der Winkel MPN das Minimum unter allen denjenigen Winkeln, welche durch zwei einander zugeordnete Strahlen des involutorischen Vielstrahls gebildet werden. Da nun aber der Durchmesser die Bogen der Sehne halbirt, auf welcher er senkrecht steht, so ist auch Bog. QM = Bog. QN; Bog. $Q'M$ = Bog. $Q'N$, und auch $\angle MPQ = \angle NPQ$.

Es werden also auch im einstimmigen involutorischen Vielstrahl eben so gut wie im entgegengesetzten die Winkel der Ordnungsstrahlen durch die zwei Normalstrahlen halbirt.

Heisst nun auch ein Vierstrahl harmonisch oder harmonikal, wenn er die Eigenschaft besitzt, eine seiner Transversalen, wenn auch nur eine einzige, in vier harmonischen oder harmonikalen Punkten zu theilen, so folgt:

dass die zwei Ordnungsstrahlen mit jedem Paar einander zugeodneter Strahlen im einstimmigen involutorischen Vielstrahl einen harmonikalen, und im entgegengesetzten involutorischen Vielstrahl einen harmonischen Vierstrahl bilden.

Wenn man eine Transversale senkrecht zu einem der Normalstrahlen zieht, so wird man leicht finden, dass die Normalstrahlen auf derselben die Normalpunkte und die Ordnungsstrahlen die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe bezeichnen, welche der involutorische Vielstrahl auf den Transversalen bestimmt; und damit ist der oben ausgesprochene Satz erwiesen. Für andere zu jenem Normalstrahl schief stehende Transversalen hört die Uebereinstimmung der involutorischen Reihe mit dem involutorischen Vielstrahl auf. Obgleich jede Transversale durch den involutorischen Vielstrahl in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, so bezeichnen doch die Normal- und Ordnungsstrahlen nicht mehr die Normal- und Ordnungspunkte der involutorischen Reihe. Nur bei der entgegengesetzten Involution müssen nothwendig die Hauptstrahlen des Vielstrahls auch durch die Hauptpunkte der Reihe gehen, weil das in den Hauptstrahlen vereinigte Paar einander zugeordneter Strahlen auch auf der Transversale nothwendig diejenigen Punkte bezeichnet, in welchen zwei einander zugeordnete Punkte der Involution coincidiren. Im einstimmigen involutorischen Vielstrahl findet diese Uebereinstimmung nicht statt, denn obleich der Winkel der Ordnungsstrahlen ein Minimum ist, so kann man doch eine solche Transversale ziehen, dass die Strecke derselben, welche zwischen den Ordnungsstrahlen liegt, weit entfernt ein Minimum zu sein, selbst als ein Maximum erscheint. Letzteres geschieht wirklich, wenn die Transversale einem Hauptstrahl parallel geht. Nur der harmonische Vielstrahl hat daher auch die Eigenschaft jede Transversale harmonisch zu theilen, der harmonikale theilt nur diejenigen Transversalen, welche auf einem Vielstrahl senkrecht stehen, harmonikal.

C. Anwendung der Ordnungselemente auf die Lehre von den Kegelschnitten.

Die Bedeutung, welche der allgemeine Begriff der Ordnungselemente für die Methode der neueren Geometrie hat, kann mit folgenden Worten kurz bezeichnet werden: der Begriff der Ordnungselemente macht die Begriffe der imaginären Elemente (Punkte und Richtungen) entbehrlich. Hieraus ergiebt sich ein zweifacher Gewinn:

a) Ein formeller. Der Begriff des Imaginären ist schwierig, weil er aller Anhaltspunkte für die Vorstellung entbehrt und nur durch das absolute Abstraktionsvermögen des Geistes gewonnen und festgehalten werden kann. Die Ordnungselemente dagegen können gezeichnet werden, und ihr Begriff ist daher der Vorstellung zugänglich. Auch darf hier nicht übersehen werden, dass der Begriff des Imaginären ursprünglich dem abstrakten Reich der Zahl angehört und daher wohl in der analytischen Geometrie, nicht aber in der Geometrie der Lage gesucht werden sollte. Durch die Beseitigung der imaginären Raumelemente wird also die geometrische Methode der Lage purificirt. Ein zweiter Gewinn ist seiner Natur nach:

b) ein materieller. Zwei zusammengehörige imaginäre Punkte bestimmen wohl eine reelle Richtung, aber sie können dieselbe nicht begränzen; zwei imaginäre Richtungen bestimmen wohl einen Punkt, als den Scheitel eines Winkels, sie bestimmen aber selbst keinen Winkel. Die zwei Ordnungspunkte dagegen bestimmen nicht nur eine Richtung, sondern sie begränzen dieselbe auch, und die zwei Ordnungsstrahlen bestimmen einen Punkt und einen Winkel. Damit werden aber bei der Erforschung der Figuren zwei weitere Dimensionen eingeführt, welche eine tiefere Einsicht in das Wesen derselben gestatten. Ich erlaube mir diese Vortheile an Beispielen zu erläutern.

1) Durch eine Curve zweiter Ordnung ist ein Polarsystem bestimmt, durch welches alle Punkte der Ebene in eine unmittelbare Abhängigkeit von einander versetzt werden, ebenso wie die Punkte der Curve selbst von einander abhängig sind. Wenn also die gegenseitige Stellung von Punkten in dem Polarsystem bekannt ist, so kommt ihnen dieselbe Bedeutung und Wichtigkeit zu, seien sie Punkte der Curven oder sonst Punkte der Ebene, in welcher die Curve liegt. Geht nun irgend eine Richtung durch die Curve, so werden dadurch zwei Punkte der Curve bestimmt. Die Punkte dieser Richtung nämlich, welche in dem Polarsystem

einander conjugirt sind, bilden eine entgegengesetzte Involution, und die Punkte, in welchen sie von der Curve geschnitten wird, sind die Hauptpunkte dieser Involution. Andererseits wird auch durch jene Curvenpunkte die involutorische Reihe der conjugirten Punkte bestimmt. Liegt aber eine Richtung ganz ausserhalb der Curve, so hat sie zwar keine Punkte mit ihr gemeinschaftlich, aber es bilden auch ihre conjugirten Punkte eine Involution, und durch dieselbe ist die Stellung ihrer Punkte in dem Polarsystem bestimmt. Diese Involution ist einstimmig und ihre Ordnungspunkte gehören zwar nicht der Curve selbst an, allein sie haben doch auch die Fähigkeit die ganze Involution dieser Richtung zu bestimmen; sie haben also für die Punkte dieser Richtung ganz dieselbe Bedeutung wie die Punkte, welche die erstbetrachtete Gerade mit der Curve gemein hatte. Um diese ihre Bedeutung anzudeuten, heisse ich die Ordnungspunkte einer gegebenen Richtung, welche durch die involutorische Reihe ihrer conjugirten Punkte bestimmt werden, **uneigentliche Punkte** der Curve, und die Richtung selbst eine **uneigentliche Sekante** der Curve. Es soll also mit diesem Namen lediglich nichts anderes bezeichnet werden, als diejenigen Punkte der Richtung, welche für sie, als einem Gliede des Polarsystems, dem die Curve angehört, ganz die gleiche Bedeutung haben, wie die Curvenpunkte für die Richtung einer eigentlichen Sekante. Wie man sodann auch die endliche Strecke zwischen den zwei Schnittpunkten einer Curve Sehne nennt, so wird die endliche Strecke einer Richtung zwischen ihren zwei uneigentlichen Curvenpunkten eine **uneigentliche Sehne** genannt, und wenn die Richtung durch den Mittelpunkt der Curve geht, so heisst jene Strecke ein **uneigentlicher Durchmesser** derselben.

Dass diese uneigentlichen Punkte dieselbe Bedeutung für die Curve haben wie die eigentlichen, das zeigt folgender Satz:

Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte seiner Curve bestimmt, auch wenn ein oder zwei Paare uneigentlicher Punkte darunter sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes findet sich in §. 118. meiner Grundlinien, nur dass dort noch die imaginären Punkte statt der uneigentlichen gebraucht werden. Ein Beispiel, um den Vortheil zu bemessen, den die Unterscheidung der uneigentlichen Durchmesser gewährt, liefert die Hyperbel.

Es sind nämlich die sogenannten Substituten der Hyperbel in der That nichts anderes als uneigentliche Durchmesser.

Um diess zu zeigen, seien $P\mathfrak{P}$ und $p\mathfrak{p}$ (Taf. II. Fig. 3.) die zwei Asymptoten, CD und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser, GH und JK die Scheiteltangenten des reellen Durchmessers CD, so weit sie zwischen den Asymptoten liegen, so wird man leicht finden, dass $GHJK$ ein Parallelogramm ist, das um ein zweites Parallelogramm $C\mathfrak{C}D\mathfrak{D}$ so beschrieben ist, dass $C\mathfrak{D} \parallel P\mathfrak{P}$ und $D\mathfrak{D} \parallel p\mathfrak{p}$. Diess vorausgesetzt, wird man weiter schliessen, dass $C\mathfrak{D}$ die Berührungssehne der in dem Punkte H convergirenden Tangenten ist, denn die Richtung $C\mathfrak{D}$ geht durch den Berührungspunkt C der Tangente GH und sie geht auch durch den unendlich entfernten Berührungspunkt der Asymptote $P\mathfrak{P}$, weil sie mit derselben parallel ist. Es ist also $C\mathfrak{D}$ die Polare des Punktes H. Ebenso findet man, dass die Richtung $D\mathfrak{D}$ die Polare des Punktes J ist, und aus beiden folgt, dass JH die Polare des Punktes $\mathfrak{D}$ ist. Die Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind also zwei conjugirte Punkte der Richtung, welche durch dieselben geht. Der Convergenzpunkt O ist aber der Centralpunkt der Involution der Richtung $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, weil seine Polare, d. i. die Berührungssehne der Asymptoten im unendlichen Raume liegt, und also auch diese Richtung erst in einem Punkte des unendlichen Raumes schneiden kann. Weil nun aber dieser Punkt O, als der Convergenzpunkt der Diagonalen des Parallelogramms $C\mathfrak{C}D\mathfrak{D}$, in der Mitte zwischen den Punkten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ liegt, so folgt, dass $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die zwei Ordnungspunkte der durch die conjugirten Punkte dieser Richtung gebildeten Involution sind und dass also $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ein uneigentlicher Durchmesser der Hyperbel ist.

Aus dieser Deduction geht auch noch der bekannte Satz hervor, dass die Substitute eines imaginären Hyperbeldurchmessers demjenigen Stück der Scheiteltangente des conjugirten reellen Durchmessers gleich ist, welches zwischen den zwei Asymptoten der Hyperbel liegt. Dieser Satz erscheint bei der bisherigen Betrachtungsweise als ein solcher, der der Hyperbel, im Gegensatz zu der Ellipse, eigenthümlich ist. Die Methode der neueren Geometrie belehrt uns aber eines Anderen, so sehr, dass nur eine etwas andere Fassung nothwendig ist, um dem Satz die Allgemeinheit zu verleihen, in welcher er unmittelbar auch auf die Ellipse seine Anwendung hat. In dieser allgemeinen Fassung nimmt der Satz folgende Gestalt an:

Dasjenige Stück einer Tangente eines Kegelschnitts, welches zwischen den Ordnungspunkten derjenigen involutorischen Reihe liegt, welche auf der Richtung der Tangente durch den involutorischen Vielstrahl der conjugirten Durchmesser bezeichnet

wird, ist dem mit der Tangente parallelen Durchmesser gleich.

In der Hyperbel nämlich sind die Asymptoten nicht nur die Ordnungsstrahlen des involutorischen Vielstrahls, welcher durch die conjugirten Durchmesser gebildet wird, sondern sie sind auch die Hauptstrahlen jenes Vielstrahls, auf deren jedem zwei conjugirte Durchmesser vereinigt sind. Diess verleiht den Asymptoten die Eigenschaft, dass die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe, welche durch den involutorischen Vielstrahl der conjugirgirten Durchmesser bezeichnet werden, zugleich auch die Punkte sind, in welchen die Transversale von den Asymptoten geschnitten wird. Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Tangente der Hyperbel ist also auch unmittelbar der Substitute und dem uneigentlichen zugeordneten (imaginären) Durchmesser gleich. In der Ellipse dagegen ist der involutorische Vielstrahl der conjugirten Durchmesser von entgegengesetzter Aufeinanderfolge, und der Zuordnungswinkel zweier einander zugeordneten Strahlen ist in den Ordnungsstrahlen wohl ein relatives aber kein absolutes Minimum. Dadurch verlieren die Ordnungsstrahlen die Eigenschaft in der volutorischen Reihe, welche die conjugirten Durchmesser auf einer Transversalen bestimmen, durch die Ordnungspunkte der letzteren zu gehen. Ist aber diese Transversale eine Tangente der Ellipse, so bleibt jenen Ordnungspunkten demungeachtet die Eigenschaft, eine Strecke zu begränzen, welche dem parallelen Durchmesser der Ellipse gleich ist. Um diess zu beweisen, bedarf ich eines Satzes, der leicht abzuleiten ist, so dass ich mich damit begnüge ihn anzuführen. Er lautet:

Wenn man von irgend einem Punkte einer elliptischen Curve aus zwei Richtungen zieht, welche mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, so durchschneiden sie die Ellipse in den Endpunkten des mit der Tangente parallelen Durchmessers.

Ist nun MN (Taf. II. Fig. 4.) eine Tangente der Ellipse $R\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, welche dieselbe in dem Punkte Q berührt, und sind M und N die zwei Ordnungspunkte der Involution, welche auf der Richtung MN durch den involutorischen Vielstrahl O der conjugirten Durchmesser gebildet wird, so sind auch OM und ON die Richtungen zweier cojugirten Durchmesser, und zugleich ist $OM = ON$. Zieht man nun $QR \parallel ON$ und $Q\mathfrak{R} \parallel OM$, so ist $R\mathfrak{R}$ nach obigem Hilfssatz derjenige Durchmesser, welcher mit MN parallel ist. Als Parallele zwischen Parallelen ist aber auch $QM = O\mathfrak{R}$, $QN = OR$, folglich auch $MN = R\mathfrak{R}$.

Man wird gelegentlich hier auch bemerken, dass der parallele Halbmesser OR das geometrische Mittel ist zwischen zwei Abschnitten QC und QC', die zwischen dem Berührungspunkte Q und den Richtungen zweier anderen conjugirten Duchmesser liegen.

Diess mag hinreichen, um eine Vorstellung davon zu geben, wie auch die Unterscheidung der Ordnungspunkte einer involutorischen Reihe, so wie überhaupt die Methode der neueren Geometrie, durch den Zug ausgezeichnet ist, dass sie das scheinbar Ungleichartige in einer höheren Einheit vereinigt, und dadurch eine tiefere Einsicht in die Gestaltsverhältnisse der Figuren anbahnt. Es möge nur noch vergönnt sein, folgende zwei Sätze, die sich an das Vorausgehende anschliessen, in der Form auszusprechen, wie sie durch die Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Durchmesser dargeboten werden.

Das Parallelogramm, welches durch die Endpunkte zweier conjugirten Durchmesser bestimmt wird, ist auch in der Hyperbel, wie in der Ellipse, eine constante Grösse.

Die Differenz der Quadrate zweier conjugirten Hyperbeldurchmesser ist eine constante Grösse.

2) Dieselben Gründe, durch welche man veranlasst war, auf den Richtungen in der Ebene einer Curve zweiter Ordnung theils eigentliche, theils uneigentliche Curvenpunkte zu unterscheiden, machen auch die Unterscheidung von eigentlichen und uneigentlichen Tangenten wünschenswerth. Die in einem äusseren Punkte convergirenden Tangenten sind die zwei Ordnungsstrahlen des involutorischen Vielstrahls, welcher durch die in demselben convergirenden und conjugirten Richtungen gebildet wird. Ist ein Punkt ein innerer, so heissen die zwei Ordnungsstrahlen der einstimmigen Involution seiner conjugirten Richtungen uneigentliche Tangenten des Kegelschnitts. Dieser Name soll auch hier nichts anderes bezeichnen, als diejenigen zwei in einem Punkte convergirenden Richtungen, welche in dem Polarsystem der Curve dieselbe Bedeutung haben, wie die zwei eigentlichen Tangenten für die in ihrem (äusseren) Convergenzpunkt convergirenden Richtungen. Dass auch die uneigentlichen Tangenten dieselbe Bedeutung für die Curven haben, wie die eigentlichen, geht ebenfalls aus §. 118. meiner Grundlinien hervor, indem einer jener dort angeführten Sätze jetzt folgende Gestalt annimmt:

Jede Curve zweiter Ordnung ist durch fünf Tangenten bestimmt, auch wenn ein oder zwei Paare uneigentlicher Tangenten unter denselben sich befinden.

XV.

Entwickelung des Bruches $\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}$ in eine Reihe von der Form $a+b\cos2\varphi+c\cos4\varphi+d\cos6\varphi+e\cos8\varphi+$ etc.,

hergeleitet von
Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*
in Berlin.

Als ich mich vor einiger Zeit damit beschäftigte, den Flächeninhalt von Zonen unserer Erde, also eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids, zu bestimmen, kam es darauf an, die obige Umformung zum Behuf einer einfachern Integration und dann einer leichtern Rechnung herzuleiten. Die Form der Coefficienten a, b, c, etc. war mir in einem Aufsatze gegeben, nicht aber die Art ihrer Herleitung, und da man diese Umformung auch wohl in andern Fällen zweckmässig finden dürfte; so will ich hier zeigen, wie die unten folgenden Werthe dieser Coefficienten sich ergeben.

In Euler's Introductio in analysin infinitorum §. 218. findet man, dass in der aus dem Bruche

$$\frac{A+Bpz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

hergeleiteten recurrirenden Reihe das allgemeine Glied

$$\frac{A\sin(n+1)\varphi+B\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n.$$

ist. Setzt man nun $A=1$, $B=0$ und $p=1$, so entspricht dem Bruche

$$1)\qquad \frac{1}{1-2z\cos\varphi+z^2},$$

in der aus demselben hergeleiteten recurrirenden Reihe, das allgemeine Glied

$$2)\qquad \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}z^n.$$

Nach einem bekannten elementaren Satze der Algebra ist nun

$$3)\qquad \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots\ldots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n,$$

wo die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite offenbar $n+1$ ist. Wenn nun $n+1$ eine gerade Zahl ist, so wird kein mittelstes Glied existiren, sondern es werden die zwei in der Mitte stehenden Glieder sein:

$$4)\qquad \alpha^{\frac{n+1}{2}}.\beta^{\frac{n-1}{2}}+\alpha^{\frac{n-1}{2}}.\beta^{\frac{n+1}{2}};$$

ist hingegen $n+1$ ungerade, so existirt ein mittelstes Glied, und zwar ist dasselbe:

$$5)\qquad \alpha^{\frac{n}{2}}.\beta^{\frac{n}{2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\dfrac{e^{(n+1)\varphi\sqrt{-1}}-e^{-(n+1)\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{(e^{\varphi\sqrt{-1}})^{n+1}-(e^{-\varphi\sqrt{-1}})^{n+1}}{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}};$$

also nach 3), indem man

$$\alpha=e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

und

$$\beta=e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

setzt:

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=e^{n\varphi\sqrt{-1}}+e^{(n-1)\varphi\sqrt{-1}}.e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$

$$+e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}}.e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+\ldots\ldots+e^{\varphi\sqrt{-1}}.e^{-(n-1)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-n\varphi\sqrt{-1}}$$

oder

6) $$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=e^{n\varphi\sqrt{-1}}+e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}}+e^{(n-4)\varphi\sqrt{-1}}+\ldots$$
$$\ldots+e^{-(n-2)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-n\varphi\sqrt{-1}}.$$

Addirt man nun das erste und letzte, das zweite und vorletzte, die dritten Glieder von vorn und von hinten, u. s. w.; so wird offenbar

7) $$\begin{cases} e^{n\varphi\sqrt{-1}}+e^{-n\varphi\sqrt{-1}}=2\cos n\varphi, \\ e^{(n-1)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-(n-1)\varphi\sqrt{-1}}=2\cos(n-1)\varphi, \\ e^{(n-2)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-(n-2)\varphi\sqrt{-1}}=2\cos(n-2)\varphi, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und man kommt, wenn $n+1$ gerade ist, nach 4) zuletzt auf die beiden Glieder

8) $$e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}=2\cos\varphi,$$

wogegen, wenn $n+1$ ungerade ist, das mittelste Glied nach 5)

9) $$e^{0\varphi\sqrt{-1}}=1$$

wird. Nach der Gleichung 2) erhalten wir demnach:

10) $$\begin{cases} \text{für } n=0,\ a=\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}=1, \\ \text{,,}\ \ n=1,\ b=\frac{\sin2\varphi}{\sin\varphi}=2\cos\varphi, \\ \text{,,}\ \ n=2,\ c=\frac{\sin3\varphi}{\sin\varphi}=2\cos2\varphi+1, \\ \text{,,}\ \ n=3,\ d=\frac{\sin4\varphi}{\sin\varphi}=2\cos3\varphi+2\cos\varphi, \\ \text{,,}\ \ n=4,\ e=\frac{\sin5\varphi}{\sin\varphi}=2\cos4\varphi+2\cos2\varphi+1, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und, indem man diese Werthe substituirt, ergiebt sich:

$$\frac{1}{1-2z\cos\varphi+z^2}=1+z.2\cos\varphi$$
$$+z^2(2\cos 2\varphi+1)$$
$$+z^3(2\cos 3\varphi+2\cos\varphi)$$
$$+z^4(2\cos 4\varphi+2\cos 2\varphi+1)$$
$$+z^5(2\cos 5\varphi+2\cos 3\varphi+2\cos\varphi)$$
$$+z^6(2\cos 6\varphi+2\cos 4\varphi+2\cos 2\varphi+1)+ \text{u. s. w.}$$

Ordnet man nun aber die Glieder auf der rechten Seite nach den Cosinussen derselben Winkel, so erhält man:

$$\frac{1}{1-2z\cos\varphi+z^2}=1+z^2+z^4+z^6+\text{etc.}$$
$$+z[1+z^2+z^4+z^6+\text{etc.}]2\cos\varphi$$
$$+z^2[1+z^2+z^4+z^6+\text{etc.}]2\cos 2\varphi$$
$$+z^3[1+z^2+z^4+z^6+\text{etc.}]2\cos 4\varphi$$
$$\text{etc.}$$

oder, weil

$$1+z^2+z^4+z^6+\text{etc.}=\frac{1}{1-z^2}$$

ist:

11) $$\frac{1}{1-2z\cos\varphi+z^2}$$
$$=\frac{1}{1-z^2}[1+2z\cos\varphi+2z^2\cos 2\varphi+2z^3\cos 3\varphi+\text{etc}].$$

Die Glieder gehen so regelmässig fort, dass das allgemeine Glied sich von selbst ergiebt. Da nun unsere Aufgabe ist, den Bruch

$$\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}$$

in eine ähnhliche Reihe zu verwandeln, so setzen wir

$$\frac{1}{1-2z\cos\varphi+z^2}=\frac{1}{(1+z^2)(1-\frac{2z}{1+z^2}\cos\varphi)},$$

und so aus 11):

12) $$\frac{1}{1-\frac{2z}{1+z^2}\cos\varphi}$$

$$=\frac{1+z^2}{1-z^2}[1+2z\cos\varphi+2z^2\cos2\varphi+2z^3\cos3\varphi+\text{etc.}].$$

Wenn wir nun endlich

$$\frac{2z}{1+z^2}=\mu$$

setzen, so folgen hieraus die Werthe:

13) $$z=\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu},\ 1+z^2=\frac{2(1-\sqrt{1-\mu^2})}{\mu^2},$$

$$1-z^2=\frac{2\sqrt{1-\mu^2}(1-\sqrt{1-\mu^2})}{\mu^2},\quad \frac{1+z^2}{1-z^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}};$$

mittelst deren wir aus 12) erhalten:

14) $$\frac{1}{1-\mu\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}[1+2\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\cos\varphi$$

$$+2\left(\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^2\cos2\varphi+2\left(\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^3\cos3\varphi+\text{et}$$

und wenn wir in 14) $-\mu$ statt μ setzen, sogleich:

15) $$\frac{1}{1+\mu\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}[1-2\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\cos\varphi$$

$$+2\left(\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^2\cos2\varphi-2\left(\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right)^3\cos3\varphi+\text{et}$$

XVI.

Elementarer Beweis der Formeln von Simpson und Bradley zur Bestimmung der astronomischen Refraction und der Formel für die terrestrische Refraction.

Von
dem Herausgeber.

Vorbemerkung.

Bei der grossen Ausbildung und tief gehenden Behandlung, welche in neuerer Zeit der Theorie der astronomischen Refraction hauptsächlich durch Laplace und Bessel zu Theil geworden ist, haben freilich die berühmten Refractionsformeln von Thomas Simpson und Bradley nicht viel mehr als historischen Werth. Indess empfehlen sich diese Formeln, vorzüglich die erstere, sehr durch die Einfachheit und Eleganz ihrer Form, und gewähren auch bis zu Zenithdistanzen von etwa 85° oder Höhen von 5° eine grosse Genauigkeit. Wegen ihrer Einfachheit sind dieselben vorzüglich auch geeignet für astronomische und nautische Vorlesungen von mehr elementarer Natur, in denen nicht immer hinreichende Zeit geboten sein wird zur vollständigen Entwickelung der zuerst genannten tiefer gehenden Refractionstheorieen. Endlich setzen auch die Formeln von Simpson und Bradley nur die allerersten und allereinfachsten Grundgesetze der Brechung des Lichts voraus, welche sich in jedem physikalischen Lehrbuche finden und sehr leicht durch einfache Versuche erläutert werden können. Zum Behufe astronomischer und nautischer Vorlesungen scheint mir daher ein strenger elementarer Beweis der genannten merkwürdigen Formeln sehr wünschenswerth zu sein. Eine solche elementare Entwickelung findet man zwar in

der Astronomie von J. G. F. Bohnenberger. Tübingen 1811. S. 26., die auch in das in vielen Beziehungen ausgezeichnete Handbuch der Schifffahrts-Kunde von C. Rümker. Fünfte Auflage. Hamburg. 1850. S. 165. aufgenommen worden ist; andere elementare Beweise sind mir nicht bekannt. Ich muss aber gestehen, dass mir dieser Bohnenberger'sche Beweis nie sehr zugesagt hat und ich von demselben daher auch bei meinen Vorlesungen nie Gebrauch gemacht habe; jedenfalls leidet derselbe an mancher Unklarheit und Ungenauigkeit; und ausserdem bringt Bohnenberger dabei den Ausdruck des Brechungsverhältnisses für den leeren Raum und die Luft durch deren Dichtigkeit ($\sqrt{1+kD}$) in Anwendung, dessen man in der That bei diesem Beweise gar nicht bedarf. Ich werde daher im Folgenden einen nach öfter wiederholten Versuchen von mir gefundenen elementaren Beweis der beiden genannten Formeln mittheilen, bei dem ich zugleich die Anzahl der zu Grunde gelegten physikalischen Principien auf ihr Minimum zu reduciren gesucht habe. So wie im Interesse astronomischer und nautischer Vorlesungen habe ich aber auch im Interesse geodätischer Vorlesungen die Entwickelung der bekannten Berechnungsmethode der terrestrischen Refraction angeschlossen, da es wenigstens mir bei solchen Vorlesungen immer höchst unangenehm gewesen ist, wenn ich, wie dies auch fast in allen Lehrbüchern der Geodäsie, selbst in den grösseren, geschieht, den betreffenden Satz ohne scharfe Begründung bloss historisch anzuführen genöthigt gewesen bin; und sind andere, nach wahrer Gründlichkeit strebende Lehrer der Geodäsie, so wie der Astronomie und Nautik, mit mir etwa in gleichem Falle gewesen, so wird denselben, wie ich wünsche, durch die folgenden Zeilen vielleicht ein kleiner Dienst geleistet werden.

---

§. 1.

Es ist ein aus den ersten Elementen der Lehre vom Lichte allgemein bekanntes Gesetz, dass ein Lichtstrahl, welcher aus einem durchsichtigen Körper in einen anderen durchsichtigen Körper von verschiedener Dichtigkeit übergeht, bei dem Uebergange aus dem einen Körper in den anderen von seinem ursprünglichen geradlinigen Wege abgelenkt wird, und zwar in dem dichteren Körper sich mehr nach dem Einfallslothe hin neigt, in dem weniger dichten Körper sich mehr von dem Einfallslothe entfernt, so dass also der in dem dichteren Körper liegende Theil des Einfallsloths immer innerhalb des von dem einfallenden und dem

abgelenkten Strahle, welchen letzteren man auch den gebrochenen Strahl zu nennen pflegt, eingeschlossenen, zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkels liegt. Nach dem Mariotte'schen Gesetze, welches wir hier aus der Physik als bekannt voraussetzen, nach dem nämlich unter Voraussetzung einer gleichen Temperatur die Dichtigkeit der Luft immer dem Drucke, unter welchem sie steht, proportional ist, kann nun offenbar die Dichtigkeit der Luft eine gleichförmige nicht sein, sondern dieselbe muss desto mehr abnehmen, je mehr man sich in der Atmosphäre erhebt, was bekanntlich auch die Erfahrung vollkommen bestätigt. Denkt man sich jetzt die Atmosphäre in mit der sphärischen Erdoberfläche concentrische Schichten von gleicher, aber so kleiner Höhe getheilt, dass wir für's Erste die Luft in jeder Schicht mit hinreichender Annäherung als gleichförmig dicht annehmen können, so wird ein durch die Atmosphäre sich bewegender Lichtstrahl bei dem Uebergange aus jeder Schicht in die nächstfolgende eine Ablenkung von seinem geradlinigen Wege in der vorhergehenden Schicht, eine sogenannte Brechung, erleiden, und kann sich also in der Atmosphäre nicht nach einer geraden Linie bewegen, sondern wird vielmehr immer eine gebrochene Linie beschreiben, welche nothwendig ihre concave Seite der Erde zukehren muss, weil die Dichtigkeit der Schichten von oben nach unten hin zunimmt und in dem dichteren Körper der Lichtstrahl nach dem Einfallslothe hin gelenkt wird oder, wie wir oben gesagt haben, weil der in dem dichteren Körper liegende Theil des Einfallsloths immer innerhalb des von dem einfallenden und dem gebrochenen Strahle eingeschlossenen concaven Winkels liegt. In der Natur selbst findet aber nicht eine solche schichtenweise Abnahme der Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre, wenn man in derselben steigt, Statt, wie wir vorher angenommen haben, sondern die Dichtigkeit der Luft muss in der Atmosphäre stetig nach oben hin abnehmen, und die Linie, welche ein durch die Atmosphäre gehender Lichtstrahl beschreibt, kann also auch keine gebrochene, sondern muss vielmehr eine stetig gekrümmte Linie sein, deren concave Seite der Erde zugekehrt ist. Trifft nun ein solcher krummliniger Strahl das Auge des Beobachters, so wird derselbe den Punkt, von welchem der Strahl ausging, immer nach der Richtung der geraden Linie erblicken, welche die den Strahl darstellende Curve im Auge des Beobachters berührt, und denkt man sich zwischen dem in Rede stehenden Punkte und dem Auge des Beobachters eine gerade Linie gezogen, so wird augenblicklich erhellen, dass der Höhenwinkel, unter welchem der Beobachter diesen Punkt erblickt, jederzeit grösser als der wirkliche Höhenwinkel ist, weil nämlich die Curve, welche der Lichtstrahl beschreibt, ihre con

cave Seite nach der Erde hin kehrt, übrigens aber nach den bekannten Gesetzen der Brechung der Strahlen sich fortwährend in der durch den leuchtenden Punkt und das Auge des Beobachters gelegten vertikalen, also zugleich durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Ebene bewegt. Man sieht also, dass die Höhen der Gestirne durch die sogenannte atmosphärische Strahlenbrechung oder Refraction, mit der wir es hier zu thun haben, wesentlich alterirt werden müssen, weil wir wegen der Refraction alle Gestirne in einer ihre wirkliche Höhe übersteigenden Höhe erblicken, wo wir unter wirklicher Höhe die Höhe verstehen, in welcher wir die Gestirne ohne die Refraction erblicken würden, die also jederzeit der zwischen dem Auge des Beobachters und dem Gestirne gezogenen geraden Linie entspricht. Unter der Strahlenbrechung oder Refraction selbst versteht man den von dieser geraden Linie mit der an den krummlinigen Lichtstrahl im Auge des Beobachters gezogenen Berührenden eingeschlossenen Winkel, um welchen also alle gemessenen oder beobachteten Höhen vermindert werden müssen, um die wahren Höhen zu erhalten. Eben so wie hiernach die Refraction die Höhen vergrössert, vermindert sie in gleichem Maasse die entsprechenden Zenithdistanzen, so dass also zu den gemessenen oder beobachteten Zenithdistanzen jederzeit die Refraction addirt werden muss, um die wahren Zenithdistanzen zu erhalten.

Man sieht hieraus, wie wichtig die Theorie der Refraction, nach welcher man in allen Fällen die Grösse der Refraction bestimmen kann, für alle astronomischen Beobachtungen ist. Die vollständige Entwickelung dieser Theorie ist aber sehr schwierig und setzt sehr tief gehende mathematische Kenntnisse voraus. Indess giebt es zwei von den berühmten englischen Mathematikern Simpson und Bradley gefundene Refractionsformeln, welche sowohl wegen ihrer sehr eleganten Form merkwürdig, als auch deshalb wichtig und bemerkenswerth sind, weil sie vermittelst des geringsten Maasses physikalischer Principien einer ganz elementaren mathematischen Entwickelung fähig und daher auch zu dem Gebrauche bei astronomischen und nautischen Vorlesungen sehr geeignet sind. Für diese Formeln einen strengen elementaren Beweis zu geben, ist der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung, wodurch ich hauptsächlich astronomischen und nautischen Vorlesungen zu dienen beabsichtige; weil aber auch die terrestrische Refraction für die Geodäsie von grosser Wichtigkeit ist, überdies dieselbe in der Nautik bei der Berechnung der Kimmtiefe oder Kimmung in Anwendung kommt, so werde ich hauptsächlich im Interesse geodätischer und nautischer Vorlesungen auch eine elementare Entwickelung der terrestrischen Refraction an-

schliessen, um so mehr, weil mir nicht bekannt ist, dass man eine solche elementare Entwickelung in genügender Weise schon besässe.

§. 2.

Wir müssen bei der Theorie der Refraction nothwendig von einigen Erfahrungssätzen über die Brechung der Lichtstrahlen ausgehen, deren Begründung durch Versuche der Physik überlassen bleiben muss. Diese Erfahrungssätze, deren Zahl wir hier auf ihr kleinstes Maass beschränken werden, sind die folgenden:

I.

Für jede zwei brechende Körper ist das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungswinkels zu einander constant, und dieses Verhältniss erhält seinen reciproken Werth, wenn man die beiden Körper mit einander verwechselt.

Den hiernach für dieselben zwei Körper constanten Bruch, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels dividirt, nennt man den Brechungsexponenten.

Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünneren in einen dichteren, oder aus einem dichteren in einen dünneren Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel, im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

II.

Wenn für die beiden brechenden Körper A und B der Brechungsexponent m, für die beiden brechenden Körper A und C der Brechungsexponent n ist, so ist für die beiden brechenden Körper B und C jederzeit $\frac{n}{m}$ der Brechungsexponent.

Namentlich ist dieser Satz auch für den Fall, wo A der leere Raum ist und B und C beliebige Luftarten oder Gasarten sind, durch viele Versuche ausser allem Zweifel gesetzt worden.

Diese wenigen Erfahrungssätze werden hinreichen, die Theorie der Refraction, so weit wir dies hier beabsichtigen, zu entwickeln.

§. 3.

Der Mittelpunkt der Erde, welche wir als eine Kugel betrachten, sei C. (Taf. II. Fig. 5.) Die Atmosphäre der Erde denken wir uns in n mit der Erdoberfläche concentrische Schichten von gleicher Höhe getheilt, und nehmen für's Erste die Luft in jeder dieser Schichten, welche von oben nach unten die

1ste, 2te, 3te, 4te, ... $n$te

Schicht genannt werden sollen, als gleichförmig dicht an. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... $n$ten

Schicht seien beziehungsweise

$$k_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots.\ k_{n-1}.$$

Trifft nun ein von einem Sterne S ausgehender Lichtstrahl SA_0 die Atmosphäre in A_0, so wird er nach und nach in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... $n$ten

Schicht beziehungsweise nach

$$A_0A_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots.\ A_{n-1}A_n$$

gebrochen und trifft an der Erdoberfläche in A_n das Auge des Beobachters. Ziehen wir die Linien

$$CA_0,\ CA_1,\ CA_2,\ CA_3,\ \ldots.\ CA_{n-1};$$

so sind diese Linien als die Einfallslothe in den Punkten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.\ A_{n-1}$$

zu betrachten, und die über A_n hinaus verlängerte Linie CA_n, ein Radius der Erde, ist die Vertikale des Beobachters in A_n. Bezeichnen wir nun in den Punkten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.\ A_{n-1}$$

die Einfallswinkel durch

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots.\ z_{n-1}$$

und die entsprechenden Brechungswinkel durch

$$\mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{z}_3,\ \ldots.\ \mathfrak{z}_{n-1};$$

so ist nach den Erfahrungssätzen §. 2. I. II.:

$$\frac{\sin z_0}{\sin \mathfrak{z}_0}=k,$$

$$\frac{\sin z_1}{\sin \mathfrak{z}_1}=\frac{k_1}{k},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \mathfrak{z}_2}=\frac{k_2}{k_1},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \mathfrak{z}_3}=\frac{k_3}{k_2},$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \mathfrak{z}_{n-1}}=\frac{k_{n-1}}{k_{n-2}}.$$

Multiplicirt man alle diese Gleichungen in einander und hebt auf der rechten Seite auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\sin z_0 \sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \ldots. \sin z_{n-1}}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots. \sin \mathfrak{z}_{n-1}}=k_{n-1}.$$

Bezeichnen wir nun noch den von dem Strahle $A_{n-1}A_n$ mit der Vertikale des Beobachtungsorts A_n eingeschlossenen spitzen Winkel durch z_n; so haben wir in den Dreiecken

$$A_0CA_1,\ A_1CA_2,\ A_2CA_3,\ A_3CA_4,\ \ldots.\ A_{n-1}CA_n$$

nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie offenbar die folgenden Proportionen:

$$\sin \mathfrak{z}_0 : \sin z_1 = CA_1 : CA_0,$$

$$\sin \mathfrak{z}_1 : \sin z_2 = CA_2 : CA_1,$$

$$\sin \mathfrak{z}_2 : \sin z_3 = CA_3 : CA_2,$$

$$\sin \mathfrak{z}_3 : \sin z_4 = CA_4 : CA_3,$$

u. s. w.

$$\sin \mathfrak{z}_{n-1} : \sin z_n = CA_n : CA_{n-1};$$

aus denen durch Zusammensetzung auf der Stelle die Proportion

$$\left.\begin{array}{l}\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots. \sin \mathfrak{z}_{n-1} \\ : \sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots. \sin z_n\end{array}\right\}=CA_n : CA_0$$

oder die Gleichung

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots. \sin z_n}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots. \sin \mathfrak{z}_{n-1}}=\frac{CA_0}{CA_n}$$

erhalten wird. Aus der Vergleichung der beiden Gleichungen

$$\frac{\sin z_0 \sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots \sin \mathfrak{z}_{n-1}} = k_{n-1},$$

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_n}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots \sin \mathfrak{z}_{n-1}} = \frac{CA_0}{CA_n}$$

oder

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots \sin \mathfrak{z}_{n-1}} = \frac{k_{n-1}}{\sin z_0},$$

$$\frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \mathfrak{z}_0 \sin \mathfrak{z}_1 \sin \mathfrak{z}_2 \sin \mathfrak{z}_3 \ldots \sin \mathfrak{z}_{n-1}} = \frac{1}{\sin z_n} \cdot \frac{CA_0}{CA_n}$$

mit einander ergiebt sich aber auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{k_{n-1}}{\sin z_0} = \frac{1}{\sin z_n} \cdot \frac{CA_0}{CA_n},$$

oder, wenn wir den Halbmesser der Erde $CA_n = R$ setzen, d Höhe der Atmosphäre durch H bezeichnen, also $CA_0 = R + H$ setze

$$k_{n-1} R \sin z_n = (R+H) \sin z_0.$$

Lassen wir nun, um zu dem in der Natur wirklich Statt finde den Falle einer stetigen Veränderung der Dichtigkeit der Luft der Atmosphäre überzugehen, die Anzahl der gleich hohen Schic ten, in welche wir die Atmosphäre getheilt haben, nämlich d Zahl n, in's Unendliche wachsen, so nähert k_{n-1} sich offenb dem Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft der Erdoberfläche, welchen wir durch K bezeichnen wollen, seiner Gränze, und z_n nähert sich augenscheinlich der scheinb ren, d. h. von der Refraction afficirten Zenithdistanz des Ster S in dem Beobachtungsorte auf der Erdoberfläche, welche w durch Z bezeichnen wollen, als seiner Gränze. Gehen wir al zu der Gränzgleichung der Gleichung

$$k_{n-1} R \sin z_n = (R+H) \sin z_0$$

für in's Unendliche wachsende n über, so erhalten wir in d vorher eingeführten Bezeichnungen die Gleichung:

$$KR \sin Z = (R+H) \sin z_0.$$

Ist jetzt (Taf. II. Fig. 6.) A_0A_n der krummlinige Strahl, A_nB die in A_n an denselben gezogene Berührende, O deren Durc schnittspunkt mit der über A_0 hinaus verlängerten Linie SA so ist, wenn wir den Winkel A_0CA_n durch C, den Winkel SOB durch O bezeichnen, in dem Vierecke A_0CA_nO offenbar:

$$z_0 + C + (180^0 - Z) + (180^0 - O) = 360^0,$$

also

$$z_0 = Z + O - C.$$

Der Winkel SA_nB_n ist, wie wir aus §. 1. wissen, die Refraction oder die Strahlenbrechung, und bezeichnen wir dieselbe also durch r, den Winkel A_0SA_n an dem Sterne S aber durch S; so ist in dem Dreiecke SOA_n offenbar

$$O = r + S,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$z_0 = Z + r + S - C.$$

Wegen der gegen die Dimensionen der Erde und ihrer Atmosphäre ungeheuer grossen Entfernung der Gestirne von dem Mittelpunkte der Erde kann man aber den Winkel S ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten und in der vorhergehenden Gleichung vernachlässigen, wodurch man die Gleichung

$$z_0 = Z + r - C$$

erhält, welches, in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$KR \sin Z = (R + H) \sin z_0$$

gesetzt, zu der Gleichung

$$KR \sin Z = (R + H) \sin (Z + r - C)$$

führt.

In dieser Gleichung ist R eine constante Grösse, und, so lange die Temperatur der Luft in der Atmosphäre sich nicht ändert, sind auch K und H constante Grössen. So lange also die Temperatur der Luft in der Atmosphäre sich nicht ändert, ist

$$\frac{KR}{R + H}$$

eine constante Grösse, die wir durch A bezeichnen, also

$$A = \frac{KR}{R + H}$$

setzen wollen. Dann wird die obige Gleichung:

$$A \sin Z = \sin (Z + r - C).$$

Betrachten wir nun wie oben wieder den Lichtstrahl als eine gebrochene Linie, so wollen wir in Taf. II. Fig. 7. einmal überhaupt zwei auf einander folgende geradlinige Theile $A_{\nu-1}A_\nu$ und $A_\nu A_{\nu+1}$

desselben, die in dem Punkte A_p mit einander zusammenstossen, in's Auge fassen. Dann ist in der im Obigen eingeführten Bezeichnung:

$$\frac{\sin z_p}{\sin \mathfrak{z}_p} = \frac{k_p}{k_{p+1}}.$$

In dem Dreiecke $A_p C A_{p+1}$ ist aber

$$\sin \mathfrak{z}_p : \sin z_{p+1} = CA_{p+1} : CA_p$$

oder

$$\frac{\sin \mathfrak{z}_p}{\sin z_{p+1}} = \frac{CA_{p+1}}{CA_p}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der obigen Gleichung

$$\frac{\sin z_p}{\sin \mathfrak{z}_p} = \frac{k_p}{k_{p-1}}$$

durch Multiplication, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\sin z_p}{\sin z_{p+1}} = \frac{k_p}{k_{p-1}} \cdot \frac{CA_{p+1}}{CA_p}.$$

Bezeichnen wir aber den von $A_p A_{p+1}$ mit der Verlängerung von $A_{p-1} A_p$ über den Punkt A_p hinaus an diesem Punkte eingeschlossenen Winkel durch w_p und den Winkel $A_p C A_{p+1}$ durch C_p, so ist offenbar

$$z_{p+1} = z_p + C_p - w_p;$$

also nach dem Obigen

$$\frac{\sin z_p}{\sin (z_p + C_p - w_p)} = \frac{k_p}{k_{p-1}} \cdot \frac{CA_{p+1}}{CA_p}$$

oder

$$\frac{\sin (z_p + C_p - w_p)}{\sin z_p} = \frac{k_{p-1} \cdot CA_p}{k_p \cdot CA_{p+1}}.$$

Wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Einheit addirt und subtrahirt und dann dividirt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\sin (z_p + C_p - w_p) + \sin z_p}{\sin (z_p + C_p - w_p) - \sin z_p} = \frac{k_{p-1} \cdot CA_p + k_p \cdot CA_{p+1}}{k_{p-1} \cdot CA_p - k_p \cdot CA_{p+1}}$$

oder nach einer bekannten Zerlegung der Summe und Differenz zweier Sinusse:

$$\frac{\sin \{z_p + \frac{1}{2}(C_p - w_p)\} \cos \frac{1}{2}(C_p - w_p)}{\cos \{z_p + \frac{1}{2}(C_p - w_p)\} \sin \frac{1}{2}(C_p - w_p)} = \frac{k_{p-1} \cdot CA_p + k_p \cdot CA_{p+1}}{k_{p-1} \cdot CA_p - k_p \cdot CA_{p+1}}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tang}\{z_p+\frac{1}{2}(C_p-w_p)\}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C_p-w_p)}=\frac{k_{p-1}.CA_p+k_p.CA_{p+1}}{k_{p-1}.CA_p-k_p.CA_{p+1}}.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\frac{\sin z_p}{\sin \mathfrak{z}_p}=\frac{\sin z_p}{\sin(z_p-w_p)}=\frac{k_p}{k_{p-1}}$$

oder

$$\frac{\sin(z_p-w_p)}{\sin z_p}=\frac{k_{p-1}}{k_p}$$

und folglich auf ähnliche Art wie vorher:

$$\frac{\sin(z_p-w_p)+\sin z_p}{\sin(z_p-w_p)-\sin z_p}=\frac{k_{p-1}+k_p}{k_{p-1}-k_p},$$

$$\frac{\sin(z_p-\frac{1}{2}w_p)\cos\frac{1}{2}w_p}{\cos(z_p-\frac{1}{2}w_p)\sin\frac{1}{2}w_p}=\frac{k_p+k_{p-1}}{k_p-k_{p-1}}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tang}(z_p-\frac{1}{2}w_p)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}w_p}=\frac{k_p+k_{p-1}}{k_p-k_{p-1}}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\operatorname{tang}\{z_p+\frac{1}{2}(C_p-w_p)\}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C_p-w_p)}=\frac{k_{p-1}.CA_p+k_p.CA_{p+1}}{k_{p-1}.CA_p-k_p.CA_{p+1}},$$

$$\frac{\operatorname{tang}(z_p-\frac{1}{2}w_p)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}w_p}=\frac{k_p+k_{p-1}}{k_p-k_{p-1}}$$

erhält man durch Division die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang}\{z_p+\frac{1}{2}(C_p-w_p)\}}{\operatorname{tang}(z_p-\frac{1}{2}w_p)}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}w_p}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(C_p-w_p)}$$

$$=\frac{k_p-k_{p-1}}{k_{p-1}.CA_p-k_p.CA_{p+1}}\cdot\frac{k_{p-1}.CA_p+k_p.CA_{p+1}}{k_p+k_{p-1}},$$

welche Gleichung man auch auf folgende Art ausdrücken kann:

$$\frac{\operatorname{tang}\{z_p+\frac{1}{2}(C_p-w_p)\}}{\operatorname{tang}(z_p-\frac{1}{2}w_p)}\cdot\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}w_p}{\frac{1}{2}w_p}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(C_p-w_p)}{\frac{1}{2}(C_p-w_p)}}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(C_p-w_p)}{\cos\frac{1}{2}w_p}\cdot\frac{w_p}{C_p-w_p}$$

$$=\frac{k_p-k_{p-1}}{k_{p-1}.CA_p-k_p.CA_{p+1}}\cdot\frac{k_{p-1}.CA_p+k_p.CA_{p+1}}{k_p+k_{p-1}}.$$

Lassen wir nun n in's Unendliche wachsen, so nähern sich

w_p und C_p, also auch w_p und $C_p - w_p$ offenbar der Null als Gränze. Also nähern offenbar die Brüche

$$\frac{\tan g\{z_p + \frac{1}{2}(C_p - w_p)\}}{\tan g(z_p - \frac{1}{2}w_p)}, \quad \frac{\cos\frac{1}{2}(C_p - w_p)}{\cos\frac{1}{2}w_p};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}w_p}{\frac{1}{2}w_p}, \quad \frac{\sin\frac{1}{2}(C_p - w_p)}{\frac{1}{2}(C_p - w_p)}$$

sich sämmtlich der Einheit als Gränze, und die Gränze, welcher die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung sich nähert, ist folglich einerlei mit der Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{w_p}{C_p - w_p}$$

sich nähert. Da nun aber wegen der obigen Gleichung diese Gränze einerlei ist mit der Gränze, welcher unter der gemachten Voraussetzung

$$\frac{k_p - k_{p-1}}{k_{p-1}.CA_p - k_p.CA_{p+1}} \cdot \frac{k_{p-1}.CA_p + k_p.CA_{p+1}}{k_p + k_{p-1}}$$

sich nähert, und da diese letztere Gränze, weil k_{p-1} und k_p bloss von den entsprechenden Dichtigkeiten der Luft, diese Dichtigkeiten aber bei derselben Temperatur nur von den Entfernungen CA_{p-1} und CA_p von dem Mittelpunkte der Erde abhängen, offenbar bloss von der Entfernung CA_p von dem Mittelpunkte der Erde abhängen kann, so hängt auch die Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{w_p}{C_p - w_p}$$

sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, bloss von der Entfernung CA_p von dem Mittelpunkte der Erde ab, so dass also, wenn wir

$$\frac{w_p}{C_p - w_p} = f_p$$

setzen, f_p eine bloss von CA_p abhängende Grösse ist.

Setzen wir nun in der sich hieraus ergebenden Gleichung

$$w_p = f_p(C_p - w_p)$$

für p nach und nach

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots. n-1;$$

so erhalten wir, wobei Taf. II. Fig. 8. zu vergleichen ist, die folgenden Gleichungen:

$$w_0 = f_0(C_0 - w_0),$$
$$w_1 = f_1(C_1 - w_1),$$
$$w_2 = f_2(C_2 - w_2),$$
u. s. w.
$$w_{n-1} = f_{n-1}(C_{n-1} - w_{n-1});$$

wo die Grössen

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$$

respective bloss von

$$CA_0, CA_1, CA_2, CA_3, \ldots CA_{n-1}$$

abhängen. Weil aber die Höhe der Atmosphäre im Verhältniss zu dem Halbmesser der Erde, welchen wir uns als Längeneinheit angenommen denken können, sehr klein ist, so sind die Differenzen der Grössen

$$CA_0, CA_1, CA_2, CA_3, \ldots CA_{n-1}$$

im Verhältniss zu dem Halbmesser der Erde sehr klein, also diese Grössen sehr wenig von einander verschieden, und es können daher auch die Grössen

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$$

nur sehr wenig unter einander verschieden sein. Deshalb wird es verstattet sein, sich für jede dieser Grössen näherungsweise das arithmetische Mittel zwischen allen, n natürlich unendlich gross angenommen, gesetzt zu denken, was, wenn wir dieses arithmetische Mittel durch f bezeichnen, wo f eine von der scheinbaren Zenithdistanz Z nicht abhängende und insofern also constante Grösse ist, nach dem Obigen zu den folgenden Gleichungen führt:

$$w_0 = f(C_0 - w_0),$$
$$w_1 = f(C_1 - w_1),$$
$$w_2 = f(C_2 - w_2),$$
$$w_3 = f(C_3 - w_3),$$
u. s. w.
$$w_{n-1} = f(C_{n-1} - w_{n-1}).$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man, weil offenbar

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{n-1}$$

und, wie, mit Rücksicht darauf, dass wir (Taf. II. Fig. 6.) den Winkel

A_0SA_n, d. h. S, als verschwindend, die Linien SA_0 und SA_n ander parallel angenommen haben, so dass folglich die S brechung $r=\angle SA_nB_n=\angle SOB_n$ ist, eine einfache geom Betrachtung sogleich lehrt,

$$n=w_0+w_1+w_2+w_3+\ldots+w_{n-1}$$

ist, die Gleichung

$$r=f(C-r);$$

also

$$C-r=\frac{1}{f}r,$$

oder, wenn wir

$$B=\frac{1}{f}$$

setzen, wo B eine von der scheinbaren Zenithdistanz abhängende und insofern also constante Grösse ist, die G

$$C-r=Br \text{ oder } r-C=-Br.$$

Führt man nun diesen Werth von $r-C$ in die oben ge Gleichung

$$A\sin Z=\sin(Z+r-C)$$

ein, so wird dieselbe:

$$A\sin Z=\sin(Z-Br).$$

Diese Formel heisst nach ihrem Erfinder Thomas son die Simpson'sche Refractionsformel.

Eine andere Form hat der berühmte englische Atronom ley dieser Formel gegeben. Nach derselben ist nämlich

$$\frac{\sin(Z-Br)}{\sin Z}=A,$$

also

$$\frac{\sin Z+\sin(Z-Br)}{\sin Z-\sin(Z-Br)}=\frac{1+A}{1-A},$$

oder nach bekannten Zerlegungen:

$$\frac{\sin(Z-\frac{1}{2}Br)\cos\frac{1}{2}Br}{\cos(Z-\frac{1}{2}Br)\sin\frac{1}{2}Br}=\frac{1+A}{1-A},$$

also

$$\frac{\tan g(Z-\frac{1}{2}Br)}{\tan g\frac{1}{2}Br}=\frac{1+A}{1-A},$$

folglich

$$\frac{1+A}{1-A}\tan g\tfrac{1}{2}Br=\tan g(Z-\tfrac{1}{2}Br).$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}Br$ immer ein sehr kleiner Bogen *) und man kann also näherungsweise $\frac{1}{2}Br$ für $\tan g\frac{1}{2}Br$ setzen, wodurch die vorhergehende Gleichung folgende Form erhält:

$$\frac{B}{2}\cdot\frac{1+A}{1-A}r=\tan g(Z-\tfrac{1}{2}Br)$$

oder

$$r=\frac{2}{B}\cdot\frac{1-A}{1+A}\tan g(Z-\tfrac{1}{2}Br),$$

oder, wenn wir

$$m=\frac{2}{B}\cdot\frac{1-A}{1+A},\ n=\tfrac{1}{2}B$$

setzen:

$$r=m\tan g(Z-nr),$$

welches die **Bradley'sche Refractionsformel** ist.

Mittelst der **Simpson'schen** Formel

$$\sin(Z-Br)=A\sin Z$$

kann die Refraction r, wenn man die Constanten A und B kennt, leicht und unmittelbar aus der scheinbaren Zenithdistanz Z berechnet werden. Aus der **Bradley'schen** Gleichung

$$r=m\tan g(Z-nr),$$

kann aber die Refraction r, wenn man die Constanten m und n kennt und die scheinbare Zenithdistanz Z gegeben ist, nur durch einiges Probiren und successive Annäherung bestimmt werden.

Weil aber nr immer sehr klein ist, so zeigt diese letztere Formel, dass die Refractionen sich nahe wie die Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen verhalten.

---

*) Man weiss dies aus numerischen Bestimmungen der Constante B in der **Simpson'schen** Formel durch Beobachtungen, von denen nachher die Rede sein wird.

§. 4.

Die in der Simpson'schen Formel

$$\sin(Z-Br)=A\sin Z$$

vorkommenden Grössen A und B sind nach dem Vorhergehenden offenbar nur so lange constant, so lange der Zustand der Atmosphäre ungeändert bleibt, und handelt es sich daher um eine Bestimmung dieser Constanten, so kann natürlich nur von einer Bestimmung derselben für einen bestimmten Zustand der Atmosphäre, d. h. für bestimmte Stände des Barometers und Thermometers, die Rede sein. Ist man zu einer solchen Bestimmung gelangt, so gilt natürlich auch die Formel

$$\sin(Z-Br)=A\sin Z$$

nur für den in Rede stehenden bestimmten Zustand der Atmosphäre oder für die in Rede stehenden bestimmten Stände des Barometers und Thermometers, und demselben Zustande der Atmosphäre entsprechen dann auch nur die mittelst der obigen Formel berechneten Refractionen. Da nun aber die Beobachtungen nothwendig bei sehr verschiedenen Zuständen der Atmosphäre, bei sehr verschiedenen Ständen des Barometers und Thermometers, angestellt werden müssen, so muss man die mittelst der obigen Formel berechneten Refractionen auf jeden andern Zustand der Atmosphäre zu reduciren verstehen, wobei wir bemerken, dass man die aus der Formel berechneten, einem bestimmten Zustande der Atmosphäre entsprechenden Refractionen mittlere, dagegen die daraus abgeleiteten, irgend einem anderen, zur Zeit einer Beobachtung Statt findenden Zustande der Atmosphäre entsprechenden Refractionen wahre Refractionen zu nennen pflegt. Wie man sich nun bei dem in Rede stehenden sehr wichtigen Geschäfte zu verhalten hat, soll jetzt gezeigt werden.

Das Princip, von welchem man bei den Reductionen, deren Ausführung hier gelehrt werden soll, im Allgemeinen ausgeht, ist folgendes:

Die Refractionen sind den Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft proportional.

Durch theoretische Untersuchungen und vielfache genaue Beobachtungen ist die wenigstens sehr nahe Richtigkeit dieses Satzes ausser allem Zweifel gesetzt worden.

Nun hat durch äusserst genaue Versuche Gay Lussac gezeigt, dass, wenn das Volumen einer gewissen Luftmasse bei der Temperatur 0 und einem gewissen Barometerstande der Einheit

gleich gesetzt wird, das Volumen dieser Luftmasse bei der Temperatur t nach dem Centesimalthermometer und demselben Barometerstande

$$1+t.0{,}00375$$

ist, wobei wir auf neuere Bestimmungen des in diesem Ausdrucke vorkommenden numerischen Coefficienten weitere Rücksicht jetzt nicht nehmen wollen.

Ausserdem weiss man, dass nach dem Mariotte'schen Gesetze bei unveränderter Temperatur die Dichtigkeit der Luft dem Drucke, unter welchem sie steht, d. h. dem Barometerstande proportional ist.

Sei nun D die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur 0 und dem mittleren Barometerstande $0^m{,}76$; dagegen $\mathfrak{D}$ die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur t nach dem Centesimalthermometer und dem Barometerstande b für das metrische Barometer; so ist, wenn noch d die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur 0 und dem Barometerstande b bezeichnet, nach den obigen Gesetzen:

$$d:\mathfrak{D}=1+t.0{,}00375:1$$

und

$$D:d=0^m{,}76:b,$$

wo man rücksichtlich der ersten Proportion nicht unbeachtet lassen darf, dass die Dichtigkeiten sich immer umgekehrt wie die Volumina verhalten, natürlich unter Voraussetzung gleicher Massen. Aus den beiden obigen Proportionen folgt:

$$\frac{\mathfrak{D}}{d}=\frac{1}{1+t.0{,}00375},\quad \frac{d}{D}=\frac{b}{0^m{,}76};$$

folglich, wenn man multiplicirt:

$$\frac{\mathfrak{D}}{D}=\frac{b}{0^m{,}76.(1+t.0{,}00375)},$$

oder

$$\mathfrak{D}=\frac{b}{0^m{,}76.(1+t.0{,}00375)}D.$$

Bezeichnet daher r die sogenannte mittlere Refraction bei der Temperatur 0 und dem Barometerstande $0^m{,}76$, dagegen $\mathfrak{r}$ die sogenannte wahre Refraction bei der Temperatur t und dem Barometerstande b, immer in Bezug auf das Centesimalthermometer und das metrische Barometer, so ist nach dem obigen, allen diesen Reductionen zu Grunde zu legenden allgemeinen Princip:

$$\mathfrak{r}=\frac{b}{0^m,76.(1+t.0,00375)}r;$$

folglich umgekehrt:

$$r=\frac{0^m,76.(1+t.0,00375)}{b}\mathfrak{r}.$$

§. 5.

Wir wollen nun zeigen, wie für die Temperatur 0 und den Barometerstand $0^m,76$ die Werthe der Constanten A und B durch Beobachtungen bestimmt werden können, wozu es verschiedene mehr oder weniger genaue Methoden giebt. Wir werden uns jedoch hier der folgenden Methode bedienen, die, wenn auch weniger einfach als manche andere Methoden, doch den Vorzug hat, dass sie, wie die meisten übrigen Methoden thun, zu nur näherungsweise richtigen Voraussetzungen gar keine Zuflucht zu nehmen braucht.

Man messe mit dem Meridiankreise die Zenithdistanzen Z und Z' eines Circumpolarsterns bei seinen beiden Durchgängen durch den Meridian und beobachte gleichzeitig die Stände des Thermometers und Barometers t, b und t', b'. Sind nun r und r' die entsprechenden mittleren Refractionen für die Temperatur 0 und den Barometerstand $0^m,76$; so haben wir die Gleichungen

$$\sin(Z-Br)=A\sin Z,$$
$$\sin(Z'-Br')=A\sin Z';$$

aus denen sich

$$Z-Br=\operatorname{Arc}\sin(A\sin Z),$$
$$Z'-Br'=\operatorname{Arc}\sin(A\sin Z');$$

also

$$r=\frac{Z-\operatorname{Arc}\sin(A\sin Z)}{B},$$

$$r'=\frac{Z'-\operatorname{Arc}\sin(A\sin Z')}{B}$$

ergiebt. Bezeichnen wir nun die wahren Refractionen durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ und setzen der Kürze wegen

$$f=\frac{b}{0^m,76.(1+t.0,00375)},$$

$$f'=\frac{b'}{0^m,76.(1+t'.0,00375)};$$

so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$r = fr, \quad r' = f'r';$$

also nach dem Obigen:

$$r = \frac{fZ - f\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z)}{B},$$

$$r' = \frac{f'Z' - f'\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z')}{B}.$$

Daher sind die wahren Zenithdistanzen:

$$Z + r = \frac{(f+B)Z - f\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z)}{B},$$

$$Z' + r' = \frac{(f'+B)Z' - f'\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z')}{B}.$$

Bezeichnen wir nun den wahren Abstand des Pols vom Zenith durch P, so ist bekanntlich

$$P = \tfrac{1}{2}\{(Z+r) + (Z'+r')\},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$2BP = fZ + f'Z' + (Z+Z')B - f\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z)$$
$$- f'\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z'),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{z} = fZ + f'Z', \quad z = Z + Z'$$

setzen:

$$2BP = \mathfrak{z} + zB - f\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z) - f'\,\mathrm{Arc}\sin(A\sin Z').$$

Beobachtet man nun in derselben Weise wie vorher noch zwei andere Circumpolarsterne, bezeichnet die gemessenen Zenithdistanzen für den einen Stern durch Z_1, Z_1', für den andern Stern durch Z_2, Z_2', und die entsprechenden Stände des Thermometers und Barometers durch t_1, b_1; t_1', b_1' und t_2, b_2; t_2', b_2'; setzt zugleich der Kürze wegen

$$f_1 = \frac{b_1}{0^m,76.(1+t_1.0,00375)},$$

$$f_1' = \frac{b_1'}{0^m,76.(1+t_1'.0,00375)};$$

so wie

$$f_2 = \frac{b_2}{0^m,76.(1+t_2.0,00375)},$$

$$f_2' = \frac{b_2'}{0^m,76.(1+t_2'.0{,}00375)};$$

und

$$\mathfrak{z}_1 = f_1 Z_1 + f_1' Z_1', \quad z_1 = Z_1 + Z_1';$$

so wie

$$\mathfrak{z}_2 = f_2 Z_2 + f_2' Z_2', \quad z_2 = Z_2 + Z_2';$$

so hat man, in Verbindung mit dem Obigen, überhaupt die dr folgenden Gleichungen:

$$2BP = \mathfrak{z} + zB - f\operatorname{Arc sin}(A\sin Z) - f'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z'),$$

$$2BP = \mathfrak{z}_1 + z_1 B - f_1\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1) - f_1'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1'),$$

$$2BP = \mathfrak{z}_2 + z_2 B - f_2\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2) - f_2'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2');$$

welche die drei unbekannten Grössen A, B, P enthalten, die sic also mittelst derselben bestimmen lassen müssen. Zu dem End multiplicire man die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mi

$$z_1 - z_2, \quad z_2 - z, \quad z - z_1$$

und addire sie dann zu einander, so erhält man sogleich die Gleichun

$$\begin{aligned}0 = \;& \mathfrak{z}(z_1 - z_2) + \mathfrak{z}_1(z_2 - z) + \mathfrak{z}_2(z - z_1)\\ & -(z_1 - z_2)\{f\operatorname{Arc sin}(A\sin Z) + f'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z')\}\\ & -(z_2 - z)\{f_1\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1) + f_1'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1')\}\\ & -(z - z_1)\{f_2\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2) + f_2'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2')\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}& \mathfrak{z}(z_1 - z_2) + \mathfrak{z}_1(z_2 - z) + \mathfrak{z}_2(z - z_1)\\ & = (z_1 - z_2)\{f\operatorname{Arc sin}(A\sin Z) + f'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z')\}\\ & + (z_2 - z)\{f_1\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1) + f_1'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_1')\}\\ & + (z - z_1)\{f_2\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2) + f_2'\operatorname{Arc sin}(A\sin Z_2')\},\end{aligned}$$

welche nur die eine unbekannte Grösse A enthält. Diese Glei chung kann freilich nur durch Näherung aufgelöst werden, wa aber keine Schwierigkeit hat, da sich aus der Gleichung

$$\sin(Z - Br) = A\sin Z,$$

weil r immer sehr klein ist, leicht übersehen lässt, dass A de Einheit nahe kommen muss.

Hat man aber A auf diese Weise gefunden, so ergeben sich etwa aus den beiden Gleichungen

$$2BP = \mathfrak{z} + zB - f\,\text{Arcsin}(A\sin Z) - f'\,\text{Arcsin}(A\sin Z'),$$
$$2BP = \mathfrak{z}_1 + z_1B - f_1\,\text{Arcsin}(A\sin Z_1) - f_1'\,\text{Arcsin}(A\sin Z_1');$$

wenn man dieselbe in Bezug auf B und $2BP$ als unbekannte Grössen wie zwei Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Grössen auf gewöhnliche Weise auflöst, auch leicht B und $2BP$, und dann, wenn man mit dem bekannten Werthe von $2B$ in den bekannten Werth von $2BP$ dividirt, auch P, so dass also mittelst der obigen Methode zugleich auch der Abstand P des Pols vom Zenith, folglich auch die Polhöhe $90^0 - P$, unabhängig von der Refraction bestimmt werden kann, wenn auch unser Hauptzweck hier nur die Bestimmung der beiden Constanten A und B war.

Will man statt der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ eine andere Temperatur $\mathfrak{t}$ nach dem Centesimalthermometer und eine andere Barometerhöhe $\mathfrak{b}$ zu Grunde legen, so muss man im Obigen statt des Bruchs

$$\frac{b}{0^m,76.(1+t.0{,}00375)}$$

überall den Bruch

$$\frac{b}{\mathfrak{b}.\{1+(t-\mathfrak{t}).0{,}00375\}}$$

setzen, wo offenbar b und $\mathfrak{b}$ überhaupt bloss in einerlei Maass ausgedrückt zu sein brauchen.

Will man statt des Centesimalthermometers das achtzigtheilige Thermometer gebrauchen, so muss man im Obigen statt der Zahl 0,00375 überall die Zahl

$$\frac{100}{80}.0{,}00375 = \frac{5}{4}.0{,}00375,$$

d. i. die Zahl 0,0046875 setzen.

Kennt man die Constanten A und B der Simpson'schen Formel, so können die Constanten m und n der Bradley'schen Formel

$$r = m\,\text{tang}(Z - nr)$$

mittelst der aus §. 3. bekannten Formeln

$$m = \frac{2}{B}.\frac{1-A}{1+A},\quad n = \frac{1}{2}B$$

leicht berechnet werden.

Dass die Werthe der Coefficienten A, B und m, n, die man in den betreffenden Schriften angegeben findet, manche Verschiedenheiten darbieten, kann nicht befremden, da diese Werthe die Resultate von verschiedenen Beobachtern zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Instrumenten angestellter Beobachtungen sind. Einige der verschiedenen Refractionsformeln wollen wir jetzt anführen.

Nach v. Zach's Sonnentafeln S. 104 *) ist für die Temperatur von 50 Grad des Fahrenheit'schen Thermometers, was mit 8 Grad des achtzigtheiligen Thermometers übereinstimmt, und die Barometerhöhe von 29,6 englischen Zollen $=27,775$ pariser Zollen:

$$\sin(Z-5,9807.r)=0,9983487.\sin Z.$$

Nach Borda **) ist für die Temperatur von 12 Grad des achtzigtheiligen Thermometers und die Barometerhöhe von 28 Zoll 3 Linien pariser Maass:

$$r=57''.\tang(Z-3r).$$

Dies ist die ursprüngliche Bradley'sche Formel.

Nach Laplace ***) ist für die Temperatur 0 und die Barometerhöhe $0^m,76$:

$$r=60'',666.\tang(Z-3,25.r).$$

§. 6.

Aus den in §. 3. angestellten Betrachtungen geht von selbst hervor, dass, wenn in Taf. II. Fig. 9. A ein beliebiger Punkt in der Atmosphäre und B ein Punkt auf der Erdoberfläche ist, n aber eine gewisse constante Grösse bezeichnet,

$$A\hat{C}B-A\hat{O}F=n.A\hat{O}F,$$

also, wenn wir den Winkel ACB durch C bezeichnen,

$$C=(n+1).A\hat{O}F,\ A\hat{O}F=\frac{C}{n+1}$$

*) M. s. Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten, von J. G. F. Bohnenberger. Göttingen. 1795. S. 112.

**) Description et usage du cercle de reflexion par le Chevalier Borda. Paris. 1787. p. 81.

***) Traité élémentaire d'Astronomie physique par Biot. Seconde édition. T. I. Paris. 1810. p. 446.

gesetzt werden kann. Wegen der Kleinheit des Bogens AB wird man denselben aber näherungsweise als einen Kreisbogen betrachten, folglich

$$\widehat{ABF}=\widehat{BAE},\quad \widehat{AOF}=2.\widehat{ABF}$$

und daher nach dem Obigen

$$2.\widehat{ABF}=\frac{C}{n+1},\quad \widehat{ABF}=\frac{C}{2(n+1)}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$i=\frac{1}{2(n+1)}$$

gesetzt wird,

$$\widehat{ABF}=iC$$

setzen können, wo natürlich, so wie n, auch i eine constante Grösse ist.

Den Winkel ABF nennt man in dem hier betrachteten Falle die terrestrische Refraction, wogegen die früher von uns betrachtete Refraction die astronomische Refraction genannt wird, weil jener mit dem Namen der terrestrischen Refraction bezeichnete Winkel ABF gebraucht wird, um die in dem Punkte B gemessene sogenannte scheinbare, d. h. von der Refraction afficirte Zenithdistanz eines terrestrischen Objects A auf die wahre Zenithdistanz zu reduciren, indem man diesen Winkel zu der gemessenen oder scheinbaren Zenithdistanz addirt, von der gemessenen oder scheinbaren Höhe des Objects A subtrahirt. Aus dem Obigen erhellet, dass der in Rede stehende Winkel ABF zu dem Winkel ACB oder C am Mittelpunkte der Erde in einem constanten Verhältnisse steht, indem nach dem Obigen

$$\widehat{ABF}=iC$$

war; und der constante Coefficient i wird der Coefficient der terrestrischen Refraction genannt.

Um den numerischen Werth dieses Coefficienten zu bestimmen, hat man sich der Methode der sogenannten gegenseitigen Zenithdistanzen bedient. Sind nämlich A und B in Taf. II. Fig. 10. zwei Punkte auf der Erde, die sich mit Leichtigkeit besteigen lassen und deren horizontale Entfernung, d. h. der Bogen $A'B'$, durch eine vorher gegangene trigonometrische Messung genau bestimmt worden ist; so messe man in B die Zenithdistanz z von

A, und in A die Zenithdistanz z' von B, wo natürlich z und z' scheinbare, d. h. von der Refraction afficirte Zenithdistanzen sind.

Bezeichnen wir nun die terrestrische Refraction $A\hat{B}F = B\hat{A}E$ durch r, so sind die wahren Zenithdistanzen von A und B beziehungsweise $z+r$ und $z'+r$. Den Winkel C am Mittelpunkte der Erde kann man berechnen, weil der Bogen $A'B'$ als bekannt vorausgesetzt wird; es ist nämlich, wenn R den Halbmesser der Erde bezeichnet, in Secunden ausgedrückt:

$$C = 206264{,}8 . \frac{\overline{A'B'}}{R} = \frac{\overline{A'B'}}{R \sin 1''} = \frac{\overline{A'B'}}{R} . \cot 1'',$$

und in Minuten ausgedrückt:

$$C = 3437{,}7 . \frac{\overline{A'B'}}{R}.$$

Nun sind aber, wenn man sich jetzt alle Winkel in Graden ausgedrückt denkt, die drei Winkel des Dreiecks ABC:

$$180^0 - (z'+r),\quad 180^0 - (z+r),\quad C;$$

also

$$\{180^0 - (z+r)\} + \{180^0 - (z'+r)\} + C = 180^0,$$

woraus sich

$$2r = 180^0 - (z + z' - C),$$

also

$$r = \frac{180^0 - (z + z' - C)}{2}$$

ergiebt. Nun ist aber nach dem Obigen $r = iC$, also

$$iC = \frac{180^0 - (z + z' - C)}{2},$$

und folglich

$$i = \frac{180^0 - (z + z' - C)}{2C}.$$

Werden alle Winkel in Minuten ausgedrückt angenommen, so ist

$$i = \frac{10800 - (z + z' - C)}{2C};$$

und, wenn alle Winkel in Secunden ausgedrückt angenommen werden, so ist

$$i = \frac{648000 - (z + z' - C)}{2C}.$$

Gewöhnlich setzt man nach Delambre

$$i = 0{,}08$$

oder, weil

$$\frac{1}{13} = 0{,}0769$$

ist, auch

$$i = \frac{1}{13}.$$

Andere Angaben sind folgende:

$i = 0{,}1000$ nach den Engländern;
$i = 0{,}0643$ nach Corabeuf;
$i = 0{,}0685$ nach der ostpreussischen Gradmessung;
$i = 0{,}0653$ nach Gauss;
$i = 0{,}0619$ nach Struve.

Hiernach scheint allerdings die gewöhnliche Annahme $i = 0{,}08$ oder $i = \frac{1}{13}$ etwas zu gross zu sein; der Wahrheit näher würde wohl etwa das Mittel zwischen 0,06 und 0,08, also etwa $i = 0{,}07$ kommen.

XVII.

Unter welchen Bedingungen lässt sich $F(x, y)$ als Funktion von $\varphi(x, y)$ darstellen?

Von

Herrn Professor Dr. J. Dienger,
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

In seiner „allgemeinen Auflösung der Zahlengleichungen" (Wien, 1851) hat Herr Simon Spitzer (S. 46 ff.) bereits diese Frage in gewisser Weise beantwortet; wenn ich sie daher hier nochmals vornehme, so geschieht diess bloss darum, um dieselbe

einerseits durch rein analytische Mittel zu lösen, andererseits dieselbe in Etwas zu erweitern.

I.

Seien x, y zwei unabhängige Grössen, $F(x, y)$ eine (bekannte) Funktion derselben, und man stelle sich die Frage, ob es möglich sei, $F(x, y)$ als Funktion einer Grösse $\varphi(x, y)$ darzustellen, welche letztere selbst eine Funktion jener Unabhängigen ist, so dass man etwa habe:

$$F(x, y) = f[\varphi(x, y)]. \tag{1}$$

Wenn (1) identisch besteht, so muss auch sein:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

sein muss, welche Gleichung somit nothwendig ist, damit die angegebene Eigenschaft Statt habe. Umgekehrt, wenn (2) Statt hat, ist $F(x, y)$ eine Funktion von $\varphi(x, y)$. Denn man hat aus (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

ist nun $\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \psi(x, y)$, so hat man also die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \psi(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

welche bekanntlich integrirt wird, wenn man die Gleichungen

$$\partial F = 0, \quad \partial y + \psi(x, y)\partial x = 0 \tag{3'}$$

integrirt. Aus der ersten folgt $F = a$, aus der zweiten folge $\psi'(x, y) = b$, so muss $\psi'(x, y)$ gleich $\varphi(x, y)$ oder eine Funktion dieser Grösse sein. Denn die zweite Gleichung (3′) ist eigentlich $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\partial y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\partial x = 0$ und ist augenscheinlich durch $\varphi(x, y) = b$ oder $\psi'(\varphi(x, y)) = b$ erfüllt, wo ψ' eine willkührliche Funktion bedeutet. Das Integral von (3) ist somit

$$F = \mathrm{F}(\varphi(x, y)),$$

wo F eine willkührliche Funktion bedeutet, und welche Gleichung unsere Behauptung beweist.

Umgekehrt wird man aus der Gleichung (2) diejenige Funktion φ finden können, von welcher F selbst Funktion ist.

In diesem Falle ist F, also auch $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ gegeben, und in der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

ist φ gesucht. Man hat also:

$$\partial \varphi = 0, \ \partial y + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \partial x = 0,$$

und wenn $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$ sich abkürzen lässt, so wird das Integral der zweiten Gleichung von einfacherer Form sein, als $F(x, y) = b$, welche letztere Gleichung allerdings genügen würde. Ist also $\psi(x, y) = b$ das so erhaltene Integral, f' eine willkührliche Funktion, so ist

$$\varphi = f'(\psi(x, y)), \tag{4}$$

worin als einfachste Form enthalten ist:

$$\varphi = \psi(x, y). \tag{4'}$$

Um dann endlich in (1) die Funktion f zu erhalten, ist zu bemerken, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{5}$$

Drückt man auf der zweiten Seite dieser Gleichung Alles als Funktion von φ aus, so erhält man f als Funktion von φ und also auch $F(x, y)$.

Es ist leicht zu übersehen, dass die einfachere Form (4′) immer genügen wird.

Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1) Sei $F(x, y) = 3y^2 + 12xy - 12y + 12x^2 - 24x + 11$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12y + 24x - 24, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 12x - 12;$$

also $\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}=2$, mithin die zu integrirende Gleichung:

$$\partial y+2\partial x=0,\text{ also } \psi(x,y)=y+2x=\varphi(x,y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial x}=6y+12x-12=6(y+2x)-12=6\varphi-12;$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=6\varphi-12,\quad f=3\varphi^2-12\varphi+C,$$

wo C eine Konstante; mithin endlich:

$$3y^2+12xy-12y+12x^2-24x+11=3(y+2x)^2-12(y+2x)+C,$$

woraus $C=11$.

2) $F(x,y)=y^4+2xy^3+3x^2y^2+2x^3y+x^4-3y^2-3xy-3x^2+8.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2y^3+6xy^2+6x^2y+4x^3-3y-6x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4y^3+6xy^2+6x^2y+2x^3-6y-3x.$$

Untersuchen wir nun, ob beide Grössen einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+6x^2y+6xy^2-6x+2y^3-3y & 2x^3+6x^2y+6xy^2-3x+4y^3-6y \\ \underline{4x^3+12x^2y+12xy^2-6x+8y^3-12y} & 2 \\ -6x^2y-6xy^2-6y^3+9y & \end{array}$$

oder dividirt durch $-3y$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+2xy+2y^2-3 & \\ 2x^3+6x^2y+6xy^2-3x+4y^3-6y & 2x^2+2xy+2y^2-3 \\ \underline{2x^3+2x^2y+2xy^2-3x} & x+2y \\ 4x^2y+4xy^2+4y^3-6y & \\ \underline{4x^2y+4xy^2+4y^3-6y} & \\ 0 & \end{array}$$

also ist $2x^2+2xy+2y^2-3$ der grösste gemeinschaftliche Theiler, und wirklich ist:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(2x^2+2xy+2y^2-3)(2y+x),\quad \frac{\partial F}{\partial x}=(2x^2+2xy+2y^2-3)(2x+y).$$

Die zu integrirende Gleichung ist demnach:

$$(2y+x)\partial y+(2x+y)\partial x=0,\quad\text{woraus } y^2+x^2+xy=\varphi(x,y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2(x^2+y^2+xy)-3=2\varphi-3,\quad f=\varphi^2-3\varphi+C,$$

$$y^4+2xy^3+3x^2y^2+2x^3y+x^4-3y^2-3xy-3x^2+8$$
$$=(y^2+x^2+xy)^2-3(y^2+x^2+xy)+C,\quad C=8.$$

3) $F(x,y)=x^6-2x^4y-4x^3y^2+x^2y^2+4xy^3+4y^4-5x^3+5xy$
$+10y^2+6.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x^5-8x^3y-12x^2y^2+2x^2y+4y^3-15x^2+5y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2x^4-8x^3y+2x^2y+12xy^2+16y^3+6x+20y.$$

$$\begin{array}{l|l}
6x^5-8x^3y-12x^2y^2-15x^2+2xy^2+4y^3+5y & -2x^4-8x^3y+2x^2y+12xy^2+5x+16y^3+20y \\
\underline{6x^5+24x^4y-6x^3y-36x^2y^2-15x^2-48xy^3-60xy} & -3x+12y \\
-24x^4y-2x^3y+24x^2y^2+48xy^3+2xy^2+60xy+4y^3+5y & \\
\underline{-24x^4y-96x^3y^2+24x^2y^2+144xy^3+60xy+192y^4+240y^2} & \\
96x^3y^2-2x^3y-96xy^3+2xy^2-192y^4+4y^3-240y^2+5y & \\
=(48y^2-y)(2x^3-2xy-4y^2-5). &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
-2x^4-8x^3y+2x^2y+12xy^2+5x+16y^3+20y & 2x^3-2xy-4y^2-5 \\
\underline{-2x^4+2x^2y+4xy^2+5x} & -x-4y \\
\quad -8x^3y+8xy^2+16y^3+20y & \\
\quad \underline{-8x^3y+8xy^2+16y^3+20y} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(2x^3-4y^2-2xy-5)(3x^2-y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=(2x^3-4y^2-2xy-5)(-x-4y).$$

$$-(x+4y)\partial y+(3x^2-y)\partial x=0,\quad -2y^2+x^3-xy=b,\quad \varphi(x,y)=x^3-2y^2-xy.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2(x^3-2y^2-xy)-5=2\varphi-5,\quad f=\varphi^2-5\varphi+C,$$

$$x^6-2x^4y-4x^3y^2+x^2y^2+4xy^3+4y^4-5x^3+5xy+10y^2+6$$
$$=(x^3-2y^2-xy)^2-5(x^3-2y^2-xy)+C,\quad C=6.$$

4) $F(x,y)=2x^4+4x^3-4x^2y+2x^2-4xy+2y^2+6.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x^3-8xy+12x^2-4y+4x=(x^2+x-y)(8x+4),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-4x^2+4y-4x=(x^2+x-y)(-4),\quad \frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}=-2x-1,$$

$$\partial y-(2x+1)\partial x=0,\quad y-x-x^2=b,\quad \varphi(x,y)=y-x-x^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial x}=4(y-x-x^2)=4\varphi,\quad f=2\varphi^2+C,$$

$$2x^4+4x^3-4x^2y+2x^2-4xy+2y^2+6=2(y-x-x^2)^2+C,\quad C=6.$$

5) $F(x,y)=x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4-2x^2y+2xy^2.$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x^2y-xy^2-1)(4xy-2y^2),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=(x^2y-xy^2-1)(2x^2-4xy),$$

$$(x^2-2xy)\partial y+(2xy-y^2)\partial x=0,$$

welche Gleichung integrirt wird, wenn man $y=xv$ setzt, woraus

$$\frac{\partial x}{x}+\frac{1-2v}{v-v^2}\partial v=0,\quad x^3v(1-v)=b=xy(x-y)=\varphi(x,y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2\varphi-2,\quad f=\varphi^2-2\varphi+C;$$

$$x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4-2x^2y+2xy^2=x^2y^2(x-y)^2-2xy(x-y)+C,$$
$$C=0.$$

II.

Es sei nun ferner die Frage gestellt, in welchem Falle die zwei Gleichungen

$$\varphi(x,y)=0,\quad \psi(x,y)=0 \qquad (6)$$

nicht von einander verschieden sind, d. h. dass sämmtliche Werthe von x und y, welche der einen genügen, auch aus der anderen folgen, was alsdann auf unendlich viele Arten sein kann.

Aus der ersten (z. B.) der Gleichungen (6) folgt, dass y eine Funktion von x; legt man also x einen Werth x' bei, so folgt daraus, dass y einen (oder auch mehrere) Werth y' annehme; legt man x den Werth $x'+\alpha$ bei, wo α unendlich klein, so wird y zu $y'+\beta$, wo ebenfalls β unendlich klein; die Werthe x', y', so wie $x'+\alpha$, $y'+\beta$ müssen nun auch der zweiten Gleichung (6) genügen; also muss man haben:

$$\varphi(x',y')=0,\quad \psi(x',y')=0,\quad \varphi(x'+\alpha,\ y'+\beta)=0,$$
$$\psi(x'+\alpha,\quad y'+\beta)=0;$$

wovon die zwei letzteren, vermöge der zwei ersten, heissen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial y}\beta=0;$$

und woraus man erhält:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \qquad (7)$$

Die Gleichung (7) sagt, nach dem in I. Gezeigten, aus, dass φ eine Funktion von ψ, oder allgemeiner, dass φ und ψ Funktionen einer und derselben Funktion $f(x, y)$ sein müssen. Diess ist nun die erste Bedingung. Die zweite ist aber die, dass diese Funktionen von f zu gleicher Zeit Null sind. Ist also

$$\varphi(x,y)=\varphi'[f(x,y)],\quad \psi(x,y)=\psi'[f(x,y)];$$

so folgen aus $\varphi(x, y)=0$ eine Reihe konstanter Werthe von $f(x, y)$; setzt man diese in $\psi(x, y)$, so wird $\psi(x, y)$ ebenfalls konstante Werthe annehmen, die mithin, wenn die Gleichungen (6) nicht verschieden sein sollen, sämmtlich Null sein müssen.

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn man sich die Frage stellt, in welchem Falle die Gleichungen (6) durch kein System reeller Werthe von x und y zugleich befriedigt werden können.

Um dieselbe zu lösen, setzen wir $z=\varphi(x, y)$, während wir zugleich $\psi(x,y)=0$ haben. Man suche nun die Systeme von Werthen für x, y, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen. Fallen nun sämmtliche Minima von z positiv aus, so wird es offenbar kein System der x, y geben, das $z=0$ macht; fallen sämmtliche Maxima negativ aus, so ist derselbe Fall vorhanden. In diesen Fällen also werden die Gleichungen (6) nicht zugleich bestehen können.

Die Bedingung des Maximums oder Minimums von z ist aber:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

welche Gleichung, wie wir so eben gesehen, aussagt, dass φ und ψ Funktionen derselben Funktion $f(x, y)$ sind. Daraus folgt, dass aus $\psi(x, y)=0$ sich eine Reihe von konstanten Werthen von $f(x, y)$ ergeben, für welche nun auch $\varphi(x, y)$, d. h. z, konstante Werthe annehmen wird. Mit anderen Worten, die Werthe von $\varphi(x, y)$ sind bestimmte Konstanten, wie man auch das System

der Werthe von x, y, das der Gleichung $\psi(x,y)=0$ genügt, wählt. Sind also diese Konstanten nicht Null, so werden sich die Gleichungen (6) widersprechen — durchaus, wenn keine Null ist, theilweise, wenn nicht alle Null sind. Man sieht hieraus, in welcher Weise beide Fragen zusammenfallen.

Beispiel. Sei

$$\varphi(x,y)=x^2+y^2+2x^2y+2xy^2-2x-2y+x^2y^2-6,$$

$$\psi(x,y)=x^2-xy+y^2+2x^2y+2xy^2+x^2y^2-3x-3y+8.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=(1+y)(-2+2x+2y+2xy),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=(1+x)(-2+2x+2y+2xy);$$

woraus

$$\varphi(x,y)=(x+y+xy)^2-2(x+y+xy)-6=0.$$

Eben so

$$\psi(x,y)=(x+y+xy)^2-3(x+y+xy)+8=0.$$

Aus der ersten folgt:

$$x+y+xy=1\pm\sqrt{7},$$

was, in die zweite gesetzt, giebt: $13\mp\sqrt{7}$. Die zwei Gleichungen widersprechen sich demnach vollständig.

III.

Die Untersuchungen des §. I. lassen sich leicht verallgemeinern. Seien zu diesem Ende $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ihrer n unabhängige Veränderliche; ψ eine Funktion derselben; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ ebenfalls Funktionen von jenen Unabhängigen; so soll die Bedingung gefunden werden, die $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ erfüllen müssen, damit ψ eine Funktion sämmtlicher Grössen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sei, man also etwa habe:

$$\psi=F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \tag{8}$$

Aus (8) folgt offenbar:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}&=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_{n-1}}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1},\\ &\vdots\\ \frac{\partial\psi}{\partial x_n}&=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_{n-1}}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Eliminirt man aus diesen n Gleichungen die $n-1$ Grössen

$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}$, so erhält man eine Gleichung zwischen den Differentialquotienten von ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, welche die gesuchte Bedingung ausspricht.

Um diese Gleichung zu finden, kann man aus irgend welchen $n-1$ der Gleichungen (9) die Grössen $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}}$ bestimmen und ihre Werthe in die nicht benützte setzen. Gesetzt z. B., man benütze die erste der Gleichungen (9) nicht, und erhalte aus den übrigen

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} = F_1,\ \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = F_2, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}} = F_{n-1};$$

so wird die Endgleichung sein:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = F_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + F_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}. \qquad (10)$$

Was $F_1, \ldots, F_{n-1}$ anbelangt, so haben bekanntlich diese Grössen alle denselben Nenner, in dem die Differentialquotienten von ψ nicht vorkommen; ferner erhält man aus diesem gemeinschaftlichen Nenner den Zähler von F_1, wenn man ψ an die Stelle von φ_1, den von F_2, wenn man ψ an die Stelle von φ_2 u. s. w. setzt. Endlich folgt aus (9) unmittelbar, dass, wenn $\psi = \varphi_1$, man habe $F_1 = 1$, $F_2 = \ldots = F_{n-1} = 0$. Diess Letztere beachtend, folgt aus (10), dass die Endgleichung erfüllt ist, wenn $\psi = \varphi_1$. Ordnet man die Gleichung (10) nach ψ, so ist aus der Bildung von $F_1, \ldots, F_{n-1}$ leicht zu ersehen, dass sie die Form

$$P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0 \qquad (10')$$

annimmt, worin $P_1, \ldots, P_n$ kein ψ enthalten. Diese Gleichung ist also erfüllt, wenn $\psi = \varphi_1$. Da für $\psi = \varphi_2$ ist $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F_3 = \ldots = F_{n-1} = 0$, so ist die (10), d. h. (10'), auch erfüllt, mithin hat man identisch:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0 \\ \vdots \\ P_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Aus den Gleichungen (11) lässt sich nun leicht beweisen, dass, wenn die Bedingungsgleichung (10') erfüllt ist, auch ψ eine Funktion der Grössen $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ sein wird. Ist nämlich F eine will-

kührliche Funktion dieser Grössen, und multiplizirt man die erste der Gleichungen (11) mit $\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}$, die zweite mit $\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}$ u. s. w., addirt alsdann sämmtliche Gleichungen, so erhält man:

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

welche Gleichung beweist, dass die Funktion F, für ψ gesetzt, der (10') genügt, wodurch dann unsere Behauptung gerechtfertigt erscheint.

Sollte ψ eine Funktion bloss einiger der Grössen $\varphi_1, \ldots$ (ausschliesslich) sein, so würden in den Gleichungen (9) weniger als $n-1$ Grössen zu eliminiren sein, so dass man alsdann mehr als eine Endgleichung erhielte.

In ganz ähnlicher Weise lassen sich auch die Resultate des §. II. verallgemeinern, was wir aber füglich übergehen können, da auch keinerlei Schwierigkeit dabei ist.

XVIII.

Ueber die Anzahl und Summe der Complexionen bei Variationen und Combinationen.

Von dem
Feldmesser Herrn *C. Wasmund*
zu Stralsund.

Das Folgende habe ich mir vor Jahren zu einem praktischen Zwecke durch blosse Induction abgeleitet. Eine Bemerkung, welche mir kürzlich in der „Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten von Hoppe (Cap. XIII.)“ aufstiess, und worin der Herr Verfasser die Meinung ausspricht, dass für die Summe der combinatorischen Producte kein independenter Ausdruck zu existiren scheine, veranlasst mich zu dessen Mittheilung, unter dem Wunsche, dass da-

durch eine weitere Begründung und Vervollständigung des Gegenstandes veranlasst werden möge.

I. Werden die einzelnen Complexionen als Producte gedacht,

so ergeben sich bei genauerer Betrachtung des Gesetzes, nach welchem die höheren Klassen aus den niederen entstehen, folgende Beziehungen:

1) Bei Variationen mit Wiederholung aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots m$, wenn k die Klasse bezeichnet, die recurrirende Gleichung

$$S\overset{k}{V'}(1 \ldots m) = (m+1)_2 \, S\overset{k-1}{V'}(1 \ldots m),$$

und da

$$S\overset{1}{V'}(1 \ldots m) = (m+1)_2$$

ist, überhaupt

$$S\overset{k}{V'}(1 \ldots m) = [(m+1)_2]^k.$$

2) Bei Variationen ohne Wiederholung aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots m$ die recurrirende Gleichung:

$$S\overset{k}{V}(1 \ldots m) = k\{m S\overset{k-1}{V}(1 \ldots m-1) + (m-1) S\overset{k-1}{V}(1 \ldots m-2)$$
$$+ (m-2) S\overset{k-1}{V}(1 \ldots m-3) + \ldots + k S\overset{k-1}{V}(1 \ldots k-1)\}$$

$$S\overset{1}{V}(1 \ldots m) = (m+1)_2$$

$$S\overset{2}{V}(1 \ldots m) = 1.2\{2(m+1)_3 + 3(m+1)_4\}$$

$$S\overset{3}{V}(1 \ldots m) = 1.2.3\{6(m+1)_4 + 20(m+1)_5 + 15(m+1)_6\}$$

$$S\overset{4}{V}(1 \ldots m) = 1.2.3.4\{24(m+1)_5 + 130(m+1)_6 + 210(m+1)_7 + 105(m+1)_8\},$$

was auf das folgende Gesetz schliessen lässt:

$$S\overset{k}{V}(1 \ldots m) = (1.2.3 \ldots k)\{A'(m+1)_{k+1} + A''(m+1)_{k+2} + A'''(m+1)_{k+3} + \ldots$$
$$\ldots + A^{(k)}(m+1)_{2k}\}.$$

3) Bei Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen $1.2.3 \ldots m$ die recurrirende Gleichung:

$$\overset{k}{SC'}(1\ldots\ldots m) = m\overset{k-1}{SC'}(1\ldots\ldots m) + (m-1)\overset{k-1}{SC'}(1\ldots\ldots m-1)$$
$$+ (m-2)\overset{k-1}{SC'}(1\ldots m-2) + \ldots\ldots + 2\overset{k-1}{SC'}(1\ldots\ldots 2) + 1\overset{k}{S}$$

$$\overset{1}{SC'}(1\ldots\ldots m) = (m+1)_2$$

$$\overset{2}{SC'}(1\ldots\ldots m) = (m+2)_3 + 3(m+2)_4$$

$$\overset{3}{SC'}(1\ldots\ldots m) = (m+3)_4 + 10(m+3)_5 + 15(m+3)_6$$

$$\overset{4}{SC'}(1\ldots\ldots m) = (m+4)_5 + 25(m+4)_6 + 105(m+4)_7 + 105(m+4)_8$$

. . . .

$$\overset{k}{SC'}(1\ldots\ldots m) = B'(m+k)_{k+1} + B''(m+k)_{k+2} + B'''(m+k)_{k+3} +$$
$$\ldots\ldots + B^{(k)}(m+$$

4) Bei Combinationen ohne Wiederholung aus den Eleme
1, 2, 3, ... m die recurrirende Gleichung:

$$\overset{k}{SC}(1\ldots m) = m\overset{k-1}{SC}(1\ldots\ldots m-1) + (m-1)\overset{k-1}{SC}(1\ldots\ldots m-2)$$
$$+ (m-2)\overset{k-1}{SC}(1\ldots m-3) + \ldots\ldots + k\overset{k-1}{SC}(1\ldots k$$

$$\overset{1}{SC}(1\ldots m) = (m+1)_2$$

$$\overset{2}{SC}(1\ldots m) = 2(m+1)_3 + 3(m+1)_4$$

$$\overset{3}{SC}(1\ldots m) = 6(m+1)_4 + 20(m+1)_5 + 15(m+1)_6$$

$$\overset{4}{SC}(1\ldots m) = 24(m+1)_5 + 130(m+1)_6 + 210(m+1)_7 + 105(m+1)_8$$

. . . .

$$\overset{k}{SC}(1\ldots m) = A'(m+1)_{k+1} + A''(m+1)_{k+2} + A'''(m+1)_{k+3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots + A^{(k)}(m+$$

Zur Entwickelung der hier vorkommenden, von m unabhä
gen Coefficienten A', A''.... und B', B''.... hat man zunächst nach

$$\overset{k}{SC'}(1) = B'(k+1)_0$$
$$\overset{k}{SC'}(1.2) = B'(k+2)_1 + B''(k+2)_0$$
$$\overset{k}{SC'}(1.2.3) = B'(k+3)_2 + B''(k+3)_1 + B'''(k+3)_0$$
$$\overset{k}{SC'}(1.2.3.4) = B'(k+4)_3 + B''(k+4)_2 + B'''(k+4)_1 + B^{IV}(k+$$

u. s. w.

und

$$B' = S\overset{k}{C}(1)$$
$$B'' = S\overset{k}{C}(1.2) - (k+2)_1 S\overset{k}{C}(1)$$
$$B''' = S\overset{k}{C}(1.2.3) - (k+3)_1 S\overset{k}{C}(1.2) + (k+3)_2 S\overset{k}{C}(1)$$
$$B^{IV} = S\overset{k}{C}(1.2.3.4) - (k+4)_1 S\overset{k}{C}(1.2.3) + (k+4)_2 S\overset{k}{C}(1.2) - (k+4)_3 S\overset{k}{C}(1)$$

u. s. w.

$$S\overset{k}{C}(1) = 1$$
$$S\overset{k}{C}(1.2) = S\overset{k}{C}1 + 2S\overset{k-1}{C}(1) + 2^2 S\overset{k-2}{C}(1) + \ldots. + 2^k$$
$$S\overset{k}{C}(1.2.3) = S\overset{k}{C}(1.2) + 3S\overset{k-1}{C}(1.2) + 3^2 S\overset{k-2}{C}(1.2) + \ldots. 3^k$$
$$S\overset{k}{C}(1.2.3.4) = S\overset{k}{C}(1.2.3) + 4.S\overset{k-1}{C}(1.2.3) + 4^2 S\overset{k-2}{C}(1.2.3) + \ldots. 4^k$$

u. s. w.

Ferner nach 4):

$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k) = A'(k+1)_0$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) = A'(k+2)_1 + A''(k+2)_0$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+2) = A'(k+3)_2 + A''(k+3)_1 + A'''(k+3)_0$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+3) = A'(k+4)_3 + A''(k+4)_2 + A'''(k+4)_1 + A^{IV}(k+4)_0$$

u. s. w.

und

$$A' = S\overset{k}{C}(1\ldots.k)$$
$$A'' = S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) - (k+2)_1 S\overset{k}{C}(1\ldots.k)$$
$$A''' = S\overset{k}{C}(1\ldots.k+2) - (k+3)_1 S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) + (k+3)_2 S\overset{k}{C}(1\ldots.k)$$
$$A^{IV} = S\overset{k}{C}(1\ldots.k+3) - (k+4)_1 S\overset{k}{C}(1\ldots.k+2) + (k+4)_2 S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) - (k+4)_3 S\overset{k}{C}(1\ldots.k)$$

u. s. w.

$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k) = (1.2.3\ldots.k)$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) = S\overset{k}{C}(1\ldots.k) + (k+1)S\overset{k-1}{C}(1\ldots.k)$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+2) = S\overset{k}{C}(1\ldots.k+1) + (k+2)S\overset{k-1}{C}(1\ldots.k+1)$$
$$S\overset{k}{C}(1\ldots.k+3) = S\overset{k}{C}(1\ldots.k+2) + (k+3)S\overset{k-1}{C}(1\ldots.k+2)$$

u. s. w.

Durch Vorstehendes ist die successive Bestimmung der Co ficienten ermöglicht. Bei der Zurückführung dieser Werthe ; Ausdrücke unter den gewöhnlichen Rechnungsformen mag schwierig sein, die Uebersichtlichkeit des Bildungsgesetzes fe zuhalten. Für die weitere Begründung und Entwickelung dür Vieles aus des Herrn Schläfli Abhandlung, Archiv X., pag. 3 und XII., pag. 53. zu benutzen sein.

II. Werden die einzelnen Complexionen als Summ gedacht

und entwickelt man

$$F_{(nkx)} = (x^0 + x^1 + x^2 + ... + x^n)^k = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^k$$
$$= ax^0 + a'x^1 + a''x^2 + ... + a^{(\lambda)}x^\lambda + ... + a^{(kn)}x^{kn} = F,$$

so erhält man bekanntlich in den Exponenten von x alle Variat nen mit Wiederholung der $k$ten Klasse aus den Element 0, 1, 2, ... n, und die Coeffizienten zu x^0, x^1, x^2, ... x^λ....x^{kn} geb respective zugleich die Anzahl dieser Verbindungen zur Sumı 0, 1, 2, ... λ.... kn an; auch ist unschwer zu ersehen, dass F (für $x=$ $=$ der Anzahl der sämmtlichen Verbindungen, $\frac{\partial F}{\partial x}$ (für $x=1$) $=$ d Summe sämmtlicher Verbindungen, $\frac{\partial^\lambda F}{1.2.3....\lambda.\partial x^\lambda}$ (für $x=0$) $=$ d Anzahl der Verbindungen zur Summe λ sein werde, woraus si dann durch Multiplication mit λ auch die Summe der letztern giebt. Für die Variationen ohne Wiederholung, sowie für (Combinationen, leisten die in Folgendem unter F begriffenen Fuı tionen Dasselbe.

1) Bei Variationen mit Wiederholung der $k$ten Klasse a den Elementen 0, 1, 2, 3, ... n:

$$F = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^k, \quad F \text{ (für } x=1) = (n+1)^k, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \text{ (für } x=1) = \frac{n.k}{2}(n+1$$

2) Bei Variationen mit Wiederholung der $k$ten Klasse aus d Elementen 1, 2, 3, ... m:

$$F = \left(\frac{x-x^{m+1}}{1-x}\right)^k, \quad F \text{ (für } x=1) = (m)^k, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \text{ (für } x=1) = \frac{(m+1)k}{2}(n$$

3) Bei Variationen ohne Wiederholung der $k$ten Klasse a den Elementen 0, 1, 2, 3 .... n:

$$F=(1.2.3....k)\left\{\frac{1-x^{n-k+2}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n-k+3}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{n-k+4}}{1-x^3}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{1-x^n}{1-x^{k-1}}\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-x^k}\right\}x^{\frac{k(k-1)}{2}},$$

$$F\,(\text{für }x=1)=(1.2.3....k)\,(n+1)_k,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für }x=1)=(1.2.3....k)\frac{n.k}{2}\,(n+1)_k.$$

4) Bei Variationen ohne Wiederholung der $k$ten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3....m:

$$F=(1.2.3....k)\left\{\frac{1-x^{m-k+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{m-k+2}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{m-k+3}}{1-x^3}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{1-x^{m-1}}{1-x^{k-1}}\cdot\frac{1-x^m}{1-x^k}\right\}x^{\frac{k(k-1)}{2}},$$

$$F\,(\text{für }x=1)=(1.2.3....k)\,(m)_k,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für }x=1)=(1.2.3....k)\frac{(m+1)k}{2}\,(m)_k.$$

5) Bei Combinationen mit Wiederholung der $k$ten Klasse aus den Elementen 0, 1, 2, 3....n:

$$F=\left\{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{n+3}}{1-x^3}\cdots\frac{1-x^{n+k}}{1-x^k}\right\},$$

$$F\,(\text{für }x=1)=(n+k)_k,\quad \frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für }x=1)=\frac{nk}{2}(n+k)_k.$$

6) Bei Combinationen mit Wiederholung der $k$ten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3....m:

$$F=\left\{\frac{1-x^m}{1-x}\cdot\frac{1-x^{m+1}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{m+2}}{1-x^3}\cdots\frac{1-x^{m+k-1}}{1-x^k}\right\},$$

$$F\,(\text{für }x=1)=(m+k-1)_k,\quad \frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für }x=1)=\frac{(m+1)k}{2}(m+k-1)_k.$$

7) Bei Combinationen ohne Wiederholung der $k$ten Klasse aus den Elementen 0, 1, 2, 3....n:

$$F=\left\{\frac{1-x^{n-k+2}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n-k+3}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{n-k+4}}{1-x^3}\cdots\frac{1-x^n}{1-x^{k-1}}\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-x^k}\right\}x^{\frac{k(k-1)}{2}};$$

$$F\,(\text{für }x=1)=(n+1)_k;\quad \frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für }x=1)=\frac{n.k}{2}(n+1)_k.$$

8) Bei Combinationen ohne Wiederholung der $k$ten Klas
aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots . m$:

$$F = \left\{ \frac{1-x^{m-k+1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{m-k+2}}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^{m-k+3}}{1-x^3} \cdots \frac{1-x^{m-1}}{1-x^{k-1}} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^k} \right\} x^{\frac{k(k+}{2}}$$

$$F\,(\text{für } x=1) = (m)_k; \quad \frac{\partial F}{\partial x}\,(\text{für } x=1) = \frac{(m+1)k}{2}\,(m)_k.$$

Die obigen mit F bezeichneten Funktionen sind für die hi in Betracht kommenden Fälle stets ganze Funktionen, haben i der Entwickelung in gleichen Abständen von beiden Enden di selben Coeffizienten, und geben noch zu manchen Betrachtunge Veranlassung. So wird z. B. bei der Funktion unter 5) durc Vertauschung von n und k der Werth nicht geändert, so das also in Betreff der Anzahl und Summe der Complexionen di $k$te Klasse der Combinationen mit Wiederholung aus den Elemen ten $0.1.2 \ldots . n$ gleich ist der $n$ten Klasse aus den Element $0.1.2 \ldots . k$ u. s. w.

Bei der Ableitung der höheren Differentialquotienten bin ic die Fälle 1) und 2) ausgenommen, auf Schwierigkeiten gestosse doch wird der Werth derselben für $x=0$ wohl zu ermitteln sei

Nachschrift des Herausgebers.

Rücksichtlich der in diesem Aufsatze gebrauchten Bezeic nung bemerkt der geehrte Herr Verfasser desselben in eine Briefe an mich Folgendes, was ich zu leichterem Verständni noch beifüge:

Variationen und Combinationen sind mit V und C, Variati nen und Combinationen mit Wiederholung mit V' und C' bezeic net, die Klassenzahl darüber und die Elemente rechts danebe gesetzt. Die Summe von Variationen und Combinationen habe ic durch das vorgesetzte S bezeichnet, so dass also unter $S\overset{k}{V'}(1 \ldots . m$ die Summe der Variationen mit Wiederholung der $k$ten Klass aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots . m$ zu verstehen ist; ausserdem komn nur noch die gebräuchliche Bezeichnung der Binomial-Coeffizie ten $(m)_k$, $(m+2)_4$ u. s. w. vor.

XIX.

Miscellen.

Methode, den Durchmesser der Pupille sowohl bei Tage als bei Nacht am eigenen Auge zu messen.

Von Herrn Professor S. Stampfer zu Wien.

(Aus den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien Band VIII. Heft IV. S. 511.)

Bekanntlich erscheint ein entfernter Lichtpunkt durch eine geeignete Convexlinse angesehen (dem kurzsichtigen Auge auch ohne Linse) als ein lichter Kreis, dessen scheinbarer Durchmesser von dem Durchmesser der Pupille abhängt. Die Erscheinung ist ganz dieselbe wie in einem Fernrohre, dessen Ocular nicht eingestellt ist, auch hier geht das Bild eines entfernten Lichtpunktes, z. B. eines Sternes, in einen hellen Kreis über, dessen Durchmesser unter übrigens gleichen Umständen von der Oeffnung des Objectives abhängt. Um dieses deutlicher zu machen, sei (Taf. II. Fig. 11.) AB die Vorderfläche des Auges, MN die Retina; $aba'b'$ sei der vom leuchtenden Punkte kommende und in das Auge eindringende Lichtbüschel. Dieser kann als ein Cylinder angesehen werden, welcher mit der Pupille gleichen Durchmesser hat. Wegen der bei bb' vorgelegten Convexlinse, oder weil das Auge kurzsichtig ist, fällt die Spitze e des Kegels (das Bild) nicht auf die Netzhaut, sondern vor dieselbe, und es entsteht auf der Netzhaut ein Lichtkreis, dessen Durchmesser mn vom Durchmesser bb' abhängt. In Folge dessen sieht das Auge in der Ferne einen lichten Kreis, dessen scheinbarer Durchmesser durch den Durchmesser mn bestimmt wird. Wird nun eine Blendung hh', z. B. eine Spalte aus Kartenpapier, deren Oeffnung sich vergrössern und verkleinern lässt, vor das Auge

gehalten und so regulirt, dass der entfernte Lichtkreis, mithin auch der Kreis *mn*, zu beiden Seiten berührt wird, so ist die Oeffnung der Spalte zugleich die Oeffnung der Pupille. Wie man sieht, hat eine grössere oder geringere Entfernung der Spalte vom Auge keinen merklichen Einfluss. Durch die Wahl der vorgelegten Linse kann der gesehene Lichtkreis beliebig gross gemacht werden, und der Versuch ist um so genauer, je grösser derselbe ist, vorausgesetzt, dass er die nöthige Helligkeit hat. Zur Nachtzeit sind die hellsten Sterne, z. B. Jupiter, oder ein entferntes Licht besonders geeignet. Die grösstmögliche, nur in voller Finsterniss vorhandene Pupillen-Oeffnung wird zwar auch auf diese Art nicht erhalten, weil das geringe, zum Versuche nöthige Licht dieselbe etwas verkleinert; indessen wird der Unterschied unbedeutend sein, wenn der Versuch in ganz dunkler Nacht mit einem entfernten Lichte gemacht wird, dessen Helligkeit dazu eben noch hinreicht. Eine 40 Klafter entfernte Strassen-Gaslampe gab uns schon eine entschieden kleinere Oeffnung, als ein etwa 100 Klafter entferntes Kerzenlicht.

Um den Versuch bei Tage zu machen, ist es am besten, den Lichtpunkt durch reflectirtes Sonnenlicht herzustellen, was auf verschiedene Art geschehen kann. Eine Convexlinse, eine polirte Metallkugel, jede sphärische Wölbung an einer Glasflasche giebt durch Reflexion des Sonnenlichtes einen solchen Lichtpunkt.

Der Versuch ist einer ziemlichen Genauigkeit fähig; selbst bei Ungeübteren stieg die mittlere Unsicherheit eines einzelnen Versuches nicht über $\frac{1}{10}$ Linie.

Nach diesem Verfahren wird eigentlich der Durchmesser des Lichtbüschels bei seinem Eintritte in die Hornhaut erhalten, da aber die Pupille etwa 1,6 Linie rückwärts liegt, so ist ihr wahrer Durchmesser etwas kleiner. Nach den mittleren Dimensionen des menschlichen Auges folgt, dass der nach dieser Methode gefundene Durchmesser mit 0,90 zu multipliciren ist, um den wahren Durchmesser der Pupille zu erhalten. Ferner haben wir bisher vorausgesetzt, dass die vorgelegte Linse sich möglichst nahe am Auge befinde. Ist dieses nicht der Fall, so ist eine weitere Verbesserung nothwendig. Sei F die Brennweite dieser Linse, g ihr Abstand vom Auge, d die beobachtete Oeffnung der Spalte, so ist wahrer Durchmesser der Pupille

$$= 0.9\, d\left(1 - \frac{g}{F}\right),$$

wo F für Concavlinsen negativ zu nehmen ist. Streng genommen hat auch die Oeffnung der Pupille, die scheinbare Grösse des

Lichtkreises, sowie die Kurz- oder Weitsichtigkeit des Auges selbst auf diese Verbesserung Einfluss, allein da dieser wohl immer geringer ist, als die Unsicherheit des Versuches, so wird es unnöthig sein, diese Umstände durch eine ziemlich complicirte Formel zu berücksichtigen.

Erscheint endlich der leuchtende Punkt selbst unter einem merklichen scheinbaren Durchmesser, nämlich für den Fall, als sein Bild auf die Retina fällt, so ist genau genommen dieser Durchmesser von jenem des Lichtscheines abzuziehen. Der Fall kann wohl nur eintreten, wenn der Versuch mit einer verhältnissmässig grossen Lichtflamme in geringer Entfernung gemacht wird; der Fehler ist jedoch um so geringer, je grösser der scheinbare Durchmesser des Lichtkreises ist, was man immer in seiner Gewalt hat.

Zur ebenen Trigonometrie.

Vom Herausgeber.

Die bekannten Formeln für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ lassen sich als Relationen zwischen den drei Winkeln eines ebenen Dreiecks auffassen, wodurch man einen einfachen Beweis der in Rede stehenden Formeln selbst gewinnt.

In dem ebenen Dreiecke ABC (Taf. II. Fig. 12. 13.), dessen Winkel wir durch die Buchstaben A, B, C bezeichnen wollen, fälle man von den Ecken B und C auf die nöthigenfalls verlängerten Gegenseiten AC und AB die Perpendikel BD und CE. Wenn nun zuerst (Taf. II. Fig. 12.) die Winkel A und B beide spitz sind, so ist

$$\sin A=\frac{CE}{AC},\quad \cos A=\frac{AE}{AC};$$

$$\sin B=\frac{CE}{BC},\quad \cos B=\frac{BE}{BC};$$

also

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{CE.BE+CE.AE}{AC.BC}=\frac{CE.AB}{AC.BC};$$

aber

$$CE.AB=AC.BD=\triangle ABC,$$

also

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{AC.BD}{AC.BC} = \frac{BD}{BC},$$

und folglich, weil

$$\sin C = \frac{BD}{BC}$$

ist:

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Wenn (Taf. II. Fig. 13.) der Winkel A stumpf, also der Winkel B spitz ist, so ist

$$\sin A = \frac{CE}{AC}, \quad \cos A = -\frac{AE}{AC};$$

$$\sin B = \frac{CE}{BC}, \quad \cos B = \frac{BE}{BC};$$

also

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{CE.BE - CE.AE}{AC.BC} = \frac{CE.AB}{AC.BC};$$

aber

$$CE.AB = AC.BD = \triangle ABC,$$

also

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{AC.BD}{AC.BC} = \frac{BD}{BC},$$

und folglich, weil

$$\sin C = \frac{BD}{BC}$$

ist, wieder

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Im Dreieck ABC hat man daher zwischen den drei Winkel überhaupt die drei folgenden Relationen:

$$1) \begin{cases} \sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C, \\ \sin B = \sin C \cos A + \cos C \sin A, \\ \sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B. \end{cases}$$

Führt man nun in die zweite dieser Gleichungen den Wert von $\sin C$ aus der dritten ein, so ergiebt sich:

$$\sin B = \sin A \cos A \cos B + \cos A^2 \sin B + \cos C \sin A,$$

also

$$\sin A^2 \sin B = \sin A \cos A \cos B + \cos C \sin A,$$

und folglich, wenn man durch $\sin A$ dividirt:

$$\sin A \sin B = \cos A \cos B + \cos C,$$

woraus

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

folgt.

Daher hat man jetzt die drei folgenden Relationen:

$$2)\quad \begin{cases} \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C, \\ \cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A, \\ \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B. \end{cases}$$

Weil nun

$$C = 180^0 - (A + B)$$

ist, so ist bekanntlich

$$\sin C = \sin (A + B), \quad \cos C = -\cos (A + B);$$

also nach 1) und 2):

$$3)\quad \begin{cases} \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \\ \cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt

$$A = (A - B) + B,$$

so ist nach 3):

$$\sin A = \sin (A - B) \cos B + \cos (A - B) \sin B,$$

$$\cos A = \cos (A - B) \cos B - \sin (A - B) \sin B;$$

und bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen $\sin (A - B)$ und $\cos (A - B)$ mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination, so erhält man:

$$(\sin B^2 + \cos B^2) \sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

$$(\sin B^2 + \cos B^2) \cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B;$$

also

$$4)\quad \begin{cases} \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B, \\ \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B. \end{cases}$$

Nach 3) und 4) ist:

$$5)\quad \begin{cases} \sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B, \\ \cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B. \end{cases}$$

Satz von der Hyperbel.

Ein Punkt und zwei sich schneidende gerade Linien seie geben. Wenn man nun von dem gegebenen Punkte gerade I in beliebiger Anzahl auszieht, welche die beiden gegebenen I schneiden, und auf jenen Linien von dem gegebenen Punkt Stücke abschneidet, welche den zwischen den gegebenen L liegenden Stücken der von dem gegebenen Punkte aus gezo Linien gleich sind, so liegen die Endpunkte jener abgeschnit Stücke in einer Hyperbel. Dieser an sich ziemlich einfache scheint zu weiteren Betrachtungen Veranlassung geben zu kö und wird dann seine nähere Bestimmung, als ihm hier der I wegen gegeben werden konnte, von selbst finden.

Druckfehler
in Theil XXI. Heft II.

Verbesserungen zu Lehmann's: „Beitrag zur Berechnung der Zal

S. 126 Z. 12 v. u. statt 98,522554845 lies 98,52554845.
S. 132 Z. 6 und 2. v. u. statt „ändern" lies „ändere."
S. 141 Z. 3 v. o. statt $\frac{50x+25}{x-25}$ lies $\frac{50x+25}{x-50}$.
S. 148 Z. 1 v. u. statt „stattgehabte" lies „statthafte."
S. 152 Z. 10 v. o. statt $\frac{x-93}{5x+7,}$ lies $\frac{x-93}{5x+7,5}$.
S. 153 Z. 9 v. o. statt 004764 lies 004763.
S. 165 Z. 4 v. o. statt „—982352...." lies „—982352."
S. 172 Z. 4 v. o. statt „+211838...." lies „+211838."
S. 173 Z. 7 v. u. statt „965624" lies „965624...."

XX.

Ergänzung des ersten Jakobi'schen Theorems von den elliptischen Funktionen der ersten Art.

Von
Herrn *Essen*,
Lehrer am Gymnasium zu Stargard.

Es sei

$$D=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

in eine gerade Anzahl p von Theilen getheilt, und es werde

$$\operatorname{amp}\left(\frac{m}{p}D\right)$$

durch α_m bezeichnet. Bestimmt man alsdann den Winkel ψ so, dass man hat

$$\cos\psi=\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_1{}^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_3{}^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_5{}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{(1-c^2\sin\alpha_1{}^2x^2)(1-c^2\sin\alpha_3{}^2x^2)(1-c^2\sin\alpha_5{}^2x^2)\ldots(1-c^2\sin\alpha_{p-1}^2x^2)},$$

in welcher Gleichung x für $\sin\varphi$ steht: so ist

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\mu\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}},$$

indem

$$\mu=\frac{\sin\alpha_1{}^2.\sin\alpha_3{}^2.\sin\alpha_5{}^2\ldots.\sin\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_2{}^2.\sin\alpha_4{}^2\ldots.\sin\alpha_{p-2}},$$

$$k=c^p\sin\alpha_1{}^4.\sin\alpha_3{}^4\ldots..\sin\alpha_{p-1}^4$$

zu denken ist.

Beweis. Es ist, wenn $\text{amp}(q)=\varphi$ gesetzt wird,

$$\text{tang}\left[\frac{1}{2}\text{amp}\left(q+\frac{mD}{p}\right)+\frac{1}{2}\text{amp}\left(q-\frac{mD}{p}\right)\right]=\text{tang}\varphi\varDelta\alpha_m.$$

Setzen wir nun

$$\vartheta_m=\frac{1}{2}\text{amp}\left(q+\frac{mD}{p}\right)+\frac{1}{2}\text{amp}\left(q-\frac{mD}{p}\right),$$

und suchen wir $\sin\psi$ in $x=\sin\varphi=\sin\text{amp}(q)$ auszudrücken, wei

$$\psi=2\vartheta_1+2\vartheta_3+2\vartheta_5\ldots.2\vartheta_{p-1}$$

gesetzt wird. Man erhält aus $\text{tang}\,\vartheta_m=\text{tang}\,\varphi\varDelta\alpha_m$:

$$2\vartheta_m i=\log.\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi\varDelta\alpha_m}{\cos\varphi-i\sin\varphi\varDelta\alpha_m},$$

$$-2\vartheta_m i=\log.\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi\varDelta\alpha_m}{\cos\varphi+i\sin\varphi\varDelta\alpha_m}.$$

Da nun

$$\sin\psi=\frac{e^{2(\vartheta_1+\vartheta_3+\ldots.\vartheta_{p-1})i}-e^{-2(\vartheta_1+\vartheta_3\ldots.\vartheta_{p-1})}}{2i},$$

so leitet man leicht ab:

$$\sin\psi=\frac{A^2-B^2}{2ABi}=\frac{(A-B)(A+B)}{2ABi},$$

wenn man der Kürze wegen durch A das Product

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi\varDelta\alpha_1)(\cos\varphi+i\sin\varphi\varDelta\alpha_3)\ldots.(\cos\varphi+i\sin\varphi\varDelta\alpha_{p-1})$$

vorstellt, und unter B Dasjenige versteht, was aus A hervorgeht, wenn überall das Zeichen $+$ mit $-$ vertauscht wird. Zunächst findet man

$$AB=(1-c^2\sin\alpha_1{}^2x^2)(1-c^2\sin\alpha_3{}^2x^2)\ldots.(1-c^2\sin\alpha_{p-1}^2x^2),$$

welchen Ausdruck wir fortan mit V bezeichnen wollen. Entwickelt man sodann das Product A durch Multiplication, so nimmt dasselbe folgende Form an:

$$[\cos\varphi^{\frac{p}{2}} - C_2\cos\varphi^{\frac{p-2}{2}}.\sin\varphi^2 + C_4\cos\varphi^{\frac{p-4}{2}}.\sin\varphi^4 \ldots]$$

$$+ i\sin\varphi\cos\varphi[C_1\cos\varphi^{\frac{p-2}{2}} - C_3\cos\varphi^{\frac{p-4}{2}}.\sin\varphi^2 \ldots];$$

und man erhält sodann:

$$B = [\cos\varphi^{\frac{p}{2}} - C_2\cos\varphi^{\frac{p-2}{2}}.\sin\varphi^2 \ldots]$$

$$- i\sin\varphi.\cos\varphi[C_1\cos\varphi^{\frac{p-2}{2}} - C_3\cos\varphi^{\frac{p-4}{2}}.\sin\varphi^2 \ldots].$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Ausdruck für $\sin\psi$ auf die nachstehende Form gebracht werden kann:

$$\sin\psi = \frac{x\sqrt{1-x^2}[A_0 x^{p-2} + A_2 x^{p-4} \ldots + A_r]}{V}.$$

Um den Zähler von $\sin\psi$ als ein Product von p Factoren darzustellen, müssen wir diejenigen Werthe von $x=\sin\varphi$ kennen, für welche $\sin\psi=0$ wird. Man hat

$$\begin{aligned}\psi = \; & \text{amp}\left[q+\frac{p-1}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{p-1}{p}D\right]\\ & +\text{amp}\left[q+\frac{p-3}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{p-3}{p}D\right]\\ & +\text{amp}\left[q+\frac{p-5}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{p-5}{p}D\right]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\text{amp}\left[q+\frac{3}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{3}{p}D\right]\\ & +\text{amp}\left[q+\frac{1}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{1}{p}D\right].\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich, indem man zuerst in der linken Kolonne von oben nach unten und sodann in der rechten von unten nach oben fortgeht, in folgender Weise anordnen:

$$\begin{aligned}&\text{amp}\left[q+\frac{p-1}{p}D\right]+\text{amp}\left[q+\frac{p-3}{p}D\right]+\text{amp}\left[q+\frac{p-5}{p}D\right]+\ldots\\ &\ldots\ldots+\text{amp}\left[q+\frac{1}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{1}{p}D\right]\ldots\\ &+\text{amp}\left[q-\frac{p-5}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{p-3}{p}D\right]+\text{amp}\left[q-\frac{p-1}{p}D\right].\end{aligned}$$

Nun wollen wir durch ψ_m Dasjenige bezeichnen, was aus ψ wird, wenn man

$$q = \frac{mD}{p}$$

setzt; ferner sei bemerkt, dass allemal sein muss:

$$\text{amp}\left[D + \frac{mD}{p}\right] + \text{amp}\left[D - \frac{mD}{p}\right] = \pi.$$

Hieraus folgt sogleich, dass man habe:

$$\psi_p = \frac{p}{2}\pi, \quad \psi_{p-1} = \frac{p-1}{2}\pi.$$

Nimmt man sodann

$$q = \frac{p-2}{p} D$$

und vergleicht ψ_{p-2} mit ψ_p, so findet man, dass im Allgemeinen jedes Glied in das folgende übergegangen ist; ausgeschieden ist

$$\text{amp}\left[D + \frac{p-1}{p} D\right],$$

und dafür neu hinzugekommen

$$\text{amp}\left[-\frac{1}{p}D\right] = -\text{amp}\left[\frac{1}{p}D\right];$$

folglich wird ψ_{p-2} um

$$\text{amp}\left[D + \frac{p-1}{p}D\right] + \text{amp}\left[\frac{1}{p}D\right],$$

d. h. um π kleiner sein als ψ_p. Indem man auf diese Weise weiter schliesst, erhält man folgende Reihe von Werthen:

$$\psi_p = \frac{p}{2}\pi, \; \psi_{p-1} = \frac{p-1}{2}.\pi, \; \psi_{p-2} = \frac{p-2}{2}.\pi \ldots\ldots$$

$$\psi_2 = \pi, \; \psi_1 = \frac{\pi}{2}, \; \psi_0 = 0, \; \psi_{-1} = -\frac{\pi}{2} \ldots \psi_{-(p-1)} = -\frac{p-1}{2}\pi, \; \psi_{-p} = -\frac{p}{2}\pi$$

also allgemein:

Es wird also $\sin\psi = 0$ für

$$\varphi = 0,\ \pm\alpha_2,\ \pm\alpha_4,\ \pm\alpha_6,\ \ldots \pm\frac{\pi}{2};$$

woraus sich folgern lässt:

$$\sin\psi = \frac{\frac{x}{\lambda}\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)}{V}.$$

Um nun auch einen ähnlichen Ausdruck für $\cos\psi$ zu finden, hat man

$$\cos\psi = \frac{A^2+B^2}{2AB},$$

wodurch sich $\cos\psi$ mittelst eines Bruches darstellen lässt, dessen Zähler nach p vom $p$ten Gerade sein wird. Die Ansicht der verschiedenen Werthe von ψ zeigt, dass man nehmen könne:

$$\cos\psi = \frac{C\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)}{V},$$

und es bestimmt sich der constante Factor C leicht, wenn man bedenkt, dass für $\varphi = 0$ auch $\psi = 0$, also $\cos\psi = 1$ werden muss. Dadurch erhält man $C = 1$.

Wir wollen $\cos\psi = z$ setzen und dann der Kürze wegen schreiben:

$$\text{I)}\quad z = \frac{R}{V} \qquad \text{II)}\quad 1 - z^2 = \frac{Q^2}{V^2}(1-x^2).$$

Substituirt man für x jetzt $\frac{1}{cx}$ und für z gleichzeitig $\frac{1}{kz}$, so wird der Gleichung I) genügt, wenn man nimmt:

$$\text{III)}\quad k = c^p \sin\alpha_1^4 . \sin\alpha_3^4 \ldots \sin\alpha_{p-1}^4 .$$

Durch eben dieselbe Substitution geht aber die Gleichung II) über in:

$$1 - \frac{1}{k^2z^2} = \frac{1}{\beta^2\lambda^2}\frac{Q'^2(c^2x^2-1)}{V^2},$$

worin Q' für das Product

$$(1-c^2\sin\alpha_2^2x^2)(1-c^2\sin\alpha_4^2x^2)\ldots(1-c^2\sin\alpha_{p-2}^2x^2)$$

und

$$\beta = c^p \sin\alpha_1{}^2 . \sin\alpha_2{}^2 . \sin\alpha_3{}^2 \ldots \sin\alpha_{p-1}^2$$

gesetzt ist. Hieraus erhält man:

$$\text{IV)} \quad \sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-k^2z^2} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{QQ'}{V^2}\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-c^2x^2},$$

$$\text{V)} \quad \mu = \frac{k}{\beta} = \frac{\sin\alpha_1{}^2 . \sin\alpha_3{}^2 \ldots \sin\alpha_{p-1}^2}{\sin\alpha_2{}^2 . \sin\alpha_4{}^2 \ldots \sin\alpha_{p-2}^2}.$$

Setzt man für z seinen Werth $\frac{R}{V}$ und quadrirt, so kommt

$$\text{VI)} \quad (V^2-R^2)(V^2-k^2R^2) = \frac{\mu^2}{\lambda^2}Q^2Q'^2(1-x^2)(1-c^2x^2).$$

Nun ist es leicht, sich zu überzeugen, dass die Function

$$V^2\frac{\partial z}{\partial x} = V\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial V}{\partial x}$$

ein Polynom vom $(p-2)$ten Grade sein muss. Denn es ist sow $V\frac{\partial R}{\partial x}$ als auch $R\frac{\partial V}{\partial x}$ vom $(2p-1)$ten Grade; das letzte Glied a wird, wenn man sie nach Potenzen von x entwickelt, in bei identisch und muss sich daher fortheben. Demnach kann i bekanntlich schliessen, dsss

$$\frac{\mu}{\lambda}QQ' = \omega\left(V\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

sein werde, indem ω eine unbestimmte Constante bezeichnet. Di Constante ist in folgender Weise zu bestimmen. Man hat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\cos\psi}{\partial x} = -\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

folglich erhält man

$$\omega\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\mu}{\lambda}\frac{Q'}{\sqrt{1-x^2}},$$

und wenn man x unendlich klein denkt:

$$\omega\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Aus der Gleichung II) folgt

$$\cos\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial.\,Q\frac{\sqrt{1-x^2}}{V}}{\partial x},$$

woraus, wenn man x unendlich klein nimmt, hervorgeht:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{\lambda}.$$

Dieser Werth, in die obige Gleichung gesetzt, giebt $\omega=-\mu$. Man erhält also

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}=-\mu\frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}},$$

woraus man leicht ableitet:

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\mu\int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}}.$$

Nimmt man $p=2$, so wird

$$\sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+b}}$$

und $\varDelta\alpha_1=\sqrt{b}$, indem b für $\sqrt{1-c^2}$ gesetzt ist. Daraus folgt:

1) $$\operatorname{tg}\vartheta_1=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\operatorname{tg}\varphi.\sqrt{b},$$

2) $$\sin\psi=\frac{2\sqrt{b}\sin\varphi.\cos\varphi}{1-(1-b)\sin\varphi^2},$$

3) $$\cos\psi=\frac{1-(1+b)\sin\varphi^2}{1-(1-b)\sin\varphi^2},$$

4) $$k=\frac{1-b}{1+b},$$

5) $$\mu=\frac{1}{1+b};$$

also

6) $$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\frac{1}{1+b}\int_0^\psi\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\cos\psi^2}}.$$

Aus der Gleichung 4) folgt aber:

$$1+b=\frac{2}{1+k},\ c^2=\frac{4k}{(1+k)^2},$$

wodurch die Gleichung 6) die folgende Gestalt annimmt:

$$7)\quad \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin\varphi^2}}=\frac{1+k}{2}\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}}.$$

Setzt man aber

$$\sin(2\varphi-\psi')=k\sin\psi',$$

also

$$\text{tang}\psi'=\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{1+k-2.\sin\varphi^2};$$

so hat man bekanntlich

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin\varphi^2}}=\frac{1+k}{2}\int_0^{\psi'}\frac{\partial\psi'}{\sqrt{1-k^2\sin\psi'^2}}.$$

Da nun aus den Gleichungen 2) und 3) hervorgeht:

$$\text{tang}\,\psi=\frac{2\sqrt{1-k^2}.\sin\varphi\cos\varphi}{1+k-2.\sin\varphi^2},$$

so folgt

$$\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}}=\int_0^{\psi'}\frac{\partial\psi'}{\sqrt{1-k^2\sin\psi'^2}},$$

wofern gegeben ist

$$\text{tang}\,\psi=\sqrt{1-k^2}.\,\text{tang}\,\psi',$$

wovon man sich auch unmittelbar überzeugen kann.

XXI.

Ueber die Permutationszahlen (Faktoriellen mit der Differenz Eins) und ihre Anwendung auf's Differentiiren und Integriren.

Von
Herrn Dr. *Wilhelm Langsdorf*
zu Worms.

---

1) Allgemeiner Begriff des Differentiirens.

Der ζte Differentialquotient einer beliebigen Funktion wird repräsentirt durch eine Kurve, deren Gleichung ist:

$$y=\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta}.$$

Diese Kurve hat ihre Schnittpunkte mit der x-Axe da, wo die dem $(\zeta-1)$ten Differentialquotienten entsprechende Kurve

$$y=\frac{\partial^{\zeta-1}f(x)}{\partial x^{\zeta-1}}$$

ihre Maxima oder Minima besitzt. Ganz dieselbe Beziehung findet zwischen je zwei beliebigen successiven Differentialquotienten-Kurven Statt.

Gewöhnlich versteht man unter dem Grad ζ des Differentialquotienten $\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta}$ nur eine positive ganze Zahl. Fasst man aber

den Begriff desselben allgemeiner auf, so ergiebt sich sofort die Berechtigung folgender Bezeichnungen:

$$\frac{\partial^{-1} f(x)}{\partial x^{-1}} = \int f(x) \partial x,$$

$$\frac{\partial^{-2} f(x)}{\partial x^{-2}} = \int (\int f(x) \partial x) \partial x, \text{ u. w s.}$$

so dass man also das ζte Integral als das $-\zeta$te Differential betrachtet.

Der Uebergang vom ζten zum $(\zeta+1)$ten und $(\zeta-1)$ten Differentialquotienten geschieht nicht plötzlich, sondern stetig durch die Vermittlung von Funktionen, welche als gebrochene Differentialquotienten darzustellen sind. Diese können nun ebenfalls positiv oder negativ sein. Im letzteren Falle haben wir es mit einer Funktion zu thun, die das Mittelglied zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Integralen bildet.

Dadurch dass man in $y = \frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta}$ ζ ganz allgemein reell, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen annimmt, ist man in Stand gesetzt, Differtiiren und Integriren unter demselben Gesichtspunkt aufzufassen, so dass man in den nach diesem Princip aufgestellten Differentialformeln blos $\zeta = -1$ zu setzen braucht, um das Integral der betreffenden Funktion zu erhalten.

Da die Potenz x^m für alle anderen Funktionen den Ausgangspunkt bildet, sonach auch alle Funktionen sich beliebig differentiiren lassen, wenn man das allgemeine, z. B. ζte, Differential von x^m kennt, so wollen wir dieses zuerst bestimmen.

Der ζte Differentialquotient von x^m:

$$\frac{\partial^\zeta (x^m)}{\partial x^\zeta} = m.m-1......m-\zeta+1.x^{m-\zeta} \qquad \text{(I)}$$

besteht ausser der Potenz $x^{m-\zeta}$, welche für jeden beliebigen reellen Werth von ζ zulässig ist, noch aus dem Produkt:

$$m.m-1....m-\zeta+1,$$

welches die Anzahl der Permutationen von m Elementen zu je ζ ausdrückt, und das wir daher mit $(mP\zeta)$ (m Grössen permutirt zu je ζ) bezeichnen wollen.

Ist ζ positiv ganz, so ist das Produkt $(mP\zeta)$ gegeben, nicht aber, wenn ζ beliebig positiv oder negativ ist, d. h. das Produkt

$$m.m-1......m-\zeta+1$$

ist ein specieller Fall einer Funktion, welche für $\zeta=1, 2, 3\ldots.$ die respektiven Werthe:

$$m,\ m.m-1,\ m.m-1.m-2,\ \text{u. s. w.}$$

annimmt.

Die Haupteigenschaften dieser Funktion lassen sich leicht a priori angeben.

Da wir nämlich das Produkt

$$m.m-1\ldots.m-\zeta+1=(mP\zeta)$$

auch so schreiben können:

$$(m.m-1\ldots.m-\zeta+2)(m-\zeta+1)=(mP\zeta-1)(m-\zeta+1),$$

so ergibt sich sofort:

$$(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1). \qquad \text{(II)}$$

Ebenso ist

$$m.m-1\ldots m-\zeta+1=m(m-1\ldots.m-\zeta+1),$$

d. h.

$$(mP\zeta)=m(m-1P\zeta-1)$$

oder, da (nach (II))

$$(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1)$$

ist,

$$(mP\zeta-1)=\frac{m}{m-\zeta+1}(m-1P\zeta-1). \qquad \text{(III)}$$

Die Formel (II) giebt für $\zeta=1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots.$:

$$(mP1)=m,\ (mP0)=1,\ (mP-1)=\frac{1}{m+1},$$

$$(mP-2)=\frac{1}{(m+1)(m+2)},\ \text{u. s. w.}$$

Aus Formel (III) dagegen folgern wir für $m=1$:

$$(0P\zeta-1)=\frac{2-\zeta}{1}(1P\zeta-1)$$

oder

$$(0P\zeta)=\frac{1-\zeta}{1}(1P\zeta)=\frac{1-\zeta.2-\zeta}{1.2}(2P\zeta)=\text{u. s. w.}$$

Mit Anwendung dieser Eigenschaften der Funktion $(mP\zeta)$ a Gleichung (I) erhält man nun sogleich, wenn man einerseits $\zeta=2, 3....$, andererseits $\zeta=0, -1, -2, ...$ setzt:

$$\frac{\partial(x^m)}{\partial x}=mx^{m-1},\quad \frac{\partial^2(x^m)}{\partial x^2}=m.m-1.x^{m-2},$$

$$\frac{\partial^3(x^m)}{\partial x^3}=m.m-1.m-2x^{m-3}....,\quad \frac{\partial^0(x^m)}{\partial x^0}=(mP0)x^{m-0}=x^m,$$

$$\frac{\partial^{-1}(x^m)}{\partial x^{-1}}=\int x^m\partial x=(mP-1)x^{m+1}=\frac{1}{m+1}x^{m+1},$$

$$\frac{\partial^{-2}(x^m)}{\partial x^{-2}}=\int(\int x^m\partial x)\partial x=(mP-2)x^{m+2}=\frac{1}{m+1.m+2}x^{m+2},$$

u. s. w.

Wir wollen nun eine Methode angeben, wie man einen beliebigen Differentialquotienten (ganz oder gebrochen, positiv oder negativ) einer beliebigen Funktion in eine Reihe entwickeln kann, sofern man nur die ganzen positiven Differentialquotienten derselben kennt. Man erhält nämlich durch successives Differentiiren des Produkts $y=f(x).\varphi(x)$:

$$\frac{\partial(f(x)\varphi(x))}{\partial x}=f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2(f(x)\varphi(x))}{\partial x^2}=f(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+2\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^\zeta(f(x)\varphi(x))}{\partial x^\zeta}=f(x)\frac{\partial^\zeta\varphi(x)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial^{\zeta-1}\varphi(x)}{\partial x^{\zeta-1}}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^{\zeta-2}\varphi(x)}{\partial x^{\zeta-2}}+.... \quad \text{(IV)}$$

Für $f(x)=y$, $\varphi(x)=A$ gibt dies:

$$\frac{\partial^\zeta(yA)}{\partial x^\zeta}=y\frac{\partial^\zeta(A)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{\zeta-1}(A)}{\partial x^{\zeta-1}}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{\zeta-2}(A)}{\partial x^{\zeta-2}}+....,$$

oder da

$$\frac{\partial^\zeta(A)}{\partial x^\zeta}=\frac{\partial^\zeta(A.x^0)}{\partial x^\zeta}=A\frac{\partial^\zeta(x^0)}{\partial x^\zeta}=A(0P\zeta)x^{0-\zeta},$$

$$\frac{\partial^{\zeta-1}(A)}{\partial x^{\zeta-1}}=A(0P\zeta-1)x^{1-\zeta} \text{ u. s. w.}$$

nd

$$(0P\zeta-1)=\frac{(0P\zeta)}{1-\zeta},\ (0P\zeta-2)=\frac{(0P\zeta)}{1-\zeta.2-\zeta}, \text{ u. s. w.}$$

st:

$$\frac{\partial^{\zeta}(y.A)}{\partial x^{\zeta}}=\frac{A(0P\zeta)}{x^{\zeta}}\{y+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\}$$

oder

$$\frac{\partial^{\zeta}f(x)}{\partial x^{\zeta}}=\frac{(0P\zeta)}{x^{\zeta}}\{f(x)+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\}. \quad \text{(V)}$$

Von dieser Reihe ist die Bernoulli'sche Reihe:

$$\int f(x)\partial x=f(x).x-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\ldots,$$

lerjenige specielle Fall, in welchen sie für $\zeta=-1$ übergeht. Man erhält nämlich aus (V) für $\zeta=-1$:

$$\frac{\partial^{-1}f(x)}{\partial x^{-1}}=\int f(x)\partial x$$
$$=\frac{(0P-1)}{x^{-1}}(f(x)-\frac{1}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1.2}+\frac{1.2}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1.2.3}-\ldots)$$
$$=xf(x)-\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\ldots$$

Setzt man in den Werth des ζten Differentialquotienten von x^m

$$\frac{\partial^{\zeta}(x^m)}{\partial x^{\zeta}}=(mP\zeta)x^{m-\zeta}$$

$m=0$, so wird daraus, wie sich schon oben ergab:

$$\frac{\partial^{\zeta}(1)}{\partial x^{\zeta}}=(0P\zeta)x^{-\zeta},$$

während für $m=\zeta$

$$\frac{\partial^{\zeta}(x^{\zeta})}{\partial x^{\zeta}}=(\zeta P\zeta)x^{\zeta-\zeta}=(\zeta P\zeta)$$

hervorgeht.

Die Funktionen $(0P\zeta)$ und $(\zeta P\zeta)$ erscheinen daher als specielle Fälle von $(mP\zeta)$ und müssen sich aus derselben entwickeln lassen.

2) Die Faktorielle $(mP\zeta)$.

Eintwickeln wir nun zuerst die Faktorielle $(mP\zeta)$.

Das Produkt $(mP\zeta)=m.m-1\ldots.m-\zeta+1$ besteht aus ζ einfachen Faktoren in Bezug auf m, lässt sich also als eine Gleichung vom ζten Grad in Bezug auf m betrachten, deren Wurzeln $0, 1, 2\ldots.(\zeta-1)$ sind. Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von m, so entsteht ein Ausdruck von der Form:

$$(mP\zeta)=m^\zeta+f'(\zeta)m^{\zeta-1}+f''(\zeta)m^{\zeta-2}+f'''(\zeta)m^{\zeta-3}+\ldots.$$

Es ist sonach die Entwickelung für $(mP\zeta)$ gefunden, sofern die successiven Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)\ldots.$ sich angeben lassen.

Fasst man die Bedeutung der Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)\ldots.$ als successiver Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln $0, 1, 2\ldots$ $\ldots\zeta-1$ sind, näher ins Auge, so ergibt sich:

$$f'(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2,$$

$$f''(\zeta)=b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4, \text{ u. s. w.}$$

wobei nur noch a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4;.... zu bestimmen sind, so dass man hat:

$$(mP\zeta)=m^\zeta+(a_1\zeta+a_2\zeta^2)m^{\zeta-1}+(b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4)m^{\zeta-2}+\ldots. \quad (1)$$

Kommt es nun darauf an, die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4; u. s. w. numerisch anzugeben, und will man nicht zugleich das Gesetz ihres Zusammenhangs auffinden, so führt folgende Methode zum Ziel.

Setzt man in Gleichung (1) ζ successiv $=1, 2, 3\ldots.$, so kennt man einerseits direkt die Werthe $(mP1)$, $(mP2)\ldots.$, nämlich $(mP1)=m$, $(mP2)=m.m-1$, u. s. w. und andererseits erhält man die entsprechenden Werthe durch die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4;.... ausgedrückt.

Zur Vereinfachung dieser Operation kan man sich folgender Hülfsbetrachtungen bedienen. Setzt man nämlich in der Gleichung:

$$(mP\zeta)=m^\zeta+f'(\zeta)m^{\zeta-1}+f''(\zeta)m^{\zeta-2}+\ldots.$$

$\zeta=1$, und bezeichnet die Werthe, die dann $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)\ldots.$ annehmen, mit $f'(1)$, $f''(1)\ldots.$; so wird:

$$(mP1) = m + f'(1) + \frac{1}{m} f''(1) + \frac{1}{m^2} f'''(1) + \ldots$$

Da nun an und für sich $(mP1) = m$ ist, so ist diese Gleichung nicht anders möglich, als wenn

$$f'(1) + \frac{1}{m} f''(1) + \frac{1}{m^2} f'''(1) + \ldots$$

für sich = Null ist. Da aber m jede beliebige Zahl sein kann, so ist nicht nur $f'(1)$, sondern auch $f''(1)$, $f'''(1)$, ... jedes für sich gleich Null.

Setzt man weiter in (1) $\zeta = 2$, so entsteht:

$$(mP2) = m^2 + f'(2)m + f''(2) + \frac{1}{m} f'''(2) + \ldots = m \, . \, \overline{m-1} = m^2 - m,$$

woraus ebenso

$$f''(2) = 0, \; f'''(2) = 0, \text{ u. s. w.}$$

folgt.

Man erhält so folgende Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} f'(1) = 0 & f''(1) = 0 & f'''(1) = 0 \ldots \\ & f''(2) = 0 & f'''(2) = 0 \ldots \\ & & f'''(3) = 0 \ldots \end{array}$$

woraus folgt, dass

$f'(\zeta)$: 0 und 1;

$f''(\zeta)$: 0, 1 und 2;

$f'''(\zeta)$: 0, 1, 2 und 3; u. s. w.

zu Wurzeln haben, also auch so geschrieben werden können:

$$f'(\zeta) = \zeta . \overline{\zeta - 1} . q,$$

$$f''(\zeta) = \zeta . \overline{\zeta - 1} . \overline{\zeta - 2} . q' . \varphi'(\zeta),$$

$$f'''(\zeta) = \zeta . \overline{\zeta - 1} . \overline{\zeta - 2} . \overline{\zeta - 3} . q'' . \varphi''(\zeta), \text{ u. s. w.}$$

Die Constanten q, q', q''...., so wie die Funktionen $\varphi'(\zeta)$, $\varphi''(\zeta)$, $\varphi'''(\zeta)$...., sind nun sehr leicht mittelst der Gleichungen

$$(mP1) = m, \; (mP2) = m . \overline{m-1}, \; (mP3) = m . \overline{m-1} . \overline{m-2}, \text{ u. s. w.}$$

zu finden, so dass man erhält:

$$
\begin{aligned}
(mP\zeta) = m^{\zeta} &- \frac{1}{2}\zeta.\zeta-1.m^{\zeta-1} + \frac{1}{2.4}\zeta.\zeta-1.\zeta-2\left\{\zeta-\frac{1}{3}\right\}m^{\zeta-2} - \frac{1}{2.4.6}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3(\zeta.\zeta-1)m^{\zeta-3} \\
&+ \frac{1}{2.4.6.8}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4\left\{\zeta^3-2\zeta^2+\frac{1}{3}\zeta+\frac{2}{15}\right\}m^{\zeta-4} \\
&- \frac{1}{2.4.6.8.10}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5(\zeta.\zeta-1)\left\{\zeta^2-\frac{7}{3}\zeta-\frac{2}{3}\right\}m^{\zeta-5} \\
&+ \frac{1}{2.4.6.8.10.12}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5.\zeta-6\left\{\zeta^5-5\zeta^4+5\zeta^3+\frac{13}{9}\zeta^2-\frac{2}{3}\zeta-\frac{16}{63}\right\}m^{\zeta-6} \qquad \text{(VI)} \\
&- \frac{1}{2.4.6.8.10.12.14}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5.\zeta-6.\zeta-7\{\zeta.\zeta-1\}\left\{\zeta^4-6\zeta^3+\frac{17}{3}\zeta^2+\frac{58}{9}\zeta+\frac{16}{9}\right\}m^{\zeta-7} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Um das Gesetz des Zusammenhangs der Coefficienten in den Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$, $f'''(\zeta)$.... besser übersehen zu können, bezeichnen wir mit $\psi(\zeta, n)$ die Summe der Combinationen der ζ verschiedenen Grössen 0, 1, 2.... bis $\zeta-1$ zu je n, so dass man hat:

$$(mP\zeta)=m^\zeta-\psi(\zeta,1)m^{\zeta-1}+\psi(\zeta,2)m^{\zeta-2}-\psi(\zeta,3)m^{\zeta-3}+.... \quad (1)$$

Setzt man statt ζ: $\zeta+1$, so ist

$$(mP\zeta+1)=m^{\zeta+1}-\psi(\zeta+1,1)m^\zeta+\psi(\zeta+1,2)m^{\zeta-1}-\psi(\zeta+1,3)m^{\zeta-2}+... \quad (2)$$

Nun ist aber auch

$$(mP\zeta+1)=(m-\zeta)(mP\zeta),$$

d. h., wenn man für $(mP\zeta)$ aus (1) seinen Werth einsetzt:

$$(mP\zeta+1)=m^{\zeta+1}-(\psi(\zeta,1)+\zeta)m^\zeta$$
$$+(\psi(\zeta,2)+\zeta\psi(\zeta,1))m^{\zeta-1}-(\psi(\zeta,3)+\zeta\psi(\zeta,2))m^{\zeta-2}+.... \quad (3)$$

Hält man (3) mit (2) zusammen, so folgt:

$$\psi(\zeta+1,n)=\zeta\psi(\zeta,n-1)+\psi(\zeta,n). \quad (4)$$

Die Vereinigung von Gleichung (1) und (4) führt uns direkt zur Bestimmung der Coefficienten des Ausdrucks für $(mP\zeta)$ und ihres Bildungsgesetzes.

Das $n$te Glied der Entwickelung für $(mP\zeta)$ (s. (1)) hat nämlich die Form:

$$\psi(\zeta,n-1)m^{\zeta-n+1}.$$

Der Faktor $\psi(\zeta,n-1)$ hat die Form:

$$\psi(\zeta,n-1)=A\zeta^{2n-2}+B\zeta^{2n-3}+C\zeta^{2n-4}+.... \quad (5)$$

Setzen wir nun dieses $n$te Glied als bekannt voraus, so wissen wir, dass im $(n+1)$ten Glied der Coefficient von $m^{\zeta-n+2}$ die Form hat:

$$\psi(\zeta,n)=\alpha\zeta^{2n}+\beta\zeta^{2n-1}+\gamma\zeta^{2n-2}+.... \quad (6)$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$\psi(\zeta+1,n)=\psi(\zeta,n)+\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{1.\partial\zeta}+\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{1.2.\partial\zeta^2}+\frac{\partial^3\psi(\zeta,n)}{1.2.3.\partial\zeta^3}+.... \quad (7)$$

Aus Gleichung (4) wird daher:

$$\psi(\zeta,n)+\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{1.\partial\zeta}+\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{1.2.\partial\zeta^2}+\ldots$$
$$=\zeta(A\zeta^{2n-2}+B\zeta^{2n-3}+C\zeta^{2n-4}+\ldots)+\psi(\zeta,n),$$

oder da

$$\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{\partial\zeta}=2n\alpha\zeta^{2n-1}+(2n-1)\beta\zeta^{2n-2}+\ldots,$$

$$\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{\partial\zeta^2}=2n.2n-1.\alpha\zeta^{2n-2}+2n-1.2n-2.\beta\zeta^{2n-3}+\ldots \text{ u. s. w.}$$

ist:

$$2n\alpha\zeta^{2n-1}+\frac{2n-1}{1}\beta\zeta^{2n-2}+\frac{2n-2}{1}\gamma\zeta^{2n-3}+\ldots$$
$$=A\zeta^{2n-1}+B\zeta^{2n-2}+C\zeta^{2n-3}+\ldots$$
$$+\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha\zeta^{2n-2}+\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta\zeta^{2n-3}+\ldots$$
$$+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha\zeta^{2n-3}+\ldots$$

d. h.

$$2n\alpha=A,\ \alpha=\frac{A}{2n};$$

$$2n-1.\beta+\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha=B,\ \beta=\frac{B-\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha}{2n-1};$$

$$2n-2.\gamma+\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha=C,$$

$$\gamma=\frac{C-\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha-\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta}{2n-2} \text{ u. s. w.}$$

Wir kennen also nun das rekurrente Bildungsgesetz*) der Reihe für $(mP\zeta)$ und erhalten so direkt:

---

*) Das Gesetz des Zusammenhangs dieser Coefficienten hat zuerst Kramp in seiner „Analyse des refractions astronomiques et terrestres" (Strassburg 1799) gegeben.

$$(mP\zeta) = m^\zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta)m^{\zeta-1} + \frac{1}{2.4}(\zeta^4 - \frac{10}{3}\zeta^3 + 3\zeta^2 - \frac{2}{3}\zeta)$$
$$- \frac{1}{2.4.6}(\zeta^6 - 7\zeta^5 + 17\zeta^4 - 17\zeta^3 + 6\zeta^2)m^{\zeta-3} + \ldots$$

lso dieselbe Reihe wie oben (Formel (VI)).

Die Formel für $(mP\zeta)$ (VI) hat am meisten Aehnlichkeit mit er Binomialformel unter folgender Form:

$$(m-1)^\zeta = m^\zeta - \zeta m^{\zeta-1} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2} m^{\zeta-2} - \ldots = (m-1)(m-1)\ldots(m-1),$$

$$(mP\zeta) = m^\zeta - \frac{\zeta.\zeta-1}{2} m^{\zeta-1} + \frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{2.4}(\zeta - \frac{1}{3})\, m^{\zeta-2} - \ldots$$
$$= m(m-1)\ldots(m-\zeta+1).$$

Beides sind die Entwickelungen eines Produkts von ζ Fakto-en, welche bei der Exponentialfunktion m^ζ einander gleich, bei ler Funktion $(mP\zeta)$ um je Eins verschieden sind.

Aus dieser Analogie lässt sich die Berechtigung herleiten, lie Entwickelung von $(mP\zeta)$ auch auf den Fall auszudehnen, wo ; negativ oder gebrochen ist.

Einige der wichtigsten Eigenschaften der Funktion $(mP\zeta)$, amentlich aber ihre Hauptanalogien mit der Exponentialfunktion ergeben sich, wenn man das Produkt

$$x^{m-n} x^n = x^m$$

nach Formel (IV) differentiirt, indem man

$$x^{m-n} = f(x), \quad x^n = \varphi(x)$$

setzt. Man erhält so, da

$$\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$$

ist:

$$(mP\zeta)x^{m-\zeta}=\frac{\partial^\zeta(x^{m-n}x^n)}{\partial x^\zeta}=x^{m-n}\frac{\partial^\zeta(x^n)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}(m-n)x^{m-n-1}\frac{\partial^{\zeta-1}(x^n)}{\partial x^{\zeta-1}}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}\frac{\partial^{\zeta-2}(x^n)}{\partial x^{\zeta-2}}+\ldots,$$

$$=x^{m-n}(nP\zeta)x^{n-\zeta}+\frac{\zeta}{1}(m-n)x^{m-n-1}(nP\zeta-1)x^{n-\zeta+1}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}(nP\zeta-2)x^{n-\zeta+2}+\ldots$$

$$=x^{m-\zeta}\{(nP\zeta)+\frac{\zeta}{1}(m-nP1)(nP\zeta-1)+$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-nP2)(nP\zeta-2)+\ldots\},$$

was sich wegen

$$(nP\zeta-1)=\frac{(nP\zeta)}{n-\zeta+1}\text{ (nach Formel II)},$$

$$(nP\zeta-2)=\frac{(nP\zeta)}{(n-\zeta+1)(n-\zeta+2)}\text{ u. s. w.}$$

auch so schreiben lässt:

$$(mP\zeta)=(nP\zeta)\{1+\frac{\zeta}{1}\frac{m-n}{n-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m-n.m-n-1}{n-\zeta+1.n-\zeta+2}+\ldots\}\text{*)},$$

oder, wenn man statt m: $m+n$ setzt:

(VII)

$$(m+nP\zeta)=(nP\zeta)\{1+\frac{\zeta}{1}\frac{m}{n-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m.m-1}{n-\zeta+1.n-\zeta+2}+\ldots\}.$$

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich leicht für $(mP\zeta)$ diejenigen Relationen aufstellen, die den folgenden:

---

*) Setzt man in dieser Gleichung $n=\zeta$, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\frac{(mP\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=1+\frac{\zeta}{1}\frac{m-\zeta}{1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m-\zeta.m-\zeta-1}{1.2}+\ldots,$$

$\frac{(mP\zeta)}{(\zeta P\zeta)}$ ist aber die Anzahl der Combinationen von m Grössen zu je ζ. Es drückt sonach diese letztere Reihe das Interpolationsgesetz für die Newton'schen Binomialcoefficienten aus.

$$m^n m^\zeta = m^{n+\zeta}, \ (m^\zeta)^n = m^{n\zeta}$$

der Exponentialfunktion entsprechen.

Da sich nämlich das Hauptprodukt:

$$(mP\zeta) = m.m-1 \ldots (m-\zeta+1)$$

in eine beliebige Anzahl von Faktorengruppen zerlegen lässt, so hat man als allgemeinen Ausdruck des in Gleichung (II) enthaltenen Gesetzes:

$$(mP\zeta'+\zeta''+\zeta'''+\ldots) = (mP\zeta')(m-\zeta'P\zeta'')(m-(\zeta'+\zeta'')P\zeta''')\ldots \quad \text{(VIII)}$$

Hieraus folgt, da nach Gleichung (VII)($n=m$, $m=-\zeta'$, $\zeta=\zeta''$ gesetzt)

$$(m-\zeta'P\zeta'')$$
$$=(mP\zeta'')\{1-\frac{\zeta''\zeta'}{1.m-\zeta''+1}+\frac{\zeta''(\zeta''-1)}{1.2}\frac{\zeta'(\zeta'+1)}{m-\zeta''+1.m-\zeta''+2}-\ldots\}$$
$$=(mP\zeta'')\psi(\zeta', \zeta'', m),$$

ebenso:

$$(m-(\zeta'+\zeta'')P\zeta''')$$
$$=(mP\zeta''')\{1-\frac{\zeta'''(\zeta'+\zeta'')}{1.m-\zeta'''+1}+\frac{\zeta'''(\zeta'''-1)}{1.2}\frac{(\zeta'+\zeta'')(\zeta'+\zeta''+1)}{m-\zeta'''+1.m-\zeta'''+2}-\ldots\}$$
$$=(mP\zeta''')\psi(\zeta'+\zeta'', \zeta''', m) \text{ u. s. w.}$$

ist:

$$(mP\zeta'+\zeta''+\zeta'''+\ldots)$$
$$=(mP\zeta')(mP\zeta'')(mP\zeta''')\ldots\psi(\zeta', \zeta'', m).\psi(\zeta'+\zeta'', \zeta''', m)\ldots, \quad \text{(IX)}$$

insofern man unter

$$\psi(a, b, m)$$

die Reihe:

$$1-\frac{ba}{1.m-b+1}+\frac{b.b-1}{1.2}\frac{a.a+1}{m-b+1.m-b+2}-\ldots$$

versteht.

Die der Gleichung (IX) analoge Potenzformel ist:

$$m^{\zeta'+\zeta''+\zeta'''+\ldots} = m^{\zeta'} m^{\zeta''} m^{\zeta'''}\ldots$$

Setzt man in Formel (IX)

$$\zeta' = \zeta'' = \zeta''' \ldots = \zeta,$$

so erhält man:

$$(mPn\zeta) = (mP\zeta)^n \psi(\zeta, \zeta, m)\psi(2\zeta, \zeta, m)\psi(3\zeta, \zeta, m) \ldots$$
$$\ldots \psi((n-1)\zeta, \zeta, m),$$

wobei n als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird. Die (
chung (X) ist der Potenzformel:

$$m^{n\zeta} = (m^\zeta)^n$$

analog.

3) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$

Wenn es sich darum handelt, für $(mP\zeta)$ Tabellen zu ber
nen, so reicht die Formel (VI), in sofern man m und ζ gee
(d. h. so, dass Gleichung (VI) nicht divergent wird) wählt,
kommen aus. Der Anwendung wegen aber, die wir von der I
torielle $(mP\zeta)$ beim Differentiiren machen, erscheint es zw
mässig, auch für $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$ einen Ausdruck zu finden.

Wir bestimmen $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$ als $\int \frac{\partial(mP\zeta)}{(mP\zeta)}$, wobei es sich zunächst darum handelt, $\frac{\partial(mP\zeta)}{\partial\zeta}$ zu finden.

Es ist aber

$$\frac{\partial(mP\zeta)}{\partial\zeta} = \frac{(mP\zeta+\partial\zeta)-(mP\zeta)}{\partial\zeta}, \quad ($$

und nach Gleichung (VIII)

$$(mP\zeta+\partial\zeta) = (mP\zeta)(m-\zeta P\partial\zeta); \quad ($$

weiter nach Formel (VI)

$$(m-\zeta P\partial\zeta)$$
$$= (m-\zeta)^{\partial\zeta}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+\frac{\gamma}{(m-\zeta)^3}+\frac{\delta}{(m-\zeta)^4}+\ldots\right)\partial\zeta\right\},$$

wobei wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die Konstanten bezeichnen, wel
zum Vorschein kommen, wenn man

$$(m-\zeta P\partial\zeta) = (m-\zeta)^{\partial\zeta} + f'(\partial\zeta).(m-\zeta)^{\partial\zeta-1} + f''(\partial\zeta).(m-\zeta)^{\partial\zeta-2} + \ldots$$
$$= (m-\zeta)^{\partial\zeta}\left\{1+\frac{f'(\partial\zeta)}{m-\zeta}+\frac{f''(\partial\zeta)}{(m-\zeta)^2}+\ldots\right\},$$

entwickelt und die höheren Potenzen von $\partial\zeta$ vernachlässigt.

Weiter ist:

$$(m-\zeta)^{\partial\zeta} = m^{\partial\zeta}\{1-\frac{\zeta}{m}\partial\zeta+\ldots\}$$

$$=\{1+\partial\zeta\overset{e}{\log}m+\ldots\}\{1-\frac{\zeta}{m}\partial\zeta+\ldots\}=1+\partial\zeta\{\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta}{m}\}. \quad (4)$$

Man findet daher durch Einsetzung der Werthe aus Gl. (3) und (4) in (2 und (1):

$$\frac{\partial(mP\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{(mP\zeta+\partial\zeta)-(mP\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{(mP\zeta)\{1+\partial\zeta(\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta}{m})\}\{1+\left(\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+\frac{\gamma}{(m-\zeta)^3}+\ldots\right)\partial\zeta\}-(mP\zeta)}{\partial\zeta}$$

$$=(mP\zeta)(\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta}{m}+\{\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+\frac{\gamma}{(m-\zeta)^3}+\frac{\delta}{(m-\zeta)^4}+\ldots\}). \quad (5)$$

Daher

$$\overset{e}{\log}(mP\zeta)=\int\frac{\partial(mP\zeta)}{(mP\zeta)}=\zeta\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta^2}{2m}-\alpha\overset{e}{\log}(m-\zeta)+\frac{\beta}{m-\zeta}+\frac{\gamma}{2(m-\zeta)^2}+\frac{\delta}{3(m-\zeta)^3}+\ldots+\text{const.}$$

Die Konstante bestimmen wir dadurch, dass für

$$\zeta=0 \quad \overset{e}{\log}(mP0)=\overset{e}{\log}1=0$$

ist. Man hat daher

$$\text{const.}=\alpha\overset{e}{\log}m-\left(\frac{\beta}{m}+\frac{\gamma}{2m^2}+\frac{\delta}{3m^3}+\ldots\right)$$

und

$$\overset{e}{\log}(mP\zeta)=\zeta\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta^2}{2m}+\alpha\overset{e}{\log}\frac{m}{m-\zeta}+\frac{\beta}{1}\left(\frac{1}{m-\zeta}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{(m-\zeta)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{\delta}{3}\left(\frac{1}{(m-\zeta)^3}-\frac{1}{m^3}\right)+\ldots \quad \text{(XI)}$$

Bestimmung der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ in Gleichung (XI).

Um das rekurrente Bildungsgesetz der Coefficienten α, γ, $\delta \ldots$ aufzufinden, betrachten wir zunächst die Ausdrücke $(mP\partial$ und $(nP\partial\zeta)$, welche zugleich für die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P$ die Grundlage bilden.

Setzt man in Gleich. (VII) statt $m+n$: m, statt m: $m-n$ statt ζ: $\partial\zeta$ und vernachlässigt die höheren Potenzen von $\partial\zeta$, s wird:

$$(mP\partial\zeta)=(nP\partial\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{m-n}{1.n+1}-\frac{1}{1.2}\,\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1.2}{1.2.3}\,\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-....)\},\qquad\text{(XII)}$$

d. h.

$$\frac{(mP\partial\zeta)-(nP\partial\zeta)}{(nP\partial\zeta)\partial\zeta}=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\,\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\,\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-....\qquad\text{(XIII)}$$

Nun ist auch:

$$(mP\partial\zeta)=\frac{(m+p-\partial\zeta Pp)(m+pP\partial\zeta)}{(m+pPp)}$$

und

$$(m+p-\partial\zeta Pp)=(m+pPp)\{1-\partial\zeta(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-....)\}.$$

Weiter nach Gleich. (VI)

$$(m+pP\partial\zeta)=(m+p)^{\partial\zeta}\{1+(\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+....)\partial\zeta\}=(1+\partial\zeta\overset{e}{\log}(m+p))\{1+(\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+....)\partial\zeta\}$$

$$=1+\partial\zeta\{\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+\frac{\delta}{(m+p)^4}+....\}\qquad\text{(XIV)}$$

Daher auch:

$$(mP\partial\zeta)=\{1-\partial\zeta(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+....)\}$$

$$\times\{1+\partial\zeta(\overset{e}{\log}(m+p+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+...)\}$$

$$=1+\partial\zeta[\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+....$$

$$...-(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-...)],$$

und

$$\frac{(mP\partial\zeta)-(nP\partial\zeta)}{(nP\partial\zeta)\partial\zeta}=\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{1}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+....$$

$$....-\{\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+....\} \quad (2)$$

Setzt man (XIII)=(2), so wird:

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{n}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+....$$

$$....-\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+.....\right)$$

$$=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-.... \quad (XV)$$

Wenn man in dieser Gleichung $n=m$ setzt, so verschwindet die Reihe rechts und man bekommt:

$$\overset{e}{\log}\frac{m+p}{m}+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+....$$

$$....=\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+..., \quad (XVI)$$

welche Gleichung sich zur Bestimmung von α, β, γ.... vorzugsweise eignet. Man braucht nämlich dem p nur einen bestimmten ganzen positiven Werth zu geben. Setzt man z. B. $p=1$ und statt m: x, so wird,

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{x+1}{x}\right)+\alpha\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)+\beta\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right)+....=\frac{1}{x+1}.$$

Differentiirt man beiderseits und entwickelt die Brüche von der Form $\frac{1}{(x+1)^n}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so wird:

$$-\frac{1}{x(x+1)}+\alpha\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(\frac{-2}{(x+1)^3}+\frac{2}{x^3}\right)+\ldots=-\frac{1}{(x+1)^2},$$

und

$$\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}+\ldots\right\},$$

$$+\ \alpha\left\{\frac{-2}{1.x^3}+\frac{2.3}{1.2.x^4}-\frac{2.3.4}{1.2.3x^5}+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4.x^6}-\ldots\right\}$$

$$+2\beta\left\{\frac{-3}{1.x^4}+\frac{3.4}{1.2x^5}-\frac{3.4.5}{1.2.3x^6}+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4x^7}-\ldots\right\}$$

$$+3\gamma\left\{\frac{-4}{1.x^5}+\frac{4.5}{1.2.x^6}-\frac{4.5.6}{1.2.3x^7}+\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4x^8}-\ldots\right\}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{x^2}-\frac{1.2}{1.x^3}+\frac{1.2.3}{1.2.x^4}-\frac{1.2.3.4}{1.2.3.x^5}+\ldots.$$

Durch Gleichsetzung der beiderseits gleichen Potenzen erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&1+\frac{2}{1}\alpha=\frac{2}{1},\\
&1+\frac{2.3}{1.2}\alpha-\frac{3}{1}\cdot 2\beta=\frac{2.3}{1.2},\\
&1+\frac{2.3.4}{1.2.3}\alpha-\frac{3.4}{1.2}2\beta+\frac{4}{1}\cdot 3\gamma-\frac{2.3.4}{1.2.3},\\
&1+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}\alpha-\frac{3.4.5}{1.2.3}2\beta+\frac{4.5}{1.2}3\gamma-\frac{5}{1}.4\delta=\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4},\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XVII)}$$

Dieses Schema stimmt mit dem Bildungsschema der Bernoulli'schen Zahlen überein, so dass man hat:

$$\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=-\frac{1}{2}B_1=-\frac{1}{12},$$

$$\gamma=B_2=0$$

$$\delta=\frac{1}{4}B_3=+\frac{1}{120},$$

$$\varepsilon=B_4=0,$$

$$(\zeta)=-\frac{1}{6}B_5=-\frac{1}{252},\ \text{u. s. w.}^{*)}$$

*) Zum Unterschied von dem sonst häufig in dieser Abhandlung vorkommenden ζ ist dieses ζ in Parenthesen eingeschlossen worden. G.

Man kann daher, wenn man mit B_1, B_3, B_5.... die Bernoulli'schen Zahlen bezeichnet, Gleichung XI. auch so schreiben

$$\overset{e}{\log}(mP\zeta)=\zeta\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta^2}{2m}+\frac{1}{2}\overset{e}{\log}\frac{m}{m-\zeta}-\frac{1}{1.2}B_1\left(\frac{1}{m-\zeta}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{3.4}B_3\left(\frac{1}{(m-\zeta)^3}-\frac{1}{m^3}\right)-\frac{1}{5.6}B_5\left(\frac{1}{(m-\zeta)^5}-\frac{1}{m^5}\right)+\dots \quad \text{(XVII}$$

4) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$

Der Werth von $(\zeta P\zeta)$ lässt sich nach Formel (VI) nicht direkt berechnen, ebensowenig derjenige von $(0P\zeta)$, weil für $m=\zeta$ und für $m=0$ diese Formel divergent wird oder (für $m=0$) Glieder von unzulässiger Gestalt (0^ζ u. s. w.) erhält. Am leichtesten kommt man zum Ziel, wenn man zuerst für $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ einen Ausdruck sucht.

Wir bestimmen $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ ebenfalls wieder als $\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}$. Nun ist

$$\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)-(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}.$$

Es ist aber weiter:

$$(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)=(\zeta+\partial\zeta P\zeta)(\partial\zeta P\partial\zeta) \quad (1)$$

und

$$(\zeta+\partial\zeta P\zeta)=(\zeta P\zeta)\{1+\frac{\zeta\partial\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial\zeta.\partial\zeta-1}{1.2}+\dots\}$$
$$=(\zeta P\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3}+\dots)\} \quad (2)$$

Setzt man in Gleichuug (XII) $m=\partial\zeta$, $n=0$, so wird daraus:

$$(\partial\zeta P\partial\zeta)=(0P\partial\zeta)\{1+\partial\zeta^2(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\dots)\}=(0P\partial\zeta), \quad (3)$$

weil $\frac{\pi^2}{6}\partial\zeta^2$ gegen 1 verschwindet.

Nun ist nach (XII), wenn man dort $m=0$ setzt:

$$(0P\partial\zeta)=(nP\partial\zeta)\{1-\partial\zeta(\frac{n}{1.n+1}-\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}-\dots) \quad (4)$$

und nach Formel (XIV):

$$(\overset{e}{n}P\partial\zeta)=1+\partial\zeta(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....). \qquad (5)$$

Daher mit Benützung der Formeln (2), (3), (4), (5):

$$(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)=(\zeta P\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3}+....)\}$$

$$\times\{1\ \ \partial\zeta(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+...)\}\{1-\partial\zeta(\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+....)\}$$

$$=(\zeta P\zeta)+(\zeta P\zeta)\partial\zeta\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\\+\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....\\-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+....\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Daher

$$\frac{(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)-(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}$$

$$=\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}=(\zeta P\zeta)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\\+\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....\\-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}-....\end{array}\right\} \qquad (XIX)$$

nd

$$\log(\zeta P\zeta)=\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=\int\{\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\}\partial\zeta$$

$$+\int\{\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+...\}\partial\zeta-\int(\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+...)\partial\zeta.$$

1) *Zur* Integration der Reihe

$$\int(\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....)\partial\zeta$$

etzen wir in Gl. (XV) $m=0$ und $p=n$ und erhalten:

$$\frac{1}{1}\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\ldots$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}\frac{n.n+1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{n.n+1.n+2}{n+1.n+2.n+3}+\ldots \qquad \text{(XX)}$$

Wird hierin $n=\zeta$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{1\zeta}{11}-\frac{\zeta.\zeta-1}{2.1.2}+\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{3.1.2.3}-\ldots=\frac{\zeta}{1.\zeta+1}+\frac{\zeta}{2.\zeta+2}+\frac{\zeta}{3.\zeta+3}+\ldots$$

Daher

---

*) Die Reihe

$$\frac{1}{1.\zeta+1}+\frac{1}{2.\zeta+2}+\frac{1}{3.\zeta+3}+\ldots=R$$

lässt sich auch als ein bestimmtes Integral ausdrücken. Nennt m nämlich:

$$S=\frac{x^{\zeta+1}}{1.\zeta+1}+\frac{x^{\zeta+2}}{2.\zeta+2}+\frac{x^{\zeta+3}}{3.\zeta+3}+\ldots,$$

so ist:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{x^{\zeta}}{1}+\frac{x^{\zeta+1}}{2}+\frac{x^{\zeta+2}}{3}+\ldots=x^{\zeta-1}\{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\}$$

$$=-x^{\zeta-1}\log(1-x).$$

Denn

$$\frac{\partial(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots)}{\partial x}=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

d. h.

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\int\frac{\partial x}{1-x}=-\log(1-x).$$

Daher

$$S=-\int x^{\zeta-1}\log(1-x)\partial x,\quad R=-\int_{0\div 1} x^{\zeta-1}\log(1-x)\partial x,$$

wobei die Konstante so zu wählen ist, dass für $x=0$ das Integral glei(Null ist.

$$\int \partial\zeta\left(\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{1}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+2}+\frac{1}{3}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+3}+\ldots \quad (1)$$

Nun ist allgemein

$$\frac{1}{p+\zeta}=\frac{1}{p}-\frac{\zeta}{p^2}+\frac{\zeta^2}{p^3}-\ldots$$

Daher

$$\frac{1}{1}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{1+\zeta}=\frac{1}{1.1}\int\zeta\partial\zeta-\frac{1}{1.1^2}\int\zeta^2\partial\zeta+\frac{1}{1.1^3}\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{2+\zeta}=\frac{1}{2.2}\int\zeta\partial\zeta-\frac{1}{2.2^2}\int\zeta^2\partial\zeta+\frac{1}{2.2^3}\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots \text{ u. s. w.}$$

d. h.

$$\int\partial\zeta\left(\frac{\zeta}{1.1}-\frac{1}{2}\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3}+\ldots\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\left\{\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\ldots\right\}\int\zeta\partial\zeta\\&-\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right\}\int\zeta^2\partial\zeta\\&+\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right\}\int\zeta^3\partial\zeta\\&-\ldots\ldots\end{aligned}\right\}=s_2\int\zeta\partial\zeta-s_3\int\zeta^2\partial\zeta+s_4\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots \quad \text{(XXI)}$$

insofern man die Summe $\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$ mit s_n bezeichnet

2) Die Summen der Reihen

$$\overset{e}{\log} n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots$$

und

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\ldots$$

sind ebenfalls leicht zu bestimmen.

Da wir nämlich oben gefunden haben, dass

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}B_1,\ \delta=+\frac{1}{4}B_3,\ (\zeta)=-\frac{1}{6}B_5$$
$$\gamma=0,\qquad \varepsilon=0,\qquad \eta=0$$

u. s. w. sind, sofern B_1, B_3, B_5.... die Bernoulli'schen Zahlen vorstellen, so konvergirt die Reihe

$$\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots=\overset{e}{\log}n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1}{2n^2}+\frac{B_3}{4n^4}-\frac{B_5}{6n^6}+\ldots{}^{*})$$

jedenfalls bis zu einem gewissen Gliede, wenn man n hinlänglich gross annimmt.

Die Summe der Reihe

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{2n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{3n+3}+\ldots$$

endlich erhält man für n positiv ganz nach Gl. (XX), indem der dieser Reihe identische Ausdruck

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\ldots$$

für n positiv ganz sich in eine geschlossene Gliederzahl verwandelt.

Die Differenz der beiden Reihen:

$$(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots)-(\frac{n}{1.n+1}+\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}+\ldots)$$

ist eine konstante von n selbst unabhängige Grösse. Bezeichnet man dieselbe mit $-s_1$, so ergibt sich

$$\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=-s_1\int\partial\zeta+s_2\int\zeta\partial\zeta-s_3\int\zeta^2\partial\zeta+s_4\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots$$

d. h.

$$\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=-s_1\zeta+\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3+\frac{s_4}{4}\zeta^4-\ldots+\text{const};$$

*) Diese Reihe gehört zu der Klasse der halbconvergenten, weil die Bernoulli'schen Zahlen B_1, B_3, B_5. .... über eine gewisse Gränze hinaus so stark wachsen, dass sich die $(2m-1)$te zur $(2m+1)$ten für $m\,\infty$ wie $1:pm^2$ verhält. So lange daher n eine endliche Zahl ist, divergirt die Reihe jedenfalls von einem gewissen Glied an, ist aber bis zu diesem Glied konvergent.

Für $\zeta=0$ ist $(\zeta P\zeta)=1$, daher $const.=0$, also:

$$\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=-s_1\zeta+\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3+\frac{s_4}{4}\zeta^4-\dots \quad \text{(XXII)}\ ^{*)}$$

---

*) Die Werthe $s_2, s_3, s_4, \dots$ lassen sich leicht bestimmen, indem

$$s_m=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\dots$$

für m gerade sich als Funktion von π ausdrücken und für m ungerade sich durch stark konvergirende Reihen geben lässt, in welche ebenfalls die Bernoulli'schen Zahlen eingehen. Ebenso kann man

$$s_1=-(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\dots)+n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2.n+2}+\dots\right)$$

auch vermittelst der Gleichung (XXII) bestimmen, indem für $\zeta=1$: $(\zeta P\zeta)=1$ und $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=0$ ist, so dass man erhält:

$$s_1=\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}-\frac{s_5}{5}+\dots$$

Nach der Gleichung:

$$(\zeta+aP\zeta)=\left(\frac{\zeta}{1}+1\right)\left(\frac{\zeta}{2}+1\right)\dots\left(\frac{\zeta}{a}+1\right)(\zeta P\zeta),$$

wobei ζ beliebig, a positiv ganz ist, hat man auch:

$$\overset{e}{\log}(\zeta+aP\zeta)=\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{1}+1\right)+\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{2}+1\right)+\dots+\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{a}+1\right)+\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta),$$

d. h. wenn man Alles rechterhand in Reihen entwickelt und das Zusammengehörige vereinigt:

$$\begin{aligned}\overset{e}{\log}(\zeta+aP\zeta)=&(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{a}-s_1)\zeta\\&+(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\dots-\frac{1}{a^2})\frac{\zeta^2}{2}\\&-(s_3-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\dots-\frac{1}{a^3})\frac{\zeta^3}{3}\end{aligned}$$

Für $\zeta=1$ ist:

$$\overset{e}{\log}(1+a)=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{a}-s_1)+\frac{1}{2}(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\dots-\frac{1}{a^2})-.$$

Da aber

$$s_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots,\quad s_3=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots,\ \text{u. s. w.}$$

Diese Reihe konvergirt für Werthe von $\zeta < 1$ und > -1, wie der Quotient des $(n+1)$ten und $n$ten Gliedes derselben für $n\infty$ ergibt.

5) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0P\zeta)$, sowie von $(\zeta P\zeta)$ und $(0P\zeta)$.

Da nach Gleichung (VIII)

$$(0P\zeta)(-\zeta P-\zeta)=(0P\zeta-\zeta)=1, \text{ d. h. } (0P\zeta)=\frac{1}{(-\zeta P-\zeta)}$$

ist, so hat man sogleich:

$$\overset{e}{\log}(0P\zeta)+\log(-\zeta P-\zeta)=0.$$

Hieraus folgt, dass die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0P\zeta)$ ganz dieselben Coefficienten wie die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ besitzt und nur die Coefficienten der geraden Potenzen von ζ das entgegengesetzte Zeichen haben, d. h.

$$\overset{e}{\log}(0P\zeta)=-s_1\zeta-\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3-\ldots \qquad \text{(XXIII)}$$

Diese Reihe konvergirt ebenfalls für Werthe von $\zeta<1$ und >-1.

Mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten lassen sich nun leicht noch die folgenden beiden Entwickelungen finden:

$$(\zeta P\zeta)=1+s_1\zeta+\frac{1}{2}(s_2+s_1a_1)\zeta^2-\frac{1}{3}(s_3+s_2a_1+s_1a_2)\zeta^3+\ldots \qquad \text{(XXIV)}$$

wobei $a_1=s_1$, $a_2=s_2+s_1a_1$, $a_3=s_3+s_2a_1+s_1a_2$, u. s. w. ist;

$$(0P\zeta)=1-s_1\zeta-\frac{1}{2}(s_2-s_1n_1)\zeta^2-\frac{1}{3}(s_3-s_2n_1-s_1n_2)\zeta^3-\ldots, \qquad \text{(XXV)}$$

---

ist, so lässt sich auch setzen:

$$\overset{e}{\log}(1+\alpha)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\alpha}-s_1$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+2)^2}+\ldots\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^3}+\frac{1}{(\alpha+2)^3}+\ldots\right)+\ldots$$

oder da für $\alpha\infty$ rechts nur die erste Klammer übrig bleibt:

$$s_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\alpha}-\overset{e}{\log}(1+\alpha)$$

für $\alpha\infty$ und ganz, also ein neuer Werth für die Konstante s_1.

wobei $n_1 = s_1$, $n_2 = s_2 - s_1 n_1$, $n_3 = s_3 - s_2 n_1 - s_1 n_2$, u. s. w. ist, während s_1, s_2, s_3 .... dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (XXII) und Gleichung (XXXIII) haben.

6) Wirkliche Auswerthung der Funktionen $y = (mP\zeta)$ und $y = (\zeta P\zeta)$.

Für die wirkliche Auswerthung der Funktion $y = (mP\zeta)$ ist die Formel (VI) die bequemste. Nach ihr ist:

$$(mP\zeta) = m^\zeta - \frac{\zeta . \zeta - 1}{2} m^{\zeta-1} + \frac{\zeta . \zeta - 1 . \zeta - 2}{2.4} (\zeta - \frac{1}{3}) m^{\zeta-2} - \ldots$$

Diese Reihe ist brauchbar, wenn m gross, ζ ein kleiner Bruch ist. Für $\zeta = \frac{1}{2}$ findet man:

$$(mP\tfrac{1}{2}) = m^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^3 m} + \frac{1}{2^7 m^2} - \frac{5}{2^{10} . m^3} - \frac{21}{2^{15} m^4} + \frac{399}{2^{18} m^5} + \frac{869}{2^{22} . m^6} - \frac{39325}{2^{25} . m^7} - \frac{334477}{2^{31} m^8} \right\}.$$

Dies ist eine halbkonvergente Reihe, und zwar beginnt ihre Divergenz um so früher, je kleiner man m nimmt. Für $m = 1$ reicht ihre Konvergenz nur bis etwa zum 5ten Gliede. Nimmt man dagegen $m = 10$, so wird:

$$(10P\tfrac{1}{2}) = \sqrt{10} \left\{ \begin{array}{l} 1,000\,000\,000 + 0,012\,500\,000 + 0,000\,078\,125 \\ -0,000\,004\,882 - 0,000\,000\,064 + 0,000\,000\,015 \\ +0,000\,000\,001 - 0,000\,000\,000 \end{array} \right\}$$

$$= 3,202\,037\,59.$$

Aus dem Werth von $(mP\frac{1}{2})$ lässt sich leicht der Werth von $(m+nP\frac{1}{2})$ und von $(mPn + \frac{1}{2})$ finden. Man hat nämlich:

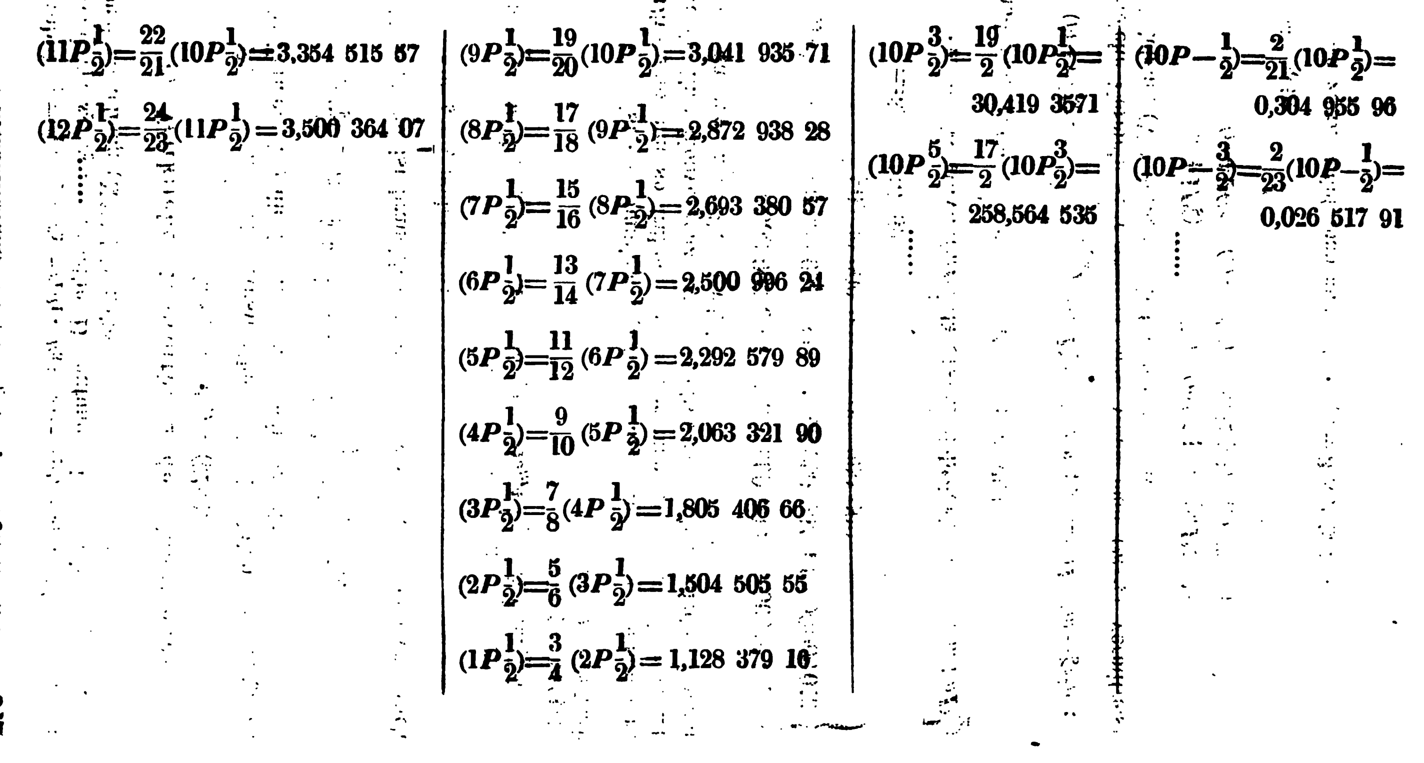
$$(m+nP\zeta) = \frac{(m+nPn)}{(m+n-\zeta Pn)} (mP\zeta), \quad (mPn+\zeta) = (mP\zeta)(m-\zeta Pn);$$

welche Formeln sehr bequem sind, wenn man $(mP\zeta)$ vermittelst Gleichung (VI) berechnet hat und successiv:

$$\begin{array}{llll} (m+1P\zeta) & (m-1P\zeta) & (mP\zeta+1) & (mP\zeta-1) \\ (m+2P\zeta) & (m-2P\zeta) & (mP\zeta+2) & (mP\zeta-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

finden will.

So z. B. findet man aus: $(10P\frac{1}{2}) = 3,202\,037\,59$:



$(11P\frac{1}{2}) = \frac{22}{21}(10P\frac{1}{2}) = 3{,}354\ 515\ 57$

$(12P\frac{1}{2}) = \frac{24}{23}(11P\frac{1}{2}) = 3{,}500\ 364\ 07$

$(9P\frac{1}{2}) = \frac{19}{20}(10P\frac{1}{2}) = 3{,}041\ 935\ 71$

$(8P\frac{1}{2}) = \frac{17}{18}(9P\frac{1}{2}) = 2{,}872\ 938\ 28$

$(7P\frac{1}{2}) = \frac{15}{16}(8P\frac{1}{2}) = 2{,}693\ 380\ 57$

$(6P\frac{1}{2}) = \frac{13}{14}(7P\frac{1}{2}) = 2{,}500\ 996\ 24$

$(5P\frac{1}{2}) = \frac{11}{12}(6P\frac{1}{2}) = 2{,}292\ 579\ 89$

$(4P\frac{1}{2}) = \frac{9}{10}(5P\frac{1}{2}) = 2{,}063\ 321\ 90$

$(3P\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}(4P\frac{1}{2}) = 1{,}805\ 406\ 66$

$(2P\frac{1}{2}) = \frac{5}{6}(3P\frac{1}{2}) = 1{,}504\ 505\ 55$

$(1P\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}(2P\frac{1}{2}) = 1{,}128\ 379\ 16$

$(10P\frac{3}{2}) = \frac{19}{2}(10P\frac{1}{2}) =$ $30{,}419\ 3571$

$(10P\frac{5}{2}) = \frac{17}{2}(10P\frac{3}{2}) =$ $258{,}564\ 535$

$(10P-\frac{1}{2}) = \frac{2}{21}(10P\frac{1}{2}) =$ $0{,}304\ 955\ 96$

$(10P-\frac{3}{2}) = \frac{2}{23}(10P-\frac{1}{2}) =$ $0{,}026\ 517\ 91$

Wir haben also so: $(1P\frac{1}{2})=1,128\,379\,16$ gefunden. Die fünf ersten Glieder der Formel für $mP\frac{1}{2}$ (s. oben) geben direkt:

$$(1P\frac{1}{2})=1,12729....$$

als Annäherungswerth.

Ist in $(mP\zeta)$ m ein ächter Bruch, z. B. $m=\frac{1}{2}$, so hilft man sich ganz in ähnlicher Weise, um die für diesen Fall mangelnde Convergenz der Reihe (VI) zu umgehen. Es ist nämlich:

$$(\tfrac{1}{2}P\zeta)=\frac{(\frac{1}{2}-\zeta+1)(\frac{1}{2}-\zeta+2)(\frac{1}{2}-\zeta+3)....(\frac{1}{2}-\zeta+n)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)....(\frac{1}{2}+n)}(\tfrac{1}{2}+nP\zeta).$$

Ist z. B. $\zeta=\frac{1}{2}$ und wählt man $n=10$, so findet man mit direkter Benutzung von Gleichung (VI):

$$\left(\frac{21}{2}P\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{21}{2}}\{1,000\,000\,00+0,011\,904\,76+0,000\,070\,86$$
$$-0,000\,004\,21-0,000\,000\,05+....\}$$
$$=3,240\,370\,349\,.\,1,011\,971\,36=3,279\,161\,98$$

und hieraus:

$$\left(\frac{1}{2}P\frac{1}{2}\right)=\frac{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20}{3.5.7.9.11.13.15.17.19.21}\cdot\left(\frac{21}{2}P\frac{1}{2}\right)=0,886\,226\,91.$$

Man kann auch die Formel $(m+nP\zeta)=\frac{(m+nPn)}{(m+n-\zeta Pn)}(mP\zeta)$, wie in Gleichung (VII) geschehen ist, so umgestalten, dass man den Faktor $\frac{(m+nPn)}{(m+n-\zeta Pn)}$ in eine Reihe verwandelt.

Diese Umwandlung ist dann von Nutzen, wenn m eine grosse Zahl, $(mP\zeta)$ bereits bekannt ist und ζ und n kleine Brüche sind, so dass die Reihe:

$$\frac{(m+nPn)}{(m+\zeta-nPn)}=1+\frac{\zeta.n}{1.m-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1.n.n-1}{1.2.m-\zeta+1.m-\zeta+2}+....$$

hinlänglich convergent wird.

So z. B. hat man

$$\left(-\frac{9}{10}P\zeta\right)=\frac{1-10\zeta.11-10\zeta.21-10\zeta....91-10\zeta.101-10\zeta}{1\;.\;11\;.\;21\;....\;91\;.\;101}\left(\frac{101}{10}P\zeta\right).$$

Nach Gleichung (VII) ist aber:

$$\left(\frac{101}{1}P\zeta\right)=(10P\zeta)\Big\{1+\frac{\zeta\cdot\frac{1}{10}}{11-\zeta}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}}{11-\zeta.12-\zeta}$$

$$+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}\cdot\frac{-19}{10}}{11-\zeta.12-\zeta.13-\zeta}+\ldots\Big\}.$$

Für $\zeta=\frac{1}{2}$ ist

$$\left(\frac{101}{10}P\frac{1}{2}\right)=\left(10P\frac{1}{2}\right)\left\{\begin{matrix}1+0{,}004\,761\,904-0{,}000\,093\,167+0{,}000\,007\,080\\ -0{,}000\,000\,950+0{,}000\,000\,179-\ldots\end{matrix}\right\}^{*)}$$

$$=3{,}202\,037\,59\,.\,1{,}004\,863\,28=3{,}217\,609.$$

Daher

$$\left(-\frac{9}{10}P\frac{1}{2}\right)=\frac{96.86.76\ldots16.6.-4}{101.91.81\ldots21.11.1}\left(101P\frac{1}{2}\right)=-2{,}855\,346\ ^{**)}.$$

---

*) Das $n$te Glied der Klammerreihe entsteht, vom 3ten Gliede an, aus dem $(n-1)$ten durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$-\frac{(2n-5)(10n-21)}{10(n-1)(2n+17)},$$

welcher für $n\,\infty=\frac{-20n^2}{20n^2}=-1$ ist. Die Reihe ist daher, da die ersten Glieder sichtlich konvergiren, ebenfalls wieder eine halbkonvergente.

**) Ist $(mP-\zeta)$ zu finden, so ist nach Gleichung (VIII)

$$(mP-\zeta)=\frac{1}{(m+\zeta P\zeta)}.$$

Setzt man hierin ζ successiv $=1, 2, \ldots,$ so ist

$$(mP-1)=\frac{1}{m+1},\quad (mP-2)=\frac{1}{(m+2)(m+1)}\ \text{u. s. w.}$$

Ganz dieselben Resultate erhält man, wenn man in Gleichung (VI) $\zeta=-1, -2, \ldots$ setzt. Man erhält nämlich in:

$$(mP-1)=m^{-1}+f'(-1)m^{-2}+f''(-1)m^{-3}+\ldots,$$

$$f'(-1)=\frac{1}{2}.-1.-2=+1;$$

ebenso weiter:

$$f''(-1)=-1,\quad f'''(-1)=+1,\quad f^{IV}(-1)=-1,\ \text{u. s. w.}$$

Daher

Mit Anwendung dieser Hülfsgleichungen lässt sich nun auch leicht $(\zeta P \zeta)$ und $(0 P \zeta)$ aus $(m P \zeta)$ bestimmen, wenn man nur m passend wählt. So z. B. haben wir oben $\left(\frac{1}{2} P \frac{1}{2}\right)$ bestimmt. Für $(0 P \frac{1}{2})$ findet man:

$$(0 P \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} (1 P \tfrac{1}{2}) = 0{,}564\ 189\ 58.$$

7) Diskussion der Funktion $y = (m P \zeta)$.

Man muss hierbei vorerst unterscheiden, ob m positiv, oder Null, oder ob es negativ ist.

$$(mP-1) = m^{-1} - m^{-2} + m^{-3} - \dots = \frac{1}{m+1}.$$

Setzt man in Gleichung (VI) $\zeta = -2$, so wird:

$$(mP-2) = m^{-2} - 3m^{-3} + 7m^{-4} - 15m^{-5} + \dots \pm (2^{n-1}-1)m^{-n}$$
$$= \frac{1}{m^2} - \frac{3}{m^3} + \frac{7}{m^4} - \frac{15}{m^5} + \dots$$

Fassen wir je 2 Glieder, ein positives und ein negatives, zusammen, so erhalten wir:

1stes Glied: $\frac{m-3}{m^3}$, 2tes Glied: $\frac{7m-15}{m^5}$, 3tes Glied: $\frac{31m-63}{m^7}$,

....$n$tes Glied: $\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{2n}-1)}{m^{2n+1}}$.

Das $n$te Glied besteht sonach aus den 4 Werthen:

$$\frac{2^{2n-1}}{m^{2n}} - \frac{1}{m^{2n}} - \frac{2^{2n}}{m^{2n+1}} + \frac{1}{m^{2n+1}}.$$

Wir erhalten daher für die 4 entsprechenden geometrischen Reihen die Gesammtsumme:

$$S = \frac{2}{m^2-4} - \frac{1}{m^2-1} - \frac{4}{m(m^2-4)} + \frac{1}{m(m^2-1)} = \frac{m^3-3m^2+2m}{m(m^2-1)(m^2-4)}$$
$$= \frac{m.m-1.m-2}{m(m^2-1)(m^2-4)} = \frac{1}{m+1.m+2},$$

also ebenfalls $(mP-2) = \frac{1}{m+1.m+2}$.

Ganz auf ähnliche Weise lassen sich auch die Ausdrücke für $(mP-3)$, $(mP-4)$.... aus der Formel (VI) entwickeln.

Ist m positiv, so hat es keinen wesentlichen Einfluss auf die Gestalt der Kurve, ob es ganz oder gebrochen ist.

Ist m negativ ganz, so verwandelt sich die Kurve $y=(mP\zeta)$ in ein System von isolirten Punkten.

Ist m negativ gebrochen, so muss man einen Unterschied machen, ob es zwischen 0 und -1, -2 und -3, -4 und -5 u. s. w. oder zwischen -1 und -2, -3 und -4 u. s. w. liegt. Sowohl wenn m zwischen $-2n$ und $-(2n+1)$ (n positiv ganz oder Null), als auch wenn es zwischen $-(2n+1)$ und $-(2n+2)$ liegt, nähert sich die Kurve auf der negativen Seite der ζ der ζ-Axe als Asymptote, im erstern Fall aber von oben, im zweiten von unten her.

1) Ist m positiv ganz, so erhält man für die Kurve $y=(mP\zeta)$ vorerst feste Punkte, wenn man ζ successiv $=0, 1, 2, 3\ldots.$ und $\zeta=-1, -2, -3\ldots.$ setzt. Es ist nämlich:

$$(mP0)=1,$$
$$(mP1)=m,$$
$$(mP2)=m.m-1,$$
$$\vdots$$
$$(mPm-1)=m.m-1.m-2\ldots.3.2,$$
$$(mPm)=m.m-1.m-2\ldots.3.2.1.$$

Wir sehen, dass von $\zeta=0$ bis $\zeta=m-1$ die Ordinaten zunehmen. Für $\zeta=m$ erhält man wieder dieselbe Ordinate wie für $\zeta=m-1$. Es findet also zwischen $\zeta=m-1$ und $\zeta=m$ ein Maximum der Ordinaten Statt.

Für $\zeta=m+1$ wird $(mPm+1)=0$; denn es ist allemal $(mP\zeta+1)$ $=(m-\zeta)(mP\zeta)$, daher $(mPm+1)=(m-m)(mPm)=0$. Ebenso ist für $\zeta=m+2$:

$$(mPm+2)=(m.m+1)(mPm+1)=0 \text{ u. s. w.}$$

Es nehmen also die Ordinaten $\zeta=m$ und $\zeta=m+1$ stetig ab und werden für $\zeta=m+1$ Null. Von da an schneidet die Kurve die ζ-Axe in unzählig vielen Punkten, die alle im Abstand Eins von einander stehen.

Für ganze Werthe von ζ, die kleiner als Null sind, erhalten wir um so kleinere Brüche $\left((mP-1)=\frac{1}{m+1}, (mP-2)=\frac{1}{m+1.m+2}\ldots\right)$ je grösser der absolute Werth der negativen Abscisse ist. Für $\zeta=-\infty$ wird $y=0$. Es ist also auf der negativen Seite der ζ die ζ-Axe Asymptote der Kurve.

Die Kurve $y=(mP\zeta)$ hat hiernach für $m=4$ die in Taf. III. Fig. 1. dargestellte Form:

$$(4P0)=1$$

$$(4P\tfrac{1}{2}) = 2{,}063\ 321\ 90 \qquad (4P-\tfrac{1}{2})=\tfrac{2}{9}(4P\tfrac{1}{2})=0{,}458\ 515\ 97$$

$$(4P1) = 4{,}000\ 000\ 00 \qquad (4P-1)=\tfrac{1}{4+1}=0{,}200\ 000\ 00$$

$$(4P\tfrac{3}{2}) = 7{,}221\ 626\ 66\ \{=\tfrac{7}{2}(4P\tfrac{1}{2})\} \qquad (4P-\tfrac{3}{2})=\tfrac{2}{11}(4P-\tfrac{1}{2})=0{,}083\ 366\ 54$$

$$(4P2) = 12{,}000\ 000\ 00 \qquad (4P-2)=\tfrac{1}{5.6}=0{,}033\ 333\ 33$$

$$(4P\tfrac{5}{2}) = 18{,}054\ 066\ 6\ \{=\tfrac{5}{2}(4P\tfrac{3}{2})\} \qquad (4P-\tfrac{5}{2})=\tfrac{2}{13}(4P-\tfrac{3}{2})=0{,}012\ 825\ 62$$

$$(4P3) = 24{,}000\ 000\ 00$$

u. s. w.

$$(4P\tfrac{7}{2}) = 27{,}081\ 099\ 9\ \{=\tfrac{3}{2}(4P\tfrac{5}{2})\}$$

$$(4P4) = 24{,}000\ 000\ 00$$

Kurve $y=(4P\zeta)$ siehe Taf. III. Fig. 1.

$$(4P\tfrac{9}{2}) = 13{,}540\ 549\ 9\ \{=\tfrac{1}{2}(4P\tfrac{7}{2})\}$$

$$(4P5) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(4P\tfrac{11}{2}) = -6{,}770\ 274\ 99\ \{=-\tfrac{1}{2}(4P\tfrac{9}{2})\}$$

$$(4P6) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(4P\tfrac{13}{2}) = +10{,}155\ 412\ 4\ \{=-\tfrac{3}{2}(4P\tfrac{11}{2})\}$$

$$(4P7) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(4P\tfrac{15}{2}) = -25{,}388\ 531\ 2\ \{=-\tfrac{5}{2}(4P\tfrac{13}{2})\} \text{ u. s. w.}$$

Je grösser m ist, um so mehr entfernen sich die Maxima und Minima auf der positiven Seite der ζ von der ζ-Axe, während auf der negativen Seite der ζ die asymptotische Annäherung der Kurve an die ζ-Axe um so stärker ist.

2) Ist $m = 0$, so erhält man

$$(0P0) = 1$$

$$(0P\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(1P\tfrac{1}{2}) = 0{,}564\ 189\ 58$$

$$(0P1) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P\tfrac{3}{2}) = \frac{5.3.1.-1}{8.6.4.2}(4P\tfrac{3}{2}) = -0{,}282\ 094\ 79\ \{= -\tfrac{1}{2}(0P\tfrac{1}{2})\}$$

$$(0P2) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P\tfrac{5}{2}) = \frac{3.1.-1.-3}{8.6.4.2}(4P\tfrac{5}{2}) = 0{,}423\ 142\ 18\ \{= -\tfrac{3}{2}(0P\tfrac{3}{2})\}$$

$$(0P3) = 0{,}000\ 000\ 00$$

u. s. w.

$$(0P-\tfrac{1}{2}) = \frac{9.7.5.3}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{1}{2}) = 1{,}128\ 379\ 16$$

$$(0P-1) = \frac{1}{0+1} = 1{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P-\tfrac{3}{2}) = \frac{11.9.7.5}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{3}{2}) = 0{,}752\ 252\ 77$$

$$(0P-2) = \frac{1}{1.2} = 0{,}500\ 000\ 00$$

$$(0P-\tfrac{5}{2}) = \frac{13.11.9.7}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{5}{2}) = 0{,}300\ 901\ 10$$

u. s. w.

Kurve $y = (0P\zeta)$ s. Taf. III. Fig. 2.

Es beginnt also, wie Taf. III. Fig. 2. zeigt, bei der K
$y = (0P\zeta)$ das Hauptmaximum, welches für m ganz auf der
tiven Seite der ζ liegt und beim Abnehmen von m stets kl

irds, auf die negative Seite zu rücken. Je mehr es sich dem Werthe −1 nähert, um so mehr erhebt sich wieder dieses Hauptmaximum auf der negativen Seite der ζ über die ζ Axe, bei weiterem Verlaufe sich derselben asymptotisch nähernd, so dass immer zwischen diesem Hauptmaximum und dem negativ Unendlichen ein Wendungspunkt der Kurve liegt.

So erhält man für $y=(-\frac{9}{10}P\zeta)$:

$$(-\tfrac{9}{10}P0) = 1$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{10}) = 0{,}000\ 000 \qquad (-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{1}{2}) = 6{,}388\ 367\ \{= -\tfrac{10}{4}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2})\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2}) = -2{,}555\ 346 \qquad (-\tfrac{9}{10}P-1) = 10{,}000\ 000\ \{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P1) = -0{,}900\ 000 \qquad (-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{3}{2}) = 10{,}647\ \ 27\ \{= \tfrac{10}{6}(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{1}{2})\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{11}{10}) = 0{,}000\ 000 \qquad (-\tfrac{9}{10}P-2) = 9{,}090\ 909\ \{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{3}{2}) = +3{,}577\ 485\ \{= -\tfrac{14}{10}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2})\} \qquad (-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{5}{2}) = 6{,}654\ 548\ \{= \tfrac{10}{16}(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{3}{2})\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P2) = +1{,}710\ 000\ \{= -\tfrac{9}{10}\cdot(-\tfrac{9}{10}-1)\} \qquad (-\tfrac{9}{10}P-3) = 4{,}329\ 004\ \{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{3-\frac{9}{10}}\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{21}{10}) = 0{,}000\ 000$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{5}{2}) = -8{,}585\ 965\ \{= -\tfrac{24}{10}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{3}{2})\}$$

u. s. w. u. s. w.

Kurve $y=(-\frac{9}{10}P\zeta)$ s. Taf. III. Fig. 3.

3) Je mehr sich m dem Werthe -1 nähert, um so weiter entfernt sich das Hauptmaximum links von der ξ-Axe. Für $m=-1$ existirt dasselbe nicht mehr, sondern die Kurve $y=(-1P\xi)$ repräsentirt nur ein System isolirter Punkte, die abwechselnd auf der positiven und auf der negativen Seite der y liegen. Man hat nämlich:

$$(-1P0)=1 \qquad (-1P-1)=\frac{(-1P0)}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$(-1P1)=-1$$

$$(-1P2)=-1.-2=1.2 \qquad (-1P-2)=\frac{(-1P-1)}{-1+2}=\infty$$

$$(-1P3)=-1.-2.-3=-1.2.3 \qquad \text{u. s. w.}$$

u. s. w.

Gibt man in $y=(-1P\xi)$ dem ξ einen gebrochenen Werth, so erhält man stets imaginäre Ordinaten. Denn bezeichnen n und ξ' Zahlen, die prim zu einander sind, so ist $\left(0P\frac{n}{x'}\right)$ stets ein reeller endlicher Werth. Nun ist aber

$$(-1P\frac{n}{\xi'})=\frac{-\frac{n}{\xi'}}{-1+1}(0P\frac{n}{\xi'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{\xi'})=\infty.$$

Die Kurve $y=(-1P\xi)$ hat also nur reelle Ordinaten für $\xi=0$, 1, 2, 3 .... u. s. w. Siehe Taf. III. Fig. 4.

4) Welche Gestalt die Kurve $y=(mP\xi)$ für Werthe von m zwischen -1 und -2 annimmt, ergibt sich aus der graphischen Darstellung Taf. III. Fig. 5., 6. und 7. der folgenden drei Schemata, die Ordinaten der Kurven $y=(-\frac{11}{10}P\xi)$, $y=(-\frac{3}{2}P\xi)$ und $y=(-\frac{19}{10}P\xi)$ repräsentirend:

$$\left(-\frac{11}{10}P0\right)=1$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{9}{10}\right)=0{,}000\ 000 \qquad \left(-\frac{11}{10}P-\frac{1}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P1\right)=-1{,}100\ 000 \qquad \left(-\frac{11}{10}P-1\right)=-10{,}000\ 000\ \left(=\frac{1}{1-\frac{11}{10}}\right)$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{19}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P2\right)=2{,}310\ 000\left(=\frac{-11.-21}{10.10}\right) \qquad \left(-\frac{11}{10}P-2\right)=+11{,}111\ 111\ \left(=\left(-\frac{11}{10}P-1\right)\cdot\frac{1}{2-\frac{11}{10}}\right)$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{29}{10}\right)=0{,}000\ 000 \qquad \left(-\frac{11}{10}P-3\right)=5{,}847\ 953\ \left(=\left(-\frac{11}{10}P-2\right)\cdot\frac{1}{3-\frac{11}{10}}\right)$$

u. s. w. u. s. w.

(S. Taf. III. Fig. 5.)

$$\left(-\frac{3}{2}P0\right)=1$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{1}{2}\right)=0{,}000\,000 \qquad \left(-\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}\right)=\ 0{,}000\,000$$

$$\left(-\frac{3}{2}P1\right)=-1{,}500\,000 \qquad \left(-\frac{3}{2}P-1\right)=-2{,}000\,000\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{3}{2}\right)=0{,}000\,000 \qquad \left(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2}\right)=+3{,}544\,907\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}P-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P2\right)=+3{,}750\,000\ \left\{=\frac{3.5}{2.2}\right\} \qquad \left(-\frac{3}{2}P-2\right)=+4{,}000\,000\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+2}\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{5}{2}\right)=0{,}000\,000 \qquad \left(-\frac{3}{2}P-\frac{5}{2}\right)=+3{,}544\,907\ \left\{=\left(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

u. s. w. u. s. w.

S. Taf. III. Fig. 6.

$(-\frac{19}{10}P0)=1$

$(-\frac{19}{10}P1)=-1,9$

$(-\frac{19}{10}P2)=+5,51\ (=\frac{-19.-29}{10.10})$

$(-\frac{19}{10}P3)=-21,489\ (=\frac{-19.-29.-39}{10.10.10})$

u. s. w.

$(-\frac{19}{10}P-1)=-1,111\ 111\ (=-\frac{10}{9})$

$(-\frac{19}{10}P-2)=-11,111\ 111\ (=-\frac{10.10}{9.1})$

u. s. w.

S. Taf. III. Fig. 7.

Es liegt also, wenn m zwischen -1 und -2 liegt, das ɔtmaximum der Ordinaten auf der negativen Seite der y. ıehr sich m in $y=(mP\zeta)$ den Gränzwerthen $m=-1$ und -2 nähert, um so mehr entfernt sich dieses Maximum von ;-Axe. Zwischen diesen Gränzwerthen erreicht dasselbe ein-einen kleinsten Werth. Der ζ-Axe nähert sich die Kurve der negativen Seite der y asymptotisch.

5) Ist $m=-2$, so erhält man wieder, wie für $m=-1$, ein em von isolirten Punkten, die abwechselnd auf der negativen positiven Seite der ζ-Axe liegen. Diese Punkte finden statt für

$\zeta=-1;\ 0;\ +1;\ +2\ldots$ (Taf. III. Fig. 8.)

Für $\zeta=-2$ erhält man keine reelle Ordinate mehr, ebensowenig als für alle andere ganze negative und beliebige gebrochene Werthe von ζ.

6) **Liegt** m **zwischen** -2 **und** -3, so ergeben sich die Kurvenformen Taf. IV. Fig. 9., 10. und 11., den Kurven $y=(-\frac{21}{10}P\zeta)$, $y=(-\frac{5}{2}P\zeta)$, $y=(-\frac{29}{10}P\zeta)$ entsprechend.

Für $m=-3$ erhält man wieder ein System von isolirten Punkten u. s. w. Verallgemeinern wir den letzten Theil dieser Diskussion, so ergibt sich Folgendes:

1) Bezeichnet $\frac{m'}{m''}$ einen beliebigen positiven echten Bruchwerth und n eine positive ganze Zahl, so **schneidet die Kurve:** $y=(\frac{m'}{m''}-nP\zeta)$ **die** ζ**-Axe ausser den Punkten auf der positiven** ζ**-Seite auf der Minusseite in** $n-1$ **Punkten**, deren ζ successiv:

$$\frac{m'}{m''}-n+1,\ \frac{m'}{m''}-n+2,\ \ldots.\ \frac{m'}{m''}-n+(n-1)$$

sind. Aus dem Werthe:

$$\left(\frac{m'}{m''}-nP-n\right)=\frac{1}{\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\left(\frac{m'}{m''}-n+2\right)\ldots.\left(\frac{m'}{m''}-1\right)\frac{m'}{m''}},$$

resp. aus der Beschaffenheit der beiden letzten Faktoren des Nenners folgt, **dass für ein bestimmtes** n **das Hauptmaximum der Ordinaten 2mal sich dem Unendlichen nähert, einmal wenn** $\frac{m'}{m''}$ **nahezu = Eins und dann, wenn es nahe = Null ist.** Für zwischen 0 und 1 liegende Werthe von $\frac{m'}{m''}$ liegt das Hauptmaximum im Endlichen, für $\frac{m'}{m''}=0$ und $=1$ im Unendlichen, d. h. im letztern Fall hat die Kurve $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP\zeta\right)$ für $\zeta=-n$ keine reellen Ordinaten mehr.

Gibt man im Ausdruck $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP-\zeta\right)$ dem ζ einen ganzen positiven Zahlwerth $>n$ z. B. $\zeta=n+p$, wobei p eine ganze positive Zahl ist, so entsteht:

$$\left(\frac{m'}{m''}-nP-(n+p)\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\left(\frac{m'}{m''}-n+2\right)\cdots\frac{m'}{m''}\left(\frac{m'}{m''}+1\right)\left(\frac{m'}{m''}+2\right)\cdots\left(\frac{m'}{m''}+p\right)}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks besteht aus zwei Theilen, nämlich:

1) aus dem Produkt $\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\cdots\frac{m'}{m''}$, welches für ungerade Werthe von n, die >1 sind, positiv, für gerade Werthe von n, die >2 sind, negativ ausfällt; und

2) aus den Faktoren $\left(\frac{m'}{m''}+1\right)\cdots\left(\frac{m'}{m''}+p\right)$. Je grösser hierin p ist, um so kleiner wird der Werth von $\left(\frac{m'}{m''}-nP-(n+p)\right)$.

Hieraus geht hervor, dass die ζ-Axe stets Asymptote der Kurve $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP\zeta\right)$ ist, und dass für n ungerade und >1 die Kurve sich von der positiven Seite, für n gerade und >2 von der negativen Seite derselben nähert.

2) Ist in $y=(mP\zeta)$ m negativ ganz, so erhält man:

$$(-mP0)=1$$

und, nach der Formel $(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1)$:

$$(-mP1)=(-m-1+1)(-mP0)=-m,$$
$$(-mP2)=(-m-2+1)(-mP1)=+m.m+1,$$
$$(-mP3)=-m.m+1.m+2, \text{ u. s. w.}$$

Die Kurve $y=(-mP\zeta)$ hat also reelle Punkte in Abtänden von je Eins von $\zeta=0$ an bis ins Unendliche.

Auf der negativen Seite der ζ erhält man:

$$(-mP-1)=\frac{(mP0)}{-m+1}=\frac{-1}{m-1},\quad (-mP-2)=\frac{(-mP-1)}{-m+2}$$
$$=\frac{+1}{m-1.m-2}\cdots$$

Wird endlich, indem man ζ successiv den ganzen Zahlen von -1 bis $-m$ gleich setzt, $\zeta=-(m-1)$, so ergibt sich:

$$(-mP-(m-1))=\frac{\pm 1}{m-1.m-2.m-3....(m-(m-1))}.$$

(Das positive Zeichen gilt für m ungerade, das negative für m gerade.)

Dagegen wird für $\zeta=-m$:

$$(-mP-m)=\frac{(-mP-(m-1))}{m-m}=\frac{\pm 1}{m-1.m-2....2.1.0}=\frac{\pm 1}{0},$$

erhält also einen unzulässigen Werth, so wie auch:

$$(-mP-(m+1))=\frac{\pm 1}{0},\ (-mP-(m+2))=\frac{\pm 1}{0}, \text{ u. s. w.}$$

Für ganze negative Werthe von ζ von $\zeta=-1$ an bis $\zeta=-(m-1)$ hat also die Kurve $y=(-mP\zeta)$ ebenfalls reelle Ordinaten, darüber hinaus aber nicht mehr. Hiermit ist aber die Anzahl der reellen Ordinaten dieser Kurve erschöpft. Denn für einen gebrochenen Werth von ζ, gleichviel ob positiv oder negativ, erhalten alle Ordinaten die Form $\frac{1}{0}$.

Bezeichnen nämlich n und ζ' Zahlen, die prim zu einander sind, so ist $(0P\frac{n}{x'})$ stets ein reeller endlicher Werth. Nun ist aber:

$$(-1P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-\frac{n}{\zeta'}}{-1+1}(0P\frac{n}{\zeta'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{\zeta'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-1-\frac{n}{\zeta'}}{-2+1}(-1P\frac{n}{\zeta'})=\infty, \text{ u. s. w.}$$

Ebenso

$$(-1P-\frac{n}{\zeta'})=\frac{+\frac{n}{\zeta'}}{-1+1}(0P\frac{n}{\zeta'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{\zeta'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-1+\frac{n}{\zeta'}}{-2+1}(-1P-\frac{n}{\zeta'})=\infty, \text{ u. s. w.}$$

Ist also $-m$ eine negative ganze Zahl, so reducirt sich die Kurve $y=(-mP\zeta)$ auf ein System von isolirten Punkten, von welchen auf der positiven Seite der ζ unendlich viele, auf der negativen Seite $(m-1)$ abwechselnd auf der positiven und negativen Seite der Ordinaten liegen.

Es bleibt uns nun noch zu diskutiren übrig die Funktion:

$$y = (\zeta P \zeta).\text{*)}$$

Dieselbe lässt sich zurückführen auf die schon oben betrachtete: $y = (0 P \zeta)$, indem man hat:

$$(\zeta P \zeta) = \frac{1}{(0 P - \zeta)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $(\zeta P \zeta)$ die Form $\frac{1}{0} = \pm \infty$ erhält für $\zeta = -1, -2, -3, \ldots$ Das Zeichen des Werthes $\pm \infty$ hängt davon ab, von welcher Seite man sich den Abscissen $\zeta = -1, -2, -3 \ldots$ nähert.

Die Kurve $y = (\zeta P \zeta)$ hat daher von $\zeta = -1$ an nach der negativen Seite der ζ hin unzählig viele je im Abstand Eins befindliche auf der ζ-Axe senkrecht stehende Asymptoten, an die sich die Aeste der Kurve abwechselnd auf der positiven und negativen Seite der ζ-Axe anschliessen.

Da weiter die Kurve $y = (0 P - \zeta)$ zwischen $\zeta = -1$ und $\zeta = -2$, zwischen $\zeta = -3$ und $\zeta = -4$ u. s. w. negative, dagegen zwischen $\zeta = 0$ und $\zeta = -1$, zwischen $\zeta = -2$ und $\zeta = -3$ u. s. w. positive Ordinatenmaxima besitzt, so folgt, dass die Kurve $y = (\zeta P \zeta)$ in den betreffenden Fällen negative oder positive Minima der Ordinaten besitzt.

Da endlich die beiderseitigen Maxima sich bei der Kurve $y = (0 P - \zeta)$ mit dem Grösserwerden des negativen ζ sich immer weiter von der ζ-Axe entfernen, so nähern sich die Minima der Kurve $y = (\zeta P \zeta)$ um so mehr der ζ-Axe, einen je grösseren negativen Werth ζ erhält.

Bei der Berechnung der Werthe von $(\zeta P \zeta)$ bedient man sich mit Vortheil der auf dem Wege der Induktion unmittelbar sich ergebenden Gleichung:

$$(\zeta + 1 P \zeta + 1) = (\zeta + 1)(\zeta P \zeta),$$

wie das folgende Schema zeigt:

*) Es bedarf keiner Erinnerung, dass die Funktion $(\zeta P \zeta)$ dieselbe ist, die man gewöhnlich mit $\zeta!$ (Ohm) oder $1^{\zeta|1}$ oder $\zeta^{\zeta|-1}$ bezeichnet.

$$(0P0)=1{,}000\ 000\ 00$$

$$\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right)= \quad 0{,}886\ 226\ 91 \qquad \left(-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right)}{1-\tfrac{1}{2}} = 1{,}772\ 453\ 82$$

$$(1P1) = \quad 1{,}000\ 000\ 00$$

$$\left(\tfrac{3}{2}P\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right)=1{,}329\ 340\ 36 \qquad (-1P-1)=\frac{(0P0)}{1-1} = \pm\infty$$

$$(2P2)=2.(1P1)=2{,}000\ 000\ 00$$

$$\left(\tfrac{5}{2}P\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{5}{2}\left(\tfrac{3}{2}P\tfrac{3}{2}\right)=3{,}323\ 350\ 91 \qquad \left(-\tfrac{3}{2}P-\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\left(-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\right)}{1-\tfrac{3}{2}} = -3{,}544\ 907\ 64$$

$$(3P3)=3.(2P2)=6{,}000\ 000\ 00 \qquad (-2P-2)=\frac{(-1P-1)}{-1} = \mp\infty$$

u. s. w. u. s. w.

Kurve $y=(\zeta P\zeta)$ s. Taf. IV. Fig. 12.

8) Anwendung der Ausdrücke $(mP\zeta)$, $(0P\zeta)$ und $(\zeta P\zeta)$ beim Differentiiren und Integriren.

Wir haben bereits zu Anfang dieser Untersuchung nachgewiesen, dass der Koefficient von $x^{m-\zeta}$ in dem Ausdruck des ζten Differentialquotienten von x^m, so lange ζ ganz, positiv oder negativ ist, mit der Funktion $(mP\zeta)$ übereinstimmt.

Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass sich die ganzen (positiven oder negativen) Differentialquotienten von x^m auf unzählig viele Arten mit einander verbinden, d. h. Funktionen angeben lassen, die für $\zeta=\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ die successiven Werthe

$$\ldots, \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \frac{x^{m+1}}{m+1}, x^m, mx^{m-1}, m.m-1.x^{m-2},$$
$$m.m-1.m-2.x^{m-3}, \ldots$$

annehmen; jedenfalls ist aber die Funktion $(mP\zeta)$ die einfachste, durch welche diese Interpolation vermittelt werden kann.

Diese Idee liegt der Verallgemeinerung zu Grunde, welche sich in der Formel (V):

$$\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{f(x) + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \ldots\right\}$$

ausspricht, wenn man unter ζ nicht nur eine ganze (positive oder negative), sondern eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl versteht.

Da uns nun nach dem Vorhergehenden die Funktionen $(mP\zeta)$, $(0P\zeta)$, $(\zeta P\zeta)$ in ihren Eigenschaften vollständig bekannt sind und wir die Fälle nachgewiesen haben, in welchen man für diese Funktionen Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0} = \pm\infty$ erhält, so sind dadurch zugleich die Gränzen festgestellt, innerhalb deren man sich bei der Anwendung der Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$ zu bewegen hat.

Es ist hieraus klar, dass die Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)\,x^{m-\zeta}$ nicht zum Ziele führt in dem Fall:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = (-1P-1)x^0 = \pm\infty \text{ und allgemein}$$

$$\frac{\partial^{-\zeta}(x^{-\zeta})}{\partial x^{-\zeta}} = (-\zeta P-\zeta)\,x^0 = \pm\infty.$$

Andererseits wissen wir aber auch direkt, dass sich die Entwickelung:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = \int\frac{\partial x}{x} = \overset{e}{\log} x$$

nicht mehr in Einer Potenz von x zusammenfassen lässt. Ganz dasselbe gilt für:

$$\int \overset{e}{\log} x\,\partial x = \int\left(\int\frac{\partial x}{x}\right)\partial x = \frac{\partial^{-2}(x^{-1})}{\partial x^{-2}}\;[=(-1P-2)x^1 = \pm\infty];$$

ebenso:

$$\int\left(\int \log x \partial x\right)\partial x = \int\left(\int\left(\int\frac{\partial x}{x}\right)\partial x\right)\partial x$$

$$= \frac{\partial^{-3}(x^{-1})}{\partial x^{-3}}\left[=(-1P-3)x^2 = \pm\infty\right] \text{ u. s. w.}$$

Es findet also die Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta}=(mP\zeta)x^{m-\zeta}$ **überall dann ihre Anwendung, wenn** $(mP\zeta)$ **nicht die Form** $\frac{1}{0}$ **erhält, oder wenn man durch Differentiation oder Integration eines Ausdrucks von der Form** $y=x^m$ **nicht auf solche Funktionen geführt wird, die sich nicht mehr in Einer Potenz von** x **zusammenfassen lassen.** Ist dagegen im letzteren Falle die Entwickelung der neuen Funktion nach Potenzen von x bekannt, so lässt sich deren **allgemeiner** Differentialquotient sofort angeben. Ist nämlich die gegebene Funktion:

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$

so ist der ζte Differentialquotient derselben:

$$\frac{\partial^\zeta y}{\partial x^\zeta}=a(0P\zeta)x^{0-\zeta}+b(1P\zeta)x^{1-\zeta}+c(2P\zeta)x^{2-\zeta}+d(3P\zeta)x^{3-\zeta}+\ldots,$$

oder da:

$$(1P\zeta)=\frac{(0P\zeta).1}{1-\zeta},\ (2P\zeta)=\frac{(0P\zeta)1.2}{1-\zeta.2-\zeta},\ (3P\zeta)=\frac{(0P\zeta)1.2.3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta} \text{ u. s. w.}$$

ist:

$$\frac{\partial^\zeta(y)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{a+\frac{1.b.x}{1-\zeta}+\frac{1.2.c.x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{1.2.3.d.x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}+\ldots\right\} \quad \text{(XXVI)}$$

Diese Gleichung steht zu der bereits oben entwickelten Formel (V):

$$\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{f(x)+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\right\}$$

in einer ähnlichen Beziehung wie der Maklaurin'sche zum Taylor'schen Satz, was sich sogleich ergibt, wenn man statt a, b, c... ihre Werthe

$$f(0x),\ \frac{\partial f(0x)}{1.\partial x},\ \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 f(0x)}{\partial x^2},\ldots$$

setzt. Man erhält nach diesen beiden Sätzen die folgenden **allgemeinen** Differentialformeln:-

$$\frac{\partial^\zeta(e^x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1+\frac{x}{1-\zeta}+\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\right)$$

$$=\frac{e^x(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{1+\frac{\zeta.x}{1-\zeta}-\frac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}+\frac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}-\ldots\right\} \quad \text{(XXVII)}$$

$$\frac{\partial^\zeta(a^x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1+\frac{x\overset{e}{\log}a}{1-\zeta}+\frac{x^2\overset{e}{\log}{}^2a}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\right)$$

$$=\frac{a^x(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{1+\zeta\frac{x\overset{e}{\log}a}{1-\zeta}-\frac{\zeta.x^2\overset{e}{\log}{}^2a}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{\zeta.x^3.\overset{e}{\log}{}^3a}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}-\ldots\right\} \quad \text{(XXVIII)}$$

(XXIX)

$$\frac{\partial^\zeta(\sin x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(\frac{x}{1-\zeta}-\frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}+\frac{x^5}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta.5-\zeta}-\ldots\right)$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\begin{array}{l}\sin x\left(1+\frac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}-\frac{\zeta.x^4}{1.2.3.4.4-\zeta}+\frac{\zeta.x^6}{1\ldots6.6-\zeta}-\ldots\right)\\ +\cos x\left(\frac{\zeta.x}{1-\zeta}-\frac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}+\frac{\zeta.x^5}{1\ldots5.5-\zeta}-\ldots\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial^\zeta(\cos x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1-\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{x^4}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta}-\ldots\right)$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\begin{array}{l}\cos x\left(1+\frac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}-\frac{\zeta.x^4}{1\ldots4.4-\zeta}+\ldots\right)\\ -\sin x\left(\frac{\zeta.x}{1.1-\zeta}-\frac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}+\frac{\zeta.x^5}{1.2.3.4.5.5-\zeta}-\ldots\right)\end{array}\right\} \quad \text{(XXX)}$$

$$\frac{\partial^\zeta\overset{e}{\log}(x+1)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\frac{x}{1-\zeta}-\frac{1.x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{1.2.x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}-\ldots\right\}$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\overset{e}{\log}(x+1)+\frac{\zeta}{1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{1-\zeta}-\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\right\}$$

oder, wenn man nicht $\frac{\partial^\zeta(\overset{e}{\log}(x+1))}{\partial x^\zeta}$, sondern $\frac{\partial^\zeta(\overset{e}{\log}x)}{\partial x^\zeta}$ nach Formel (V) direkt entwickelt:

$$\frac{\partial^\zeta(\overset{e}{\log}x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(\overset{e}{\log}x+\zeta\left\{\frac{1}{1-\zeta}+\frac{1}{2.2-\zeta}+\frac{1}{3.3-\zeta}+\ldots\right\}\right). \quad \text{(XXXI) *)}$$

*) Diese Gleichung drückt eine höchst merkwürdige Eigenschaft des natürlichen Logarithmus aus.

Ebenso:

$$\frac{\partial^\zeta(\overset{a}{\log} x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}(\overset{a}{\log} x+\zeta\left\{\frac{1}{1-\zeta.\overset{e}{\log} a}+\frac{1}{2.2-\zeta.\overset{e}{\log}{}^2 a}+....\right\}).$$

(XXXII) *)

Für ganze negative Werthe von ζ kann man sich leicht durch unmittelbare Probe von der Richtigkeit derselben überzeugen. Es ist nämlich nach ihr:

$$\frac{\partial^{-1}(\overset{e}{\log} x)}{\partial x^{-1}}=x(\overset{e}{\log} x-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....\right)).$$

Es ist aber nach Gleichung (XX), wenn man dort $n=1$ setzt:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....=1,$$

daher

$$\frac{\partial^{-1}(\overset{e}{\log} x)}{\partial x^{-1}}=x(\overset{e}{\log} x-1)=\int\overset{e}{\log} x\partial x.$$

Durch Differentiation hiervon erhält man wieder:

$$\frac{\partial(x\overset{e}{\log} x-x)}{\partial x}=\overset{e}{\log} x.$$

Ebenso nach Formel (XXX):

$$\frac{\partial^{-2}(\overset{e}{\log} x)}{\partial x^{-2}}=\frac{x^2}{1.2}(\overset{e}{\log} x-\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+....\right)).$$

Nach (XX) ergibt sich aber für $n=2$:

$$\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+....=2-\frac{2}{2.1.2}=\frac{6}{4}.$$

Daher

$$\frac{\partial^{-2}(\overset{e}{\log} x)}{\partial x^{-2}}=\frac{x^2}{1.2}(\overset{e}{\log} x-\frac{6}{4})=\int(\int\overset{e}{\log} x\partial x)\partial x.$$

Durch zweimaliges Differentiiren erhält man wirklich wieder:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{x^2\log x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)}{\partial x^2}=\overset{e}{\log} x \text{ u. s. w.}$$

*) Bei diesen sämmtlichen Formeln gilt hinsichtlich des Werthes von ζ nur die Beschränkung, dass er nie auf Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0}$ führen darf (s. oben).

Zu diesen Gleichungen, welche sich nach Anleitung der Formel (V) leicht beliebig vermehren lassen, kommen noch die bereits öfter angeführten Grundformeln:

$$1)\ \frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)\,x^{m-\zeta};\quad 2)\ \frac{\partial^\zeta(x^0)}{\partial x^\zeta} = \frac{\partial^\zeta(1)}{\partial x^\zeta} = (0P\zeta)x^{0-\zeta};$$

$$3)\ \frac{\partial^\zeta(x^\zeta)}{\partial x^\zeta} = (\zeta P\zeta).$$

Die zweite derselben drückt aus, dass von einer Konstanten nur die ganzen positiven Differentialquotienten $=$ Null sind, alle übrigen aber nicht.

Die Gleichung 3) drückt für ganze positive Werthe von ζ eine aus den ersten Elementen des Differentiirens sich ergebende Wahrheit aus; hier aber wird sie auch auf gebrochene Werthe von ζ ausgedehnt. (Für ζ negativ ganz führt sie auf die Form $\pm\frac{1}{0}$, ist also für diesen Fall unzulässig.)

Zum Schluss der gegenwärtigen Arbeit bestimmen wir noch den allgemeinen Differentialkoefficienten des Trinoms $(A+Bx+Cx^2)^p$ in einer eleganteren Form, als ihn Gleichung (V) unmittelbar gibt. Nennen wir $A+Bx+Cx^2=y$, so ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ mit den darauf folgenden ganzen Differentialkoefficienten $=$ Null und die durch ζmaliges Differentiiren von y^p entstehende Gleichung hat die Form:

Zuweilen ist jedoch die Form $\frac{1}{0}$ nur scheinbar. So werden in der Gleichung (V):

$$\frac{\partial^\zeta(f(x))}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(f(x) + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \ldots\right),$$

wenn ζ positiv ganz $=n$ ist, die n ersten Werthe der Klammer wegen:

$$(0P\zeta) = 1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta\ldots(n-\zeta)\,(0P\zeta-n)$$

alle $=0$ und der $(n+1)$te Theilsatz erhält nicht die Form $\frac{1}{0}$, weil sich das Produkt $1-\zeta\ldots n-\zeta$ im Zähler und Nenner streicht. Die folgenden Glieder vom $(n+2)$ten an werden Null, so dass übrig bleibt:

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = \frac{n\ldots1}{1\ldots n}\frac{x^n}{x^n}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n},$$

wie sich schon von selbst versteht.

$$1)\ \frac{\partial^{\zeta}(y^p)}{\partial x^{\zeta}} = (pP\zeta)y^{p-\zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta}$$

$$+ (a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2)(pP\zeta - 1)y^{p-\zeta+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{1}$$

$$+ (b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4)(pP\zeta - 2)y^{p-\zeta+2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{2} + \ldots$$

Differentiirt man y^p unmittelbar $(\zeta+1)$mal, so wird ebenso:

$$2)\ \frac{\partial^{\zeta+1}(y^p)}{\partial x^{\zeta+1}} = (pP\zeta+1)y^{p-\zeta-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta+1}$$

$$+ (a_0 + a_1(\zeta+1) + a_2(\zeta+1)^2)(pP\zeta)y^{p-\zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$+ (b_0 + b_1(\zeta+1) + b_2(\zeta+1)^2 + b_3(\zeta+1)^3 + b_4(\zeta+1)^4)(pP\zeta-1)y^{p-\zeta+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{2} + \ldots$$

Dasselbe muss man erhalten, wenn man die Gleichung 1) einmal differentiirt, nämlich:

$$3)\ \frac{\partial^{\zeta+1}(y^p)}{\partial x^{\zeta+1}} = (pP\zeta+1)y^{p-\zeta-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta+1} + \left\{\begin{matrix} (pP\zeta)y^{p-\zeta}\cdot\zeta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ (pP\zeta)y^{p-\zeta}(a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{matrix}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{matrix} (\zeta-2)(pP\zeta-1)y^{p-\zeta+1}(a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{2} \\ +(b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4)(pP\zeta-1)y^{p-\zeta+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{2} \end{matrix}\right\} + \ldots,$$

wobei wieder wegen $y = A + Bx + Cx^2$ die höheren Differentialquotienten von dem 3ten an $=$ Null gesetzt werden.

Daher erhält man mit Gleichsetzung der in 2) und 3) mit einander korrespondirenden Werthe:

$$a_0+a_1(\zeta+1)+a_2(\zeta+1)^2=\zeta+a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2,$$

$$b_0+b_1(\zeta+1)+b_2(\zeta+1)^2+b_3(\zeta+1)^3+b_4(\zeta+1)^4=(\zeta-2)(a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2)$$
$$+b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4,$$

$$c_0+c_1(\zeta+1)+c_2(\zeta+1)^2+c_3(\zeta+1)^3+c_4(\zeta+1)^4+c_5(\zeta+1)^5+c_6(\zeta+1)^6$$
$$=(\zeta-4)(b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4)$$
$$+c_0+c_1\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+c_4\zeta^4+c_5\zeta^5+c_6\zeta^6,$$

u. s. w.

woraus folgt:

$$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=+\frac{1}{2};$$

$$b_1=-\frac{3}{4},\ b_2=\frac{11}{8},\ b_3=-\frac{3}{4},\ b_4=+\frac{1}{8};$$

$$c_1=-\frac{5}{2},\ c_2=\frac{137}{24},\ c_3=-\frac{225}{48},\ c_4=\frac{85}{48},\ c_5=-\frac{5}{16},\ c_6=\frac{1}{48};\ \text{u.s.w.}$$

Es lässt sich weiter folgern, dass $a_0=b_0=c_0=\ldots.=0$ sein müssen. Man hat demnach:

$$4)\ \frac{\partial^\zeta(y^p)}{\partial x^\zeta}=(pP\zeta)y^{p-\zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^\zeta+(-\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2)(pP\zeta-1)y^{p-\zeta+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+(-\frac{3}{4}\zeta+\frac{11}{8}\zeta^2-\frac{3}{4}\zeta^3+\frac{1}{8}\zeta^4)(pP\zeta-2)y^{p-\zeta+2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+(-\frac{5}{2}\zeta+\frac{137}{24}\zeta^2-\frac{225}{48}\zeta^3+\frac{85}{48}\zeta^4$$
$$-\frac{5}{16}\zeta^5+\frac{1}{48}\zeta^6)(pP\zeta-3)y^{p-\zeta+3}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-6}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+\ldots.$$

Es lässt sich nun durch Schlüsse, die denen ähnlich sind, die zu dem Bildungsgesetz der Koefficienten in Formel (I) geführt haben, nachweisen, dass die successiven Klammerausdrücke:

$$(-\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2),\ (-\frac{3}{4}\zeta+\frac{11}{8}\zeta^2-\frac{3}{4}\zeta^3+\frac{1}{8}\zeta^4),\ldots$$

successiv die Werthe 0 und 1; 0, 1, 2 und 3; u. s. w. zu Wurzeln haben müssen, wodurch die Gleichung 4) folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial^\zeta (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\zeta} = (pP^\zeta)\left\{\begin{array}{l} (A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta}(B+2Cx)^\zeta + \frac{1}{2}\,\frac{\zeta.\zeta-1}{p-\zeta+1}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+1}(B+2Cx)^{\zeta-2}.2C \\ +\frac{1}{2.4}\,\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3}{p-\zeta+1.p-\zeta+2}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+2}(B+2Cx)^{\zeta-4}(2C)^2 \\ +\frac{1}{2.4.6}\,\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5}{p-\zeta+1.p-\zeta+2.p-\zeta+3}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+3}(B+2Cx)^{\zeta-6}(2C)^3+\ldots \end{array}\right\}. \text{(XXXIII) *)}$$

*) Ist ζ positiv ganz, so besteht der Klammerausdruck in Gleich. (XXXIII) stets aus einer endlichen Gliederanzahl. Für alle gebrochenen Werthe von ζ erhält man für $\frac{\partial^\zeta(A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\zeta}$ unendliche Reihen. Ist p negativ ganz, z. B. $=-\mathfrak{a}$, und ζ negativ ganz und $< p$, z. B. $=-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, so wird dann die Reihe (XXXIII) wegen des unzulässigen Faktors $\{-\mathfrak{a}P^{-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\}$ nicht mehr anwendbar.

Die Reihe (XXXIII) ist übrigens, sofern sie nicht schon an einem gewissen Gliede abbricht, konvergent, wenn der Werth $(A+Bx+Cx^2)(B+2Cx)^2(2C)$, der den halben Quotienten des $(n+1)$ten und $n$ten Gliedes für $n\infty$ ausdrückt, $<\frac{1}{2}$ und $>-\frac{1}{2}$ ist.

Ist p negativ ganz und ζ ebenfalls und $< p$, so gibt man der Formel (XXXIII) eine andere Form, die sich ergibt, wenn man in Gleichung (V):

$$f(x) = y^p = (A + Bx + Cx^2)^p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2C$$

setzt. Man erhält so:

$$\frac{\partial^\zeta (y^p)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta} \left\{ y^p + \frac{\zeta}{1} \frac{\partial (y^p)}{\partial x} \frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2} \frac{\partial^2 (y^p)}{\partial x^2} \frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \ldots \right\}.$$

Diese successiven Differentialkoefficienten von y^p gibt aber Gleichung (XXXIII), so dass diese Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial^\zeta (A + Bx + Cx^2)^p}{\partial x^\zeta}$$

$$= \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta} \left\{ \begin{aligned} &(A + Bx + Cx^2)^p + \frac{\zeta}{1} [(pP1)(A + Bx + Cx^2)^{p-1}(B + 2Cx)] \frac{x}{1-\zeta} \\ &+ \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2} [(pP2)(A + Bx + Cx^2)^{p-2}(B + 2Cx)^2 + \frac{1}{2} 2.1 (pP1)(A + Bx + Cx^2)^{p-1} 2C] \frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} \\ &+ \frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3} [(pP3)(A + Bx + Cx^2)^{p-3}(B + 2Cx)^3 + \frac{1}{2} 3.2 (pP2)(A + Bx + Cx^2)^{p-2}(B + 2Cx) 2C] \frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta} \\ &+ \frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3}{1.2.3.4} \Big[(pP4)(A + Bx + Cx^2)^{p-4}(B + 2Cx)^4 + \frac{1}{2} 4.3 (pP3)(A + Bx + Cx^2)^{p-3}(B + 2Cx) 2C \\ &\qquad + \frac{1}{2.4} .4.3.2.1 (pP2)(A + Bx + Cx^2)^{p-2}(2C)^2 \Big] \frac{x^4}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta} \end{aligned} \right\} \quad \text{(XXXIV)}$$

Diese Reihe ist dann anwendbar, wenn ζ negativ ganz ist; nur giebt sie dann stets unendliche Reihen.

Ist ζ positiv ganz, z. B. $=\alpha$, so ist

$$(0P\alpha)=\frac{1-\alpha}{1}\cdot\frac{2-\alpha}{2}\cdots\frac{\alpha-\alpha}{\alpha}(\alpha P\alpha),$$

und es streicht sich $(1-\alpha)\ldots.(\alpha-\alpha)$ gegen dasselbe Produkt im Nenner des $(\alpha+1)$ten Gliedes der Klammer, so dass übrig bleibt:

$$\frac{\partial^\alpha(A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\alpha}$$

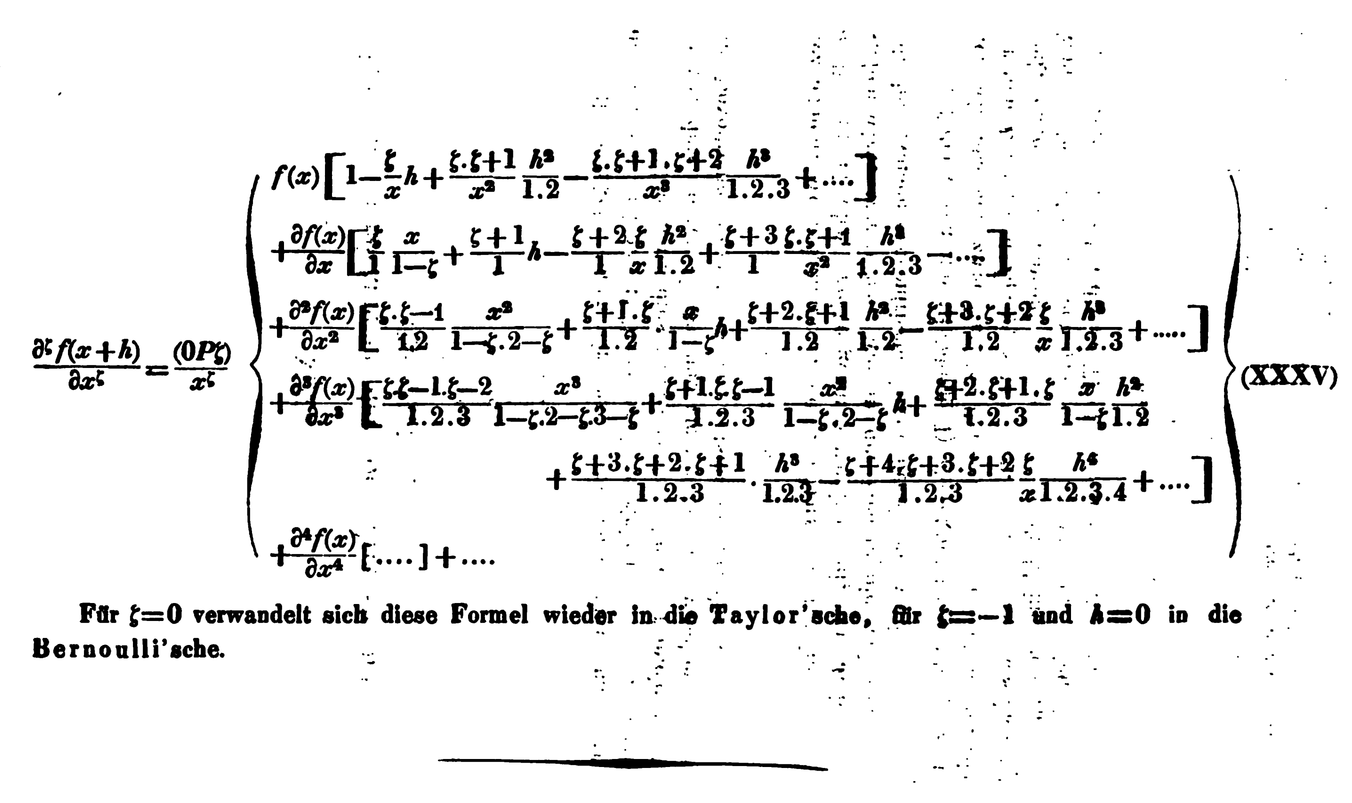
$$=\frac{\alpha.\alpha-1\ldots(\alpha-\alpha+1)}{1\ldots\alpha}(pP\alpha)[(A+Bx+Cx^2)^{p-\alpha}(B+2Cx)^\alpha+\frac{1}{2}\frac{\alpha.\alpha-1}{p-\alpha+1}\ldots],$$

was Gleichung (XXXIII) unmittelbar gibt.

Ist p positiv ganz, so bricht Gleichung (XXXIV) an einem bestimmten Gliede ab.

Auch eine dem Taylor'schen Satze analoge allgemeine Differentiirformel kann man bei unmittelbarer Anwendung der Formel (V) auf denselben entwickeln.

Die Ausführung dieser Entwickelung würde die Gränzen dieses Aufsatzes überschreiten, weshalb hier nur das Resultat derselben folgt:



$$\frac{\partial^\zeta f(x+h)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta} \left\{ \begin{array}{l} f(x)\left[1 - \frac{\zeta}{x}h + \frac{\zeta.\zeta+1}{x^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{\zeta.\zeta+1.\zeta+2}{x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right] \\ + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\left[\frac{\zeta}{1}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta+1}{1}h - \frac{\zeta+2}{1}\frac{\zeta}{x}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\zeta+3}{1}\frac{\zeta.\zeta+1}{x^2}\frac{h^3}{1.2.3} - \ldots\right] \\ + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left[\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \frac{\zeta+1.\zeta}{1.2}.\frac{x}{1-\zeta}h + \frac{\zeta+2.\zeta+1}{1.2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{\zeta+3.\zeta+2}{1.2}\frac{\zeta}{x}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right] \\ + \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\left[\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3}\frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta} + \frac{\zeta+1.\zeta.\zeta-1}{1.2.3}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}h + \frac{\zeta+2.\zeta+1.\zeta}{1.2.3}\frac{x}{1-\zeta}\frac{h^2}{1.2} \right. \\ \qquad \left. + \frac{\zeta+3.\zeta+2.\zeta+1}{1.2.3}.\frac{h^3}{1.2.3} - \frac{\zeta+4.\zeta+3.\zeta+2}{1.2.3}\frac{\zeta}{x}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ + \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}[\ldots.] + \ldots. \end{array} \right\} \text{(XXXV)}$$

Für $\zeta=0$ verwandelt sich diese Formel wieder in die Taylor'sche, für $\zeta=-1$ und $h=0$ in die Bernoulli'sche.

XXII.

Allgemeine Gleichungen der Loxodromen auf Rotationsflächen.

Von
dem Herausgeber.

Alle Winkel denken wir uns im Folgenden durch mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebene Kreisbogen gemessen, und wollen, dies vorausgesetzt, die Polargleichung der Curve, durch deren Umdrehung die Fläche, auf welcher wir uns die Loxodrome gezogen denken, entstanden ist, durch

$$1)\quad r=f(\varphi)$$

bezeichnen, wo bekanntlich r der Radius Vector heisst, und φ die centrische Breite genannt werden soll, was Jeder verstehen wird, wer weiss, was in der Geographie und Geodäsie mit dem Namen geocentrische Breite bezeichnet wird.

Auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Fläche denken wir uns nun zwei Punkte, deren Längen *) und centrische Breiten L_0, φ_0 und L_1, φ_1 sein mögen, wo L_1 grösser als L_0 sein soll, dagegen φ_1 sowohl grösser, als auch kleiner als φ_0 sein kann. Die Breitendifferenz $\varphi_1-\varphi_0$ theilen wir in n gleiche Theile und bezeichnen jeden dieser Theile durch i, so dass also

$$i=\frac{\varphi_1-\varphi_0}{n}$$

---

*) Jedem wird ohne weitere Erläuterung deutlich sein, was wir unter diesem Ausdrucke hier verstehen. Eben so wird nachher die Bedeutung des Worts Aequator in dem Sinne, in welchem wir es hier gebrauchen, von selbst erhellen.

ist. Durch alle Punkte, in denen die den einzelnen Theilen entsprechenden Vectoren die krumme Fläche schneiden, legen wir Parallelkreise des Aequators, und durch deren Durchschnittspunkte mit der Loxodrome, welche wir uns zwischen den Punkten $(L_0\varphi_0)$ und $(L_1\varphi_1)$ auf der krummen Fläche gezogen denken können, lauter Meridiane. Indem wir nun die Loxodrome von dem Punkte $(L_0\varphi_0)$ an nach dem Punkte $(L_1\varphi_1)$ hin in dem Sinne durchlaufen, in welchem die Längen gezählt werden, seien F und G zwei auf einander folgende Punkte derselben, welche durch die vorhergehende Construction erhalten worden sind, und H sei der Durchschnittspunkt des durch F gehenden Parallelkreises des Aequators mit dem durch G gehenden Meridiane. Dann sind F, G, H die Ecken eines auf der krummen Fläche liegenden rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten FH, GH und der Hypotenuse FG, welches desto genauer als ein ebenes Dreieck betrachtet werden kann, je grösser die Anzahl n der gleichen Theile ist, in welche wir die Breitendifferenz $\varphi_1-\varphi_0$ getheilt haben. Bezeichnen wir nun den constanten Winkel, welchen die Loxodrome mit allen Meridianen einschliesst, indem wir diesen Winkel so nehmen, dass er 180^0 nicht übersteigt, und von den Meridianen aus nach der Seite hin, nach welcher die Längen gezählt werden, von der Loxodrome aus nach der Seite hin liegt, nach welcher die positiven Breiten genommen werden, durch C; so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist:

$$FH=FG.\sin C,\quad GH=\pm FG.\cos C;$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem der 180^0 nicht übersteigende Winkel C spitz oder stumpf ist.

Bezeichnen wir nun überhaupt die centrische Breite des Punktes F durch φ, den nach diesem Punkte gezogenen Vector durch r, so ist, wenn wir

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

setzen, nach 1):

$$x=f(\varphi).\cos\varphi,\quad y=f(\varphi).\sin\varphi;$$

also, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-f(\varphi).\sin\varphi+f'(\varphi).\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\quad f(\varphi).\cos\varphi+f'(\varphi).\sin\varphi;$$

woraus man sogleich

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2=(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2$$

oder

$$\partial x^2+\partial y^2=\{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2\}\,\partial\varphi^2$$

erhält. Weil nun offenbar C spitz oder stumpf ist, jenachdem $\varphi_1-\varphi_0$ oder i positiv oder negativ ist, so ist hiernach mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist:

$$GH=\pm i\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem C spitz oder stumpf ist; also ist nach dem Obigen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\pm FG.\cos C=\pm i\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2},$$

folglich in völliger Allgemeinheit:

$$FG.\cos C=i\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}.$$

Bezeichnen wir nun die n einzelnen Theile der Loxodrome, von dem Punkte $(L_0\varphi_0)$ an nach dem Punkte $(L_1\varphi_1)$ hin, der Reihe nach durch

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots.\ s_{n-1};$$

so ist in Folge vorstehender Gleichung:

$$s_0\cos C=i\sqrt{(f(\varphi_0))^2+f'(\varphi_0))^2},$$

$$s_1\cos C=i\sqrt{(f(\varphi_0+i))^2+(f'(\varphi_0+i))^2},$$

$$s_2\cos C=i\sqrt{(f(\varphi_0+2i))^2+(f'(\varphi_0+2i))^2},$$

u. s. w.

$$s_{n-1}\cos C=i\sqrt{(f(\varphi_0+(n-1)i))^2+(f'(\varphi_0+(n-1)i))^2};$$

welche Gleichungen sämmtlich mit desto grösserer Genauigkeit gelten, je grösser n ist. Addirt man nun alle diese Gleichungen zusammen und geht dann für in's Unendliche wachsende n zu den Gränzen über, so erhält man nach einem bekannten Satze der Integralrechnung, indem man die Länge des zwischen den Punkten $(L_0\varphi_0)$ und $(L_1\varphi_1)$ liegenden Bogens der Loxodrome durch s bezeichnet, und bedenkt, dass für ein unendlich grosses n offenbar

$$s_0+s_1+s_2+s_3+\ldots.+s_{n-1}=s$$

ist, auf der Stelle die Gleichung:

$$2)\quad s\cos C = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \partial\varphi \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}.$$

Bezeichnen wir den dem Bogen FH des durch F gelegten Parallelkreises entsprechenden Bogen des Aequators durch F_0H_0, so ist, weil FH und F_0H_0 gleichen Winkeln am Mittelpunkte entsprechen, offenbar

$$FH : F_0H_0 = f(\varphi).\cos\varphi : f(0),$$

also

$$F_0H_0 = \frac{f(0).FH}{f(\varphi).\cos\varphi}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$FH = FG.\sin C;$$

also ist

$$F_0H_0 = \frac{f(0).\sin C}{f(\varphi).\cos\varphi}.FG,$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$FG = \frac{i\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}}{\cos C}$$

ist:

$$F_0H_0 = i\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi}.f(0).\tang C.$$

Bezeichnen wir nun die den Bogen

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_{n-1}$$

der Loxodrome entsprechenden Bogen des Aequators durch

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ S_{n-1};$$

so ist nach vorstehender Gleichung:

$$S_0 = i\frac{\sqrt{(f(\varphi_0))^2 + (f'(\varphi_0))^2}}{f(\varphi_0).\cos\varphi_0}.f(0).\tang C,$$

$$S_1 = i\frac{\sqrt{(f(\varphi_0+i))^2 + (f'(\varphi_0+i))^2}}{f(\varphi_0+i).\cos(\varphi_0+i)}.f(0).\tang C,$$

$$S_2 = i\frac{\sqrt{(f(\varphi_0+2i))^2 + (f'(\varphi_0+2i))^2}}{f(\varphi_0+2i).\cos(\varphi_0+2i)}.f(0).\tang C,$$

u. s. w.

$$S_{n-1} = i\frac{\sqrt{(f(\varphi_0+(n-1)i))^2 + (f'(\varphi_0+(n-1)i))^2}}{f(\varphi_0+(n-1)i).\cos(\varphi_0+(n-1)i)}.f(0).\tang C.$$

Also ist, wenn wir summiren und für in's Unendliche wachsende n zu den Gränzen übergehen, weil offenbar

$$S_0+S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1}=f(0).(L_1-L_0)$$

ist, nach dem schon vorher angewandten Satze der Integralrechnung:

$$3)\quad L_1-L_0=\operatorname{tang} C.\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi}\partial\varphi.$$

Die beiden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} s\cos C=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}.\partial\varphi, \\ L_1-L_0=\operatorname{tang} C.\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi}\partial\varphi \end{cases}$$

sind die allgemeinen Gleichungen der Loxodrome auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Rotationsfläche, welche wir nun auf einige Beispiele anwenden wollen.

Für die Kugel ist $r=f(\varphi)$ eine constante Grösse, also $f'(\varphi)=0$, und folglich

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}.\partial\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}r\partial\varphi=r(\varphi_1-\varphi_0),$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi}\partial\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{r\partial\varphi}{r\cos\varphi}=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi};$$

also sind nach 4) die Gleichungen der Loxodrome auf der Kugel:

$$5)\quad \begin{cases} \varphi_1-\varphi_0=\frac{s}{r}\cos C, \\ L_1-L_0=\operatorname{tang} C.\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

wie bekannt. Bei der allgemein bekannten weiteren Entwickelung dieser Gleichungen halten wir uns hier nicht auf.

Für den Cylinder ist, wenn a seinen Halbmesser bezeichnet, offenbar

$$r=f(\varphi)=a\sec\varphi=a\cos\varphi^{-1},$$

also

$$f'(\varphi) = -a \sin\varphi \cos\varphi^{-2} = -\frac{a \sin\varphi}{\cos\varphi^2};$$

folglich

$$(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2 = \frac{a^2}{\cos\varphi^2} + \frac{a^2 \sin\varphi^2}{\cos\varphi^4} = \frac{a^2}{\cos\varphi^4},$$

$$\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} = \frac{a}{\cos\varphi^2}.$$

Also ist nach 4):

$$s \cos C = a \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2},$$

$$L_1 - L_0 = \operatorname{tang} C \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2}.$$

Aber

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\cos\varphi_0 \cos\varphi_1};$$

also sind die Gleichungen der Loxodrome:

$$6) \begin{cases} s \cos C = a(\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_0) = \dfrac{a \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\cos\varphi_0 \cos\varphi_1}, \\ L_1 - L_0 = \operatorname{tang} C (\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_0) = \dfrac{\operatorname{tang} C \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\cos\varphi_0 \cos\varphi_1}. \end{cases}$$

Man erhält hieraus sogleich die Relation:

$$7) \quad \frac{s \cos C}{L_1 - L_0} = a \cot C, \quad s \sin C = a(L_1 - L_0)$$

oder

$$8) \quad s = \frac{a(L_1 - L_0)}{\sin C}.$$

Für den Kegel ist, wie leicht erhellen wird, wenn wir den Halbmesser der Grundfläche durch a, die Höhe durch b bezeichnen, wobei man Taf. IV. Fig. 14. vergleichen kann:

$$a - r\cos\varphi : r \sin\varphi = a : b,$$

woraus

$$r = \frac{ab}{a \sin\varphi + b \cos\varphi},$$

also

$$f(\varphi) = ab\,(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^{-1}$$

folgt. Daher ist

$$f'(\varphi) = -\frac{ab\,(a\cos\varphi - b\sin\varphi)}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^2},$$

und folglich

$$(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2 = a^2b^2\,\frac{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^2 + (a\cos\varphi - b\sin\varphi)^2}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^4},$$

oder, wie man leicht findet:

$$(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2 = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^4},$$

also

$$\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^2},$$

$$\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos\varphi\,(a\sin\varphi + b\cos\varphi)}.$$

Folglich sind die Gleichungen der Loxodrome:

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} s\cos C &= ab\sqrt{a^2+b^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{(a\sin\varphi + b\cos\varphi)^2},\\ L_1 - L_0 &= \sqrt{a^2+b^2}.\mathrm{tang}\,C\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi(a\sin\varphi + b\cos\varphi)}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung des Umdrehungs-Ellipsoids zwischen recht winkligen Coordinaten ist bekanntlich:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\sqrt{x^2+y^2} = r\cos\varphi,\quad z = r\sin\varphi;$$

also

$$r^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right) = 1,$$

woraus

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2} = \frac{b^2}{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos\varphi^2},$$

also, wenn man wie gewöhnlich

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},\quad b = a\sqrt{1-e^2}$$

setzt:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}} = b(1-e^2\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt. Daher ist

$$f(\varphi) = b\,(1-e^2\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und hieraus, wie man durch Differentiation leicht findet:

$$f'(\varphi) = -\frac{be^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-e^2\cos\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also ist

$$(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2$$

$$= \frac{b^2}{1-e^2\cos\varphi^2} + \frac{b^2e^4\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{(1-e^2\cos\varphi^2)^3}$$

$$= \frac{b^2(1-2e^2\cos\varphi^2 + e^4\cos\varphi^4 + e^4\sin\varphi^2\cos\varphi^2)}{(1-e^2\cos\varphi^2)^3}$$

$$= \frac{b^2(1-2e^2\cos\varphi^2 + e^4\cos\varphi^2)}{(1-e^2\cos\varphi^2)^3}$$

$$= \frac{b^2\{1-(2-e^2)\,e^2\cos\varphi^2\}}{(1-e^2\cos\varphi^2)^3},$$

$$\sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} = \frac{b\sqrt{1-(2-e^2)e^2\cos\varphi^2}}{(1-e^2\cos\varphi^2)\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}};$$

und hieraus:

$$\frac{\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}}{f(\varphi).\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-(2-e^2)\,e^2\cos\varphi^2}}{\cos\varphi(1-e^2\cos\varphi^2)}.$$

Folglich sind die Gleichungen der Loxodrome:

$$10)\left\{\begin{aligned} s\cos C &= b\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{1-(2-e^2)e^2\cos\varphi^2}}{(1-e^2\cos\varphi^2)\sqrt{1-e^2\cos\varphi^2}}\,\partial\varphi,\\ L_1-L_0 &= \tang C\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{1-(2-e^2)\,e^2\cos\varphi^2}}{\cos\varphi\,(1-e^2\cos\varphi^2)}\,\partial\varphi.\end{aligned}\right.$$

Wenn wir die Breite, d. h. den Neigungswinkel der Normale gegen die Ebene des Aequators, durch $\overline{\omega}$ bezeichnen, so ist bekanntlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\overline{\omega},$$

also

$$\cos\varphi^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang}\varphi^2} = \frac{a^4\cos\overline{\omega}^2}{a^4\cos\overline{\omega}^2 + b^4\sin\overline{\omega}^2},$$

$$1 - e^2\cos\varphi^2 = b^2\frac{a^2\cos\overline{\omega}^2 + b^2\sin\overline{\omega}^2}{a^4\cos\overline{\omega}^2 + b^4\sin\overline{\omega}^2},$$

$$\partial\varphi = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\varphi^2}{\cos\overline{\omega}^2}\partial\overline{\omega} = \frac{a^2b^2\partial\overline{\omega}}{a^4\cos\overline{\omega}^2 + b^4\sin\overline{\omega}^2};$$

und weil nun

$$2 - e^2 = 2 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

also

$$(2 - e^2)e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^4}$$

ist, so ist

$$1 - (2 - e^2)e^2\cos\varphi^2 = \frac{b^4}{a^4\cos\overline{\omega}^2 + b^4\sin\overline{\omega}^2};$$

endlich ist

$$\cos\varphi(1 - e^2\cos\varphi^2) = a^2b^2\cos\overline{\omega}\,\frac{a^2\cos\overline{\omega}^2 + b^2\sin\overline{\omega}^2}{(a^4\cos\overline{\omega}^2 + b^4\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hiernach erhält man mittelst gehöriger Substitution:

$$\frac{\sqrt{1 - (2 - e^2)e^2\cos\varphi^2}}{(1 - e^2\cos\varphi^2)\sqrt{1 - e^2\cos\varphi^2}}\partial\varphi = \frac{a^2b\partial\overline{\omega}}{(a^2\cos\overline{\omega}^2 + b^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\sqrt{1 - (2 - e^2)e^2\cos\varphi^2}}{\cos\varphi(1 - e^2\cos\varphi^2)}\partial\varphi = \frac{b^2\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}(a^2\cos\overline{\omega}^2 + b^2\sin\overline{\omega}^2)};$$

und bezeichnen wir nun die den centrischen oder, bei der Erde, geocentrischen Breiten φ_0, φ_1 entsprechenden wahren Breiten durch $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$; so ist nach dem Obigen:

$$11)\begin{cases} s\cos C = a^2b^2\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{(a^2\cos\varpi^2+b^2\sin\varpi^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ L_1-L_0=b^2\operatorname{tang}C\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{\cos\varpi(a^2\cos\varpi^2+b^2\sin\varpi^2)}; \end{cases}$$

oder

$$s\cos C=\frac{b^2}{a}\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{(1-e^2\sin\varpi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$L_1-L_0=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}C\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{\cos\varpi\,(1-e^2\sin\varpi^2)};$$

d. i.

$$12)\begin{cases} s\cos C=a(1-e^2)\int_{\varpi}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{(1-e^2\sin\varpi^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ L_1-L_0=(1-e^2)\operatorname{tang}C\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{\cos\varpi\,(1-e^2\sin\varpi^2)}; \end{cases}$$

oder

$$13)\begin{cases} \frac{s}{a}\cos C=(1-e^2)\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{(1-e^2\sin\varpi^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ (L_1-L_0)\cot C=(1-e^2)\int_{\varpi_0}^{\varpi_1}\frac{\partial\varpi}{\cos\varpi\,(1-e^2\sin\varpi^2)}. \end{cases}$$

Die vollständige Entwickelung dieser Gleichungen durch Integration, bei der ich mich hier nicht aufhalten will, kann man in meiner Loxodromischen Trigonometrie. Leipzig 1849. §. 17. und §. 18. nachsehen. Bekanntlich beruhet auf diesen Gleichungen der ganze nicht astronomische Theil der Schifffahrtskunde, wenn man auf die Abplattung der Erde Rücksicht nimmt.

Für $e=0$, d. h. für die Kugel, wenn man zugleich $a=b=r$ setzt, erhält man aus den Gleichungen 10):

$$s\cos C=r\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\partial\varphi,\quad L_1-L_0=\operatorname{tang}C\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}$$

oder

$$\varphi_1-\varphi_0=\frac{s}{r}\cos C,$$

$$L_1 - L_0 = \tang C \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi};$$

ganz übereinstimmend mit 5), wie es sein muss.

XXIII.

Ueber die kürzeste Entfernung zweier Normalen eines Ellipsoids von einander.

Von

dem Herausgeber.

Eine in das Gebiet der höheren Geodäsie gehörende Untersuchung, die bis jetzt noch nicht zur Reife und zum Abschluss gediehen ist, führte mich neulich auf die Frage nach der kürzesten Entfernung zweier Normalen eines Ellipsoids, insbesondere eines Rotations-Ellipsoids, von einander. Den Ausdruck, welchen ich für diese kürzeste Entfernung fand, halte ich für so merkwürdig, dass ich ihn, nebst der Analysis, welche mich dazu führte, im Folgenden mittheilen werde, was ich auch deshalb thue, weil mich die Merkwürdigkeit dieses Ausdrucks zu der Meinung veranlasst, dass auch die Untersuchung der kürzesten Entfernungen der Normalen anderer krummer Flächen zu gleich merkwürdigen Resultaten führen werde und daher der Aufmerksamkeit der Geometer empfohlen zu werden verdient.

Die Gleichung eines beliebigen dreiaxigen Ellipsoids, welches wir zuerst in Betrachtung ziehen wollen, sei

$$1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ seien zwei beliebige Punkte auf demselben, so dass also

$$2)\quad \begin{cases} \left(\frac{f}{a}\right)^2+\left(\frac{g}{b}\right)^2+\left(\frac{h}{c}\right)^2=1, \\ \left(\frac{f_1}{a}\right)^2+\left(\frac{g_1}{b}\right)^2+\left(\frac{h_1}{c}\right)^2=1 \end{cases}$$

ist.

Setzen wir überhaupt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=\Omega,$$

so ist

$$\frac{\partial_x\Omega}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial_y\Omega}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial_z\Omega}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};$$

und da nun die Gleichungen der Normale in dem Punkte (xyz), wenn wir die laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen, nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial_x\Omega}{\partial x}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial_y\Omega}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial_z\Omega}{\partial z}}$$

sind; so sind die Gleichungen der beiden Normalen des Ellipsoids in den Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$, wenn die laufenden Coordinaten wieder durch x, y, z bezeichnet werden:

$$3)\quad \begin{cases} \frac{a^2(x-f)}{f}=\frac{b^2(y-g)}{g}=\frac{c^2(z-h)}{h}, \\ \frac{a^2(x-f_1)}{f_1}=\frac{b^2(y-g_1)}{g_1}=\frac{c^2(z-h_1)}{h_1}. \end{cases}$$

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der kürzesten Entfernung der beiden Normalen von einander mit den beiden Normalen seien respective u, v, w und u_1, v_1, w_1; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$4)\quad \begin{cases} \frac{a^2(u-f)}{f}=\frac{b^2(v-g)}{g}=\frac{c^2(w-h)}{h}, \\ \frac{a^2(u_1-f_1)}{f_1}=\frac{b^2(v_1-g_1)}{g_1}=\frac{c^2(w_1-h_1)}{h_1}; \end{cases}$$

und die Gleichungen der kürzesten Entfernung sind

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{x-u}{u-u_1}=\dfrac{y-v}{v-v_1}=\dfrac{z-w}{w-w_1} \\ \text{oder} \\ \dfrac{x-u_1}{u-u_1}=\dfrac{y-v_1}{v-v_1}=\dfrac{z-w_1}{w-w_1}. \end{cases}$$

Nach einem bekannten geometrischen Elementarsatze steht aber die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien von einander auf diesen beiden Geraden senkrecht, welches mittelst des Vorhergehenden nach den Lehren der analytischen Geometrie unmittelbar zu den beiden folgenden Gleichungen führt:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{f}{a^2}(u-u_1)+\dfrac{g}{b^2}(v-v_1)+\dfrac{h}{c^2}(w-w_1)=0, \\ \dfrac{f_1}{a^2}(u-u_1)+\dfrac{g_1}{b^2}(v-v_1)+\dfrac{h_1}{c^2}(w-w_1)=0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{f}{a^2}\{(u-f)-(u_1-f_1)\}+\frac{g}{b^2}\{(v-g)-(v_1-g_1)\}+\frac{h}{c^2}\{(w-h)-(w_1-h_1)\}$$

$$=\frac{f}{a^2}(f_1-f)+\frac{g}{b^2}(g_1-g)+\frac{h}{c^2}(h_1-h)$$

$$=\frac{ff_1}{a^2}+\frac{gg_1}{b^2}+\frac{hh_1}{c^2}-\left(\frac{f}{a}\right)^2-\left(\frac{g}{b}\right)^2-\left(\frac{h}{c}\right)^2$$

$$=\frac{ff_1}{a^2}+\frac{gg_1}{b^2}+\frac{hh_1}{c^2}-1,$$

$$\frac{f_1}{a^2}\{(u-f)-(u_1-f_1)\}+\frac{g_1}{b^2}\{(v-g)-(v_1-g_1)\}+\frac{h_1}{c^2}\{(w-h)-(w_1-h_1)\}$$

$$=\frac{f_1}{a^2}(f_1-f)+\frac{g_1}{b^2}(g_1-g)+\frac{h_1}{c^2}(h_1-h)$$

$$=\left(\frac{f_1}{a}\right)^2+\left(\frac{g_1}{b}\right)^2+\left(\frac{h_1}{c}\right)^2-\frac{ff_1}{a^2}-\frac{gg_1}{b^2}-\frac{hh_1}{c^2}$$

$$=1-\frac{ff_1}{a^2}-\frac{gg_1}{b^2}-\frac{hh_1}{c^2};$$

und setzen wir also der Kürze wegen

$$7)\quad k=\frac{ff_1}{a^2}+\frac{gg_1}{b^2}+\frac{hh_1}{c^2}-1,$$

so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten u, v, w und u_1, v_1, w_1 der Durchschnittspunkte der kürzesten Entfernung der beiden Normalen von einander mit diesen beiden Normalen nach dem Obigen (4) und 6)) die sechs folgenden Gleichungen:

8)

$$\frac{a^2(u-f)}{f}=\frac{b^2(v-g)}{g}=\frac{c^2(w-h)}{h},$$

$$\frac{a^2(u_1-f_1)}{f_1}=\frac{b^2(v_1-g_1)}{g_1}=\frac{c^2(w_1-h_1)}{h_1};$$

$$\frac{f}{a^2}\{(u-f)-(u_1-f_1)\}+\frac{g}{b^2}\{(v-g)-(v_1-g_1)\}+\frac{h}{c^2}\{(w-h)-(w_1-h_1)\}=k,$$

$$\frac{f_1}{a^2}\{(u-f)-(u_1-f_1)\}+\frac{g_1}{b^2}\{(v-g)-(v_1-g_1)\}+\frac{h_1}{c^2}\{(w-h)-(w_1-h_1)\}=-k.$$

Aus diesen sechs Gleichungen müssen u, v, w und u_1, v_1, w_1 oder $u-f$, $v-g$, $w-h$ und u_1-f_1, v_1-g_1, w_1-h_1 bestimmt werden; und bezeichnet man dann die gesuchte kürzeste Entfernung der beiden Normalen von einander durch E, so findet man E mittelst der Formel:

$$9)\quad E=\sqrt{(u-u_1)^2+(v-v_1)+(w-w_1)^2}.$$

Behufs der Auflösung der sechs Gleichungen 8) haben wir nun zuvörderst aus den vier ersten derselben:

$$(v-g)-(v_1-g_1)=\frac{a^2g}{b^2f}(u-f)-\frac{a^2g_1}{b^2f_1}(u_1-f_1)$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\left\{\frac{g}{f}(u-f)-\frac{g_1}{f_1}(u_1-f_1)\right\},$$

$$(w-h)-(w_1-h_1)=\frac{a^2h}{c^2f}(u-f)-\frac{a^2h_1}{c^2f_1}(u_1-f_1)$$

$$=\frac{a^2}{c^2}\left\{\frac{h}{f}(u-f)-\frac{h_1}{f_1}(u_1-f_1)\right\};$$

welches, in die zwei letzten der Gleichungen 8) gesetzt, nach einigen leichten Reductionen die zwei folgenden Gleichungen giebt:

$$\left(\frac{f^2}{a^4}+\frac{g^2}{b^4}+\frac{h^2}{c^4}\right)\frac{u-f}{f}-\left(\frac{ff_1}{a^4}+\frac{gg_1}{b^4}+\frac{hh_1}{c^4}\right)\frac{u_1-f_1}{f_1}=\frac{k}{a^2},$$

$$\left(\frac{ff_1}{a^4}+\frac{gg_1}{b^4}+\frac{hh_1}{c^4}\right)\frac{u-f}{f}-\left(\frac{f_1^2}{a^4}+\frac{g_1^2}{b^4}+\frac{h_1^2}{c^4}\right)\frac{u_1-f_1}{f_1}=-\frac{k}{a^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach einigen lei ten Reductionen:

$$\frac{u-f}{f}=\frac{k}{a^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}},$$

$$\frac{u_1-f_1}{f_1}=\frac{k}{a^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}}.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit den Gleichungen die folgenden Ausdrücke:

10)

$$\frac{u-f}{f}=\frac{k}{a^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}},$$

$$\frac{v-g}{g}=\frac{k}{b^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}},$$

$$\frac{w-h}{h}=\frac{k}{c^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}}$$

und

11)

$$\frac{u_1-f_1}{f_1}=\frac{k}{a^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}},$$

$$\frac{v_1-g_1}{g_1}=\frac{k}{b^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}},$$

$$\frac{w_1-h_1}{h_1}=\frac{k}{c^2}\cdot\frac{\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}}{\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}}.$$

Zu der von mir hier beabsichtigten Untersuchung über das Rotations-Ellipsoid reichen die bisherigen Betrachtungen über das allgemeine dreiaxige Ellipsoid hin, und ich will dieselbe daher jetzt nicht weiter fortsetzen, sondern nun zu dem Rotations-Ellipsoid übergehen.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich die beiden Halbaxen des Rotations-Ellipsoids durch a und b, so ist im Vorhergehenden $\alpha = a$, $b = a$, $c = b$ zu setzen; und wenn wir die Längen der Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ respective durch ω und ω_1, ihre reducirten Breiten *) dagegen respective durch $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}_1$ bezeichnen, so ist bekanntlich:

$$12)\quad \begin{cases} f = a\cos\omega\cos\bar{\omega}, \quad g = a\sin\omega\cos\bar{\omega}, \quad h = b\sin\bar{\omega}; \\ f_1 = a\cos\omega_1\cos\bar{\omega}_1, \quad g_1 = a\sin\omega_1\cos\bar{\omega}_1, \quad h_1 = b\sin\bar{\omega}_1. \end{cases}$$

Mittelst leichter Rechnung erhält man nun:

---

*) Rücksichtlich des für mathematische Geographie und Geodäsie sehr wichtigen Begriffs der reducirten Breite eines Punkts der Erdoberfläche bemerke ich zu besserem Verständniss des Obigen in der Kürze Folgendes. Die Breite B eines Orts ist bekanntlich der Neigungswinkel seiner Normale gegen die Ebene des Aequators. Denken wir uns nun in das Erdellipsoid über der Erdaxe als Durchmesser eine Kugel beschrieben nehmen auf deren Oberfläche einen Punkt, welcher von der Ebene des Aequators eben so weit entfernt ist, wie der auf dem Erdellipsoid liegende Punkt, dessen Breite B ist, und ziehen nach dem ersteren Punkte einen Halbmesser der in Rede stehenden Kugel, so heisst dessen Neigungswinkel gegen die Ebene des Aequators die reducirte Breite $\mathfrak{B}$ des Punkts auf dem Erdellipsoid von der Breite B. Zwischen der Breite B und der reducirten Breite $\mathfrak{B}$ findet immer die leicht zu beweisende Relation

$$a\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B} = b\,\mathrm{tang}\,B$$

Statt, und mittelst der Formeln $\mathrm{tang}\,\mathfrak{B} = \frac{b}{a}\,\mathrm{tang}\,B$, $\mathrm{tang}\,B = \frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,\mathfrak{B}$ kann also immer leicht $\mathfrak{B}$ aus B und umgekehrt B aus $\mathfrak{B}$ gefunden werden. Man findet über alle diese Dinge ausführliche Belehrung in meiner „Sphaeroidischen Trigonometrie.“ Berlin. 1833. 4°. Zweites Kapitel. und in meiner „Loxodromischen Trigonometrie.“ Leipzig. 1849. 8°. Einleitung.; auch in meinen „Elementen der ebenen, sphaerischen und sphaeroidischen Trigonometrie, in analytischer Darstellung mit Anwendungen auf Astronomie und Geodäsie.“ Leipzig. 1837. 8°.

$$fg_1-gf_1=-aa\sin(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1,$$

$$gh_1-hg_1=\quad ab(\sin\omega\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1-\sin\omega_1\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1),$$

$$hf_1-fh_1=-ab(\cos\omega\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1-\cos\omega_1\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1);$$

folglich

$$\frac{fg_1-gf_1}{a^2b^2}=-\frac{\sin(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}{aa},$$

$$\frac{gh_1-hg_1}{b^2c^2}=\frac{\sin\omega\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1-\sin\omega_1\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}{ab},$$

$$\frac{hf_1-fh_1}{c^2a^2}=-\frac{\cos\omega\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1-\cos\omega_1\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}{ab};$$

also

$$\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}=\frac{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}{a^4}$$

$$+\frac{\sin\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2+\cos\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-2\cos(\omega-\omega_1)\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_1}{a^2b^2}$$

oder

$$\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}$$

$$\left.\begin{array}{l}=\dfrac{1}{a^4}\Big\{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\\ +\dfrac{a^2}{b^2}(\sin\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2+\cos\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-2\cos(\omega-\omega_1)\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_1)\Big\}\end{array}\right\}.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}$$

$$=\frac{1}{a^2}\{\cos\overline{\omega}_1(\cos(\overline{\omega}_1+\cos(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega})+\frac{a^2}{b^2}\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)\},$$

$$\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}$$

$$=\frac{1}{a^2}\{\cos\overline{\omega}(\cos\overline{\omega}+\cos(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}_1)+\frac{a^2}{b^2}\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)\};$$

und

$$k=-\{1-\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1-\cos(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1\}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

13) $\cos\Theta=\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1+\cos(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1,$

so erhalten wir ohne Schwierigkeit:

$$\frac{(fg_1-gf_1)^2}{a^4b^4}+\frac{(gh_1-hg_1)^2}{b^4c^4}+\frac{(hf_1-fh_1)^2}{c^4a^4}$$

$$=\frac{1}{a^4}\{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})(\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)\},$$

$$\frac{(f+f_1)f_1}{a^4}+\frac{(g+g_1)g_1}{b^4}+\frac{(h+h_1)h_1}{c^4}$$

$$=\frac{1}{a^2}\{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)\},$$

$$\frac{(f+f_1)f}{a^4}+\frac{(g+g_1)g}{b^4}+\frac{(h+h_1)h}{c^4}$$

$$=\frac{1}{a^2}\{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)\},$$

$$k=-2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2.$$

lso ist:

14)

$$-f=-2f\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}},$$

$$-g=-2g\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}},$$

$$-h=-2\frac{a^2}{b^2}h\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}};$$

ıd

15)

$$-f_1=-2f_1\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}},$$

$$-g_1=-2g_1\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}},$$

$$w_1-h_1=-2\frac{a^2}{b^2}h_1\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}}.$$

Leicht findet man:

$$f^2+g^2+\frac{a^4}{b^4}h^2=\frac{a^2}{b^2}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2),$$

$$f_1{}^2+g_1{}^2+\frac{a^4}{b^4}h_1{}^2=\frac{a^2}{b^2}(a^2\sin\overline{\omega}_1{}^2+b^2\cos\overline{\omega}_1{}^2);$$

und bezeichnet man nun die Krümmungshalbmesser unter den reducirten Breiten $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}_1$ durch R und R_1, so ist bekanntlich

$$R=\frac{(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},\quad R_1=\frac{(a^2\sin\overline{\omega}_1{}^2+b^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

also

$$a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}R^{\frac{2}{3}},\quad a^2\sin\overline{\omega}_1{}^2+b^2\cos\overline{\omega}_1{}^2=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}R_1{}^{\frac{2}{3}};$$

folglich

$$f^2+g^2+\frac{a^4}{b^4}h^2=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}R^{\frac{2}{3}},$$

$$f_1{}^2+g_1{}^2+\frac{a^4}{b^4}h_1{}^2=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}R^{\frac{2}{3}}.$$

Daher ist

$$16)\quad \sqrt{(u-f)^2+(v-g)^2+(w-h)^2}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}R^{\frac{1}{3}}\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}_1(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}}$$

und

$$17)\quad \sqrt{(u_1-f_1)^2+(v_1-g_1)^2+(w_1-h_1)^2}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}R_1{}^{\frac{1}{3}}\frac{2\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin\overline{\omega}(\sin\overline{\omega}+\sin\overline{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\}},$$

bloss in Bezug auf die absoluten Werthe der Grössen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen.

Setzt man nun der Kürze wegen ferner:

$$18)\quad \begin{cases} \cos\Theta_{0,1}=\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1-\cos(\omega-\omega_1)\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1, \\ \cos\Theta_{1,0}=\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1-\cos(\omega-\omega_1)\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1; \end{cases}$$

so ergiebt sich aus 14) und 15) nach einigen, keiner Schwierigkeit unterliegenden Reductionen:

19)

$$u=-(1-\frac{a^2}{b^2})f\frac{\cos\bar{\omega}_1(\sin\bar{\omega}-\sin\bar{\omega}_1)\cos\Theta_{0,1}}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}},$$

$$v=-(1-\frac{a^2}{b^2})g\frac{\cos\bar{\omega}_1(\sin\bar{\omega}-\sin\bar{\omega}_1)\cos\Theta_{0,1}}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}},$$

$$w=(1-\frac{a^2}{b^2})h\frac{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2+2\frac{a^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\sin\bar{\omega}_1(\sin\bar{\omega}+\sin\bar{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}};$$

und

20)

$$u_1=(1-\frac{a^2}{b^2})f_1\frac{\cos\bar{\omega}(\sin\bar{\omega}-\sin\bar{\omega}_1)\cos\Theta_{1,0}}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}},$$

$$v_1=(1-\frac{a^2}{b^2})g_1\frac{\cos\bar{\omega}(\sin\bar{\omega}-\sin\bar{\omega}_1)\cos\Theta_{1,0}}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}},$$

$$w_1=(1-\frac{a^2}{b^2})h_1\frac{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2+2\frac{a^2}{b^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2\sin\bar{\omega}(\sin\bar{\omega}+\sin\bar{\omega}_1)}{\sin\Theta^2-(1-\frac{a^2}{b^2})\{\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\}}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, wenn man für f, g, h und f_1, g_1, h_1 zugleich ihre Werthe aus 12) einführt:

Aus dieser Formel, welche ich in mehreren Beziehungen für sehr merkwürdig halte, lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen, von denen ich nur auf einige der sich zuerst darbietenden aufmerksam machen will.

Dass die beiden Normalen sich schneiden, wird offenbar dadurch bedingt, dass ihre kürzeste Entfernung von einander verschwindet. Nun fällt aber sogleich in die Augen, dass E verschwindet für $\sin(\omega-\omega_1)=0$, für $\overline{\omega}=90^0$, für $\overline{\omega}_1=90^0$, für $\sin\overline{\omega}=\sin\overline{\omega}_1$, welches alles leicht geometrisch zu deutende Folgerungen sind. Bemerkenswerther ist es aber, dass E auch verschwindet, dass also die beiden Normalen sich jederzeit schneiden, wenn

$$25)\quad \sin\Theta^2-e^2\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2=0,$$

d. h. wenn

$$26)\quad \sin\Theta=\pm e\sin(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1$$

ist. Es frägt sich nur, ob diese Gleichung überhaupt existiren kann oder zulässig ist, was wir jetzt sorgfältig untersuchen wollen.

Weil nach 13)

$$\cos\Theta=\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1+\cos(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1$$

ist, so ist

$$\sin\Theta^2=1-\sin\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-\cos(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2$$
$$-2\cos(\omega-\omega_1)\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_1,$$

und die Gleichung 25) wird daher nach einigen leichten Verwandlungen:

$$(1-e^2)\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2\cos(\omega-\omega_1)^2+2\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_1\cos(\omega-\omega_1)$$
$$=1-\sin\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-e^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2$$

oder

$$\cos(\omega-\omega_1)^2+\frac{2}{1-e^2}\operatorname{tang}\overline{\omega}\operatorname{tang}\overline{\omega}_1\cos(\omega-\omega_1)$$
$$=\frac{1-\sin\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-e^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}{(1-e^2)\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}.$$

Löst man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf $\cos(\omega-\omega_1)$ als unbekannte Grösse auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man zuvörderst mittelst leichter Rechnung:

$$\left\{\cos(\omega-\omega_1)+\frac{\tan\overline{\omega}\tan\overline{\omega}_1}{1-e^2}\right\}^2$$

$$=\frac{1-e^2(1-\sin\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2+\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)+e^4\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}{(1-e^2)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}$$

$$=\frac{1-e^2(\cos\overline{\omega}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2)+e^4\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}{(1-e^2)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2},$$

also

$$\left\{\cos(\omega-\omega_1)+\frac{\tan\overline{\omega}\tan\overline{\omega}_1}{1-e^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}{(1-e^2)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2},$$

woraus sich die Formel

$$27)\quad \cos(\omega-\omega_1)=\frac{-\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\pm\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}}{(1-e^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}$$

ergiebt, welche, da $e^2<1$ ist, für $\cos(\omega-\omega_1)$ offenbar immer zwei reelle Werthe liefert, wobei nun aber ferner noch die Frage entsteht, ob diese Werthe, absolut genommen, auch nicht grösser als die Einheit sind, weil nur, wenn dies der Fall ist, die Längendifferenz $\omega-\omega_1$ mittelst der vorstehenden Gleichung wirklich aus den reducirten Breiten $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}_1$ bestimmt werden kann.

Wir müssen daher jetzt noch untersuchen, ob die Bedingung

$$\left\{\frac{-\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\pm\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}}{(1-e^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}\right\}^2 \leqq 1$$

als erfüllt betrachtet werden kann. Diese Bedingung fällt aber mit der folgenden zusammen:

$$\{-\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\pm\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}\}^2 \leqq (1-e^2)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2,$$

d. h., wie man leicht findet, mit der Bedingung

$$\mp 2\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}$$

$$\leqq \cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2-\sin\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2-1+e^2(\cos\overline{\omega}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2-2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2),$$

welche Bedingung sich ferner leicht auf die folgende reducirt:

$$\mp 2\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}$$

$$\leqq -\sin\overline{\omega}^2-\sin\overline{\omega}_1{}^2+e^2(\cos\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}_1{}^2+\sin\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2),$$

also auf die folgende:

$$\mp 2\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}$$
$$\overline{\overline{<}}-\sin\overline{\omega}^2(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)-\sin\overline{\omega}_1{}^2(1-e^2\cos\overline{\omega}^2),$$

oder auf die folgende:

$$0\overline{\overline{<}}-\sin\overline{\omega}^2(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)-\sin\overline{\omega}_1{}^2(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)$$
$$\pm 2\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)},$$

welche Bedingung offenbar mit der folgenden einerlei ist:

$$0\overline{\overline{<}}-\{\sin\overline{\omega}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}\mp\sin\overline{\omega}_1\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\}^2.$$

Diese Bedingung kann aber offenbar nur dann als erfüllt betra tet werden, wenn

$$\sin\overline{\omega}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}\mp\sin\overline{\omega}_1\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}=0$$

oder

$$\frac{\sin\overline{\omega}}{\sin\overline{\omega}_1}=\pm\frac{\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2}}$$

ist, und dann ist nach der vorhergehenden Entwickelung

$$\left\{\frac{-\sin\overline{\omega}\sin\overline{\omega}_1\pm\sqrt{(1-e^2\cos\overline{\omega}^2)(1-e^2\cos\overline{\omega}_1{}^2)}}{(1-e^2)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1}\right\}^2=1,$$

also $\cos(\omega-\omega_1)=\pm 1$, folglich wieder $\sin(\omega-\omega_1)=0$.

Hieraus sieht man, dass die beiden Normalen nur dann (verschwindende kleinste Entfernung haben oder sich schnei können, wenn $\sin(\omega-\omega_1)=0$, oder $\overline{\omega}=90^0$, oder $\overline{\omega}_1=90^0$, ($\sin\overline{\omega}=\sin\overline{\omega}_1$ ist, vorausgesetzt natürlich, dass nicht $a=b$ (nicht $\varepsilon=0$, also das Ellipsoid keine Kugel ist.

Zum Ueberfluss wollen wir schliesslich noch analytisch n weisen, dass der Nenner

$$(1+\varepsilon^2)\sin\Theta^2-\varepsilon^2\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2$$

des Ausdrucks 24) von E niemals verschwinden kann. Wäre nän

$$(1+\varepsilon^2)\sin\Theta^2-\varepsilon^2\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}_1{}^2=0,$$

so wäre

$$\frac{\sin\Theta^2}{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2}=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2},$$

also

$$\frac{\sin\Theta^2}{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2}<1.$$

Nun ist aber

$$\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2$$

$$=1-\sin\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}_1{}^2-\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2-2\cos(\omega-\omega_1)\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1\cos\bar{\omega}_1$$

$$=\sin\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2+\cos\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}_1{}^2-2\cos(\omega-\omega_1)\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1\cos\bar{\omega}_1$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\{\sin\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2+\cos\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}_1{}^2-2\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1\cos\bar{\omega}_1\}$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\{\sin\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2+\cos\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}_1{}^2+2\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1\cos\bar{\omega}_1\}$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2(\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1-\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1)^2$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2(\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1+\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}_1)^2$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}_1)^2+\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\sin(\bar{\omega}+\bar{\omega}_1)^2,$$

folglich immer

$$\sin\Theta^2-\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2\overline{\underline{>}}\,0,$$

$$\sin\Theta^2\overline{\underline{>}}\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}_1{}^2,$$

$$\frac{\sin\Theta^2}{\sin(\omega-\omega_1)^2\cos\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1{}^2}\overline{\underline{>}}\,1,$$

was mit dem Obigen streitet.

XXIV.

Ueber eine neue geodätische Aufgabe.

Von
dem Herausgeber.

I.

Die gewöhnlich nach Pothenot benannte Aufgabe, deren eigentlicher Erfinder aber, wie Herr Professor Verdam in Leiden im Archiv Thl. II. S. 210. nachgewiesen hat, der berühmte holländische Mathematiker Willebrord Snellius ist, zeigt bekanntlich, wie, wenn drei Punkte A, B, C in einer Ebene der Lage nach gegeben sind, die Lage eines vierten Punktes D in derselben Ebene bloss aus den beiden in diesem Punkte gemessenen Winkeln ADB und BDC bestimmt werden kann, so dass man sich also bei dieser Messung bloss auf die der Lage nach zu bestimmende Station D zu begeben braucht, was diese Aufgabe für die Praxis besonders empfiehlt. Ich glaube, dass sich dieser berühmten Aufgabe eine andere zur Seite stellen lässt, welche in der Praxis ähnliche Vortheile gewähren dürfte.

Wenn nämlich (Taf. IV. Fig. 15.) B und B_1 zwei Punkte im Raume sind, deren horizontale Entfernung AA_1 und deren Höhen AB, A_1B_1 über einer gewissen Horizontalebene ACA_1 als gegeben betrachtet werden können, und man misst in einem dritten Punkte D die horizontale Projection EDE_1 des Winkels BDB_1 und die beiden Vertikalwinkel BDE, B_1DE_1, wozu der Theodolit das geeignetste Instrument ist, so lässt sich aus diesen gemessenen Winkeln die Lage des Punktes D im Raume ermitteln, d. h. es können aus den drei in Rede stehenden Winkeln die horizontalen Entfernungen DE, DE_1 oder CA, CA_1 des Punktes D von den beiden Punkten B und B_1 und dessen Höhe CD über

der Horizontalebene ACA_1 bestimmt werden. Wären also in einer Gegend B und B_1 etwa die Spitzen zweier Thürme oder die Gipfel zweier Berge, deren horizontale Entfernung und deren Höhen über einer gewissen Horizontalebene aus einer anderweitigen Messung als genau bekannt angenommen werden könnten, so würde die Lage jedes anderen Punktes im Raume, aus welchem jene beiden Punkte sichtbar sind, durch Messung der drei oben näher bezeichneten Winkel bestimmt werden können, also nicht bloss die horizontalen Entfernungen dieses Punktes von den beiden Punkten B und B_1, sondern auch dessen Höhe über der angenommenen Horizontalebene, wobei man sich ähnlich wie bei der Pothenot'schen Aufgabe nur auf diesen Punkt zu begeben braucht. Die aus diesen vorläufigen Betrachtungen sich ergebende Aufgabe, die in der Praxis wohl hin und wieder zweckmässige Anwendung finden dürfte, will ich nun im Folgenden auflösen, schicke aber der Auflösung noch die folgenden näheren Bestimmungen voraus.

Die Höhen aller Punkte werden auf ein und dieselbe Horizontalebene bezogen, aber stets als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die betreffenden Punkte über oder unter der in Rede stehenden Horizontalebene liegen. Wenn ferner in einem beliebigen Punkte M der Neigungswinkel der von dem Punkte M nach einem anderen beliebigen Punkte N gezogenen Linie MN gegen die durch den Punkt M gelegte Horizontalebene gemessen wird, so soll dieser, natürlich neunzig Grade nie übersteigende Neigungswinkel immer als positiv oder negativ betrachtet werden, jenachdem der Punkt N über oder unter der durch den Punkt M gelegten Horizontalebene liegt. Dies vorausgesetzt, kommt nun das Obige auf die Auflösung der folgenden Aufgabe zurück.

Aufgabe.

Wenn die horizontale Entfernung e und in Bezug auf eine gewisse angenommene Horizontalebene die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Höhen h und h_1 zweier Punkte gegeben sind, und in einem dritten Punkte sowohl die horizontale Projection α des von den von diesem dritten Punkte nach den beiden ersten Punkten gezogenen Gesichtslinien eingeschlossenen Winkels, als auch die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten spitzen Neigungswinkel i und i_1 dieser Gesichtslinien gegen die durch den dritten Punkt gelegte Horizontalebene gemessen werden: die Lage dieses dritten Punktes im Raume zu bestimmen, d. h. dessen horizontale Entfernungen x und x_1 von den

beiden ersten Punkten, und seine gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Höhe u in Bezug auf die angenommene Horizontalebene, auf welche alle Höhen bezogen werden, zu finden.

Auflösung.

Zuerst haben wir nach den Lehren der ebenen Trigonometrie die Gleichung:

$$1)\quad e^2 = x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos\alpha.$$

Ferner sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit $h-u$ und h_1-u die Höhen der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf die durch den der Lage nach zu bestimmenden Punkt gelegte Horizontalebene, so dass wir also ferner die beiden folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen haben:

$$2)\quad h-u = x\tan i,\quad h_1 - u = x_1 \tan i_1.$$

Aus den drei Gleichungen 1) und 2) müssen die drei unbekannten Grössen x, x_1, u bestimmt werden, was auf verschiedene Arten möglich ist; die einfachste und eleganteste Auflösung dieser drei Gleichungen scheint mir aber folgende zu sein.

Die Gleichung 1) kann auf folgende Art geschrieben werden:

$$e^2 = (x^2+x_1^2)(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) - 2xx_1(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2),$$

also

$$e^2 = (x^2 + 2xx_1 + x_1^2)\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (x^2 - 2xx_1 + x_1^2)\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

oder

$$e^2 = (x+x_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (x-x_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Setzen wir nun

$$3)\quad \begin{cases} x+x_1 = v, & x-x_1 = w; \\ x = \tfrac{1}{2}(v+w), & x_1 = \tfrac{1}{2}(v-w); \end{cases}$$

so wird vorstehende Gleichung:

$$4)\quad e^2 = v^2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + w^2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

oder

$$5)\quad \left(\frac{v\sin\frac{1}{2}\alpha}{e}\right)^2 + \left(\frac{w\cos\frac{1}{2}\alpha}{e}\right)^2 = 1.$$

/egen dieser Gleichung können wir

$$6)\quad \frac{v\sin\frac{1}{2}\alpha}{e}=\sin\varphi,\quad \frac{w\cos\frac{1}{2}\alpha}{e}=\cos\varphi;$$

lso

$$7)\quad v=\frac{e\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}\alpha},\quad w=\frac{e\cos\varphi}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

etzen.

Aus den beiden Gleichungen 2) folgt durch Subtraction:

$$h-h_1=x\,\mathrm{tang}\,i-x_1\,\mathrm{tang}\,i_1,$$

lso nach 3):

$$2(h-h_1)=(v+w)\,\mathrm{tang}\,i-(v-w)\,\mathrm{tang}\,i_1,$$

der

$$2(h-h_1)=v(\mathrm{tang}\,i-\mathrm{tang}\,i_1)+w(\mathrm{tang}\,i+\mathrm{tang}\,i_1),$$

'as die Gleichung

$$8)\quad 2(h-h_1)\cos i\cos i_1=v\sin(i-i_1)+w\sin(i+i_1),$$

so nach 7) die Gleichung

$$9)\quad 2(h-h_1)\cos i\cos i_1=\frac{e\sin(i-i_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\sin\varphi+\frac{e\sin(i+i_1)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cos\varphi$$

ebt, aus welcher Gleichung der Winkel φ bestimmt werden muss.

Zu dem Ende bringe man diese Gleichung auf die Form

$$2(h-h_1)\cos i\cos i_1=\frac{e\sin(i-i_1)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\{\sin\varphi+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\frac{\sin(i+i_1)}{\sin(i-i_1)}\cos\varphi\}$$

ıd bestimme den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$10)\quad \mathrm{tang}\,\Theta=\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\sin(i+i_1)}{\sin(i-i_1)}.$$

'ann wird die vorstehende Gleichung:

$$\frac{2(h-h_1)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1}{e\sin(i-i_1)}=\frac{\sin(\Theta+\varphi)}{\cos\Theta},$$

lso

$$11)\quad \sin(\Theta+\varphi)=\frac{2(h-h_1)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\cos\Theta}{e\sin(i-i_1)}.$$

Ian bestimme nun überhaupt den Winkel ω mittelst der Formel

$$12)\quad \sin\omega=\frac{2(h-h_1)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\cos\Theta}{e\sin(i-i_1)},$$

so ist wegen der Gleichungen 11) und 12), indem n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$\Theta+\varphi=\left\{\begin{array}{l}2n\pi+\omega\\(2n+1)\pi-\omega\end{array}\right.;$$

also

$$\varphi=\left\{\begin{array}{l}2n\pi+(\omega-\Theta)\\(2n+1)\pi-(\omega+\Theta)\end{array}\right.;$$

folglich nach 7):

$$v=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e\sin(\omega-\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\\[2ex]\dfrac{e\sin(\omega+\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\end{array}\right.;\quad w=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e\cos(\omega-\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\\[2ex]-\dfrac{e\cos(\omega+\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\end{array}\right.;$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$13)\quad v=\frac{e\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha},\quad w=\pm\frac{e\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Daher ist nach 3):

$$2x=e\left\{\frac{\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\pm\frac{\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\},$$

$$2x_1=e\left\{\frac{\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\mp\frac{\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\};$$

oder

$$2x=e\frac{\sin(\omega\mp\Theta)\cos\frac{1}{2}\alpha\pm\cos(\omega\mp\Theta)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

$$2x_1=e\frac{\sin(\omega\mp\Theta)\cos\frac{1}{2}\alpha\mp\cos(\omega\mp\Theta)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha};$$

also

$$14)\quad\left\{\begin{array}{l}x=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\pm\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha},\\[2ex]x_1=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\mp\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha}.\end{array}\right.$$

Hat man auf diese Weise x und x_1 gefunden, so ergiebt sich z mittelst einer der beiden folgenden, aus 2) fliessenden Formeln:

$$15)\quad \begin{cases} u=h-x\tang i,\\ u=h_1-x_1\tang i_1; \end{cases}$$

die Uebereinstimmung der aus diesen beiden Formeln abgeleien Werthe von u zugleich als eine Prüfung für die Richtigkeit r ganzen geführten Rechnung dienen kann.

Ueberhaupt hat man die Rechnung nach den folgenden Forln zu führen:

$$16)\quad \begin{cases} \tang\Theta=\tang\tfrac{1}{2}\alpha\dfrac{\sin(i+i_1)}{\sin(i-i_1)},\\[2ex] \sin\omega=\dfrac{2(h-h_1)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\cos\Theta}{e\sin(i-i_1)};\\[2ex] x=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\pm\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha},\\[2ex] x_1=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\mp\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha};\\[2ex] u=h-x\tang i=h_1-x_1\tang i_1. \end{cases}$$

Dass diese Formeln zur logarithmischen Rechnung äusserst nem sind, fällt auf der Stelle in die Augen; schwerlich wird andere Auflösung zu bequemeren Formeln führen. Jedoch rsieht man auf der Stelle, dass dieselben ihre Anwendbarkeit ieren, wenn $i=i_1$, also $\sin(i-i_1)=0$ ist. In diesem Falle t aber die Gleichung 9) in die Gleichung

$$2(h-h_1)\cos i^2=\frac{e\sin 2i}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cos\varphi$$

r

$$(h-h_1)\cos i=\frac{e\sin i}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cos\varphi$$

r, woraus sich

$$17)\quad \cos\varphi=\frac{h-h_1}{e}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cot i$$

ebt. Bezeichnet nun wieder ω überhaupt einen Winkel, welr der Gleichung

$$18)\quad \cos\omega=\frac{h-h_1}{e}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cot i$$

ügt, so ist bekanntlich, wenn n eine positive oder negative e Zahl bezeichnet,

$$\varphi = 2n\pi \pm \omega,$$

also nach 7):

$$19)\quad v = \pm \frac{e \sin \omega}{\sin \frac{1}{2}\alpha},\quad w = \frac{e \cos \omega}{\cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Daher ist nach 3)

$$2x = \pm e\left(\frac{\sin \omega}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \pm \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\right),$$

$$2x_1 = \pm e\left(\frac{\sin \omega}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \mp \frac{\cos \omega}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\right);$$

oder

$$2x = \pm e\,\frac{\sin \omega \cos \frac{1}{2}\alpha \pm \cos \omega \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha},$$

$$2x_1 = \pm e\,\frac{\sin \omega \cos \frac{1}{2}\alpha \mp \cos \omega \sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha};$$

also

$$20)\quad x = \pm e\,\frac{\sin(\omega \pm \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \alpha},\quad x_1 = \pm e\,\frac{\sin(\omega \mp \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \alpha};$$

und man hat folglich die Rechnung überhaupt nach den folgenden Formeln zu führen:

$$21)\quad \begin{cases} \cos \omega = \dfrac{h-h_1}{e} \cos \frac{1}{2}\alpha \cot i, \\[2mm] x = \pm e\,\dfrac{\sin(\omega \pm \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \alpha}, \\[2mm] x_1 = \pm e\,\dfrac{\sin(\omega \mp \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \alpha}, \\[2mm] u = h - x \operatorname{tang} i = h_1 - x_1 \operatorname{tang} i. \end{cases}$$

In dem allgemeinen Falle kann man aber die Auflösung auch auf folgende Art anordnen. Die Gleichung 9) stelle man unter der folgenden Form dar:

$$2(h-h_1)\cos i \cos i_1 = \frac{e \sin(i+i_1)}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\left\{\cos \varphi + \cot \tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\sin(i-i_1)}{\sin(i+i_1)} \sin \varphi\right\},$$

und bestimme den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel:

$$10^*)\quad \cot \Theta = \cot \tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\sin(i-i_1)}{\sin(i+i_1)}.$$

Dann wird die vorstehende Gleichung:

$$\frac{2(h-h_1)\cos\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1}{e\sin(i+i_1)}=\frac{\sin(\Theta+\varphi)}{\sin\Theta}.$$

o

$$11^*)\quad \sin(\Theta+\varphi)=\frac{2(h-h_1)\cos\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\sin\Theta}{e\sin(i+i_1)}.$$

n bestimme nun überhaupt den Winkel ω mittelst der Formel

$$12^*)\quad \sin\omega=\frac{2(h-h_1)\cos\frac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\sin\Theta}{e\sin(i+i_1)},$$

ist, indem n eine positive oder negative ganze Zahl bezeich-
, bekanntlich

$$\Theta+\varphi=\left\{\begin{array}{l}2n\pi+\omega\\(2n+1)\pi-\omega\end{array}\right.;$$

)

$$\varphi=\left\{\begin{array}{l}2n\pi+(\omega-\Theta)\\(2n+1)\pi-(\omega+\Theta)\end{array}\right.;$$

;lich nach 7):

$$v=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e\sin(\omega-\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\\[2ex]\dfrac{e\sin(\omega+\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\end{array}\right.;\quad w=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e\cos(\omega-\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\\[2ex]-\dfrac{e\cos(\omega+\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\end{array}\right.;$$

) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$13^*)\quad v=\frac{e\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha},\quad w=\pm\frac{e\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

her ist nach 3):

$$2x=e\left\{\frac{\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\pm\frac{\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\},$$

$$2x_1=e\left\{\frac{\sin(\omega\mp\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\mp\frac{\cos(\omega\mp\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\};$$

) ganz wie oben:

$$14^*)\quad\left\{\begin{array}{l}x=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\pm\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha},\\[2ex]x_1=e\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\mp\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha}.\end{array}\right.$$

llich ist:

$$15^*)\quad \begin{cases} u = h - x \operatorname{tang} i, \\ u = h_1 - x_1 \operatorname{tang} i_1. \end{cases}$$

Ueberhaupt hat man die Rechnung nach den folgenden meln zu führen:

$$16^*)\quad \begin{cases} \cot\Theta = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\,\dfrac{\sin(i-i_1)}{\sin(i+i_1)}, \\[2ex] \sin\omega = \dfrac{2(h-h_1)\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos i\cos i_1\sin\Theta}{e\sin(i+i_1)}, \\[2ex] x = e\,\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\pm\tfrac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha}, \\[2ex] x_1 = e\,\dfrac{\sin(\omega\mp\Theta\mp\tfrac{1}{2}\alpha)}{\sin\alpha}, \\[2ex] u = h - x\operatorname{tang} i = h_1 - x_1\operatorname{tang} i_1. \end{cases}$$

Die gemessenen Winkel i und i_1 muss man natürlich, b sie in die Rechnung eingeführt werden, wegen der terrestris Refraction corrigiren; dazu ist aber bekanntlich die Kenntniss horizontalen Entfernungen des zu bestimmenden Punktes von beiden gegebenen Punkten und eigentlich auch der Höhe j Punktes über der Meeresfläche erforderlich. Man wird also zı aus den gemessenen uncorrigirten Winkeln i, i_1 und dem Wi α die Grössen x, x_1, u nach den obigen Formeln berecl hierauf die gemessenen Winkel i, i_1 auf bekannte Weise w der Refraction corrigiren und nun aus den corrigirten Wir i, i_1 und dem Winkel α die Grössen x, x_1, u nach den ob Formeln von Neuem berechnen. Sollte man dann die gefund Werthe dieser Grössen noch nicht für völlig genau halten, müsste man das vorhergehende Verfahren wiederholen, was weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

Im Allgemeinen giebt es, wie die obigen Formeln zeigen, Auflösungen unserer Aufgabe, wobei man jedoch zu beachten dass die Grössen x und x_1 ihrer Natur nach positiv sein müs Wenn es geometrisch zwei Auflösungen giebt, so kann man, es mir scheint, auf folgende Art in zweckmässiger Weise tisch entscheiden, welche der beiden Auflösungen dem in Wirklichkeit vorliegenden Falle entspricht. Ich setze voraus, man die Abweichung der horizontalen Projection AA_1 (Taf. Fig. 15.) der Linie BB_1 von dem magnetischen Meridiane mit einer Boussole oder eines Compasses unmittelbar beobachtet aus anderweitigen Messungen und Beobachtungen abgeleitet

was näherungsweise, wie es zu dem beabsichtigten Zwecke bloss nöthig ist, einer Schwierigkeit nie unterliegen wird. Dann kann man, wie auf der Stelle erhellen wird, auch leicht die Abweichungen der zwei, den beiden Auflösungen unserer Aufgabe entsprechenden Linien CA von dem magnetischen Meridiane berechnen; und beobachtet man nun in D die Abweichung der dem in der Praxis vorliegenden Falle wirklich entsprechenden Linie CA von dem magnetischen Meridiane mittelst desselben Instruments wie vorher, so wird man leicht beurtheilen können, welche der zwei den beiden Auflösungen unserer Aufgabe theoretisch entsprechenden Linien CA die dem in der Praxis vorliegenden Falle entsprechende Linie ist, und wird also immer ohne Schwierigkeit aus den beiden Auflösungen die richtige, d. h. die dem vorliegenden praktischen Falle wirklich entsprechende, auswählen können. Kann man in einzelnen Fällen aus blossen geometrischen Betrachtungen, ohne des vorhergehenden praktischen Hülfsmittels zu bedürfen, beurtheilen, welche der beiden Auflösungen man zu wählen hat, so ist dies natürlich um so besser; allgemeine Vorschriften hierüber scheinen sich aber nicht geben zu lassen.

II.

Wenn man die vorhergehende Aufgabe für die als eine Kugel betrachtete Erde auflösen wollte, so würde man sie auf folgende Art aussprechen müssen.

Aufgabe.

Wenn die Höhen zweier Punkte B, B_1 über der Meeresfläche oder deren Entfernungen r, r_1 von dem Mittelpunkte O der Erde und der von ihren Vertikalen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossene Winkel ε gegeben sind, und in einem dritten Punkte D der von den Projectionen der Linien BD und B_1D auf den Horizont von D eingeschlossene Winkel α, so wie die Neigungswinkel i, i_1 der Linien BD, B_1D gegen den Horizont von D gemessen werden: die Lage des Punktes D im Raume zu bestimmen, d. h. den von den Vertikalen der Punkte B und D am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel φ, den von den Vertikalen der Punkte B_1 und D am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel φ_1, und die Höhe des Punktes D über der Meeresfläche oder, was Dasselbe ist, seine Entfernung ϱ von dem Mittelpunkte der Erde zu finden.

Auflösung.

Zuerst liefert uns die sphärische Trigonometrie unmittell die Gleichung

$$1)\quad \cos\varepsilon = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\alpha\sin\varphi\sin\varphi_1;$$

und ferner ergeben sich aus den Dreiecken BOD und B_1OD, denen die Projectionen von BD und B_1D auf den Horizont D in D auf OD senkrecht stehen, leicht die Proportionen:

$$r:\varrho = \sin(90^0 + i):\sin\{180^0 - (90^0 + i) - \varphi\},$$
$$r_1:\varrho = \sin(90^0 + i_1):\sin\{180^0 - (90_0 + i_1) - \varphi_1\};$$

also die Proportionen:

$$r:\varrho = \cos i:\cos(i + \varphi),$$
$$r_1:\varrho = \cos i_1:\cos(i_1 + \varphi_1);$$

aus denen sich die Gleichungen

$$2)\quad \varrho = \frac{r\cos(i+\varphi)}{\cos i},\quad \varrho = \frac{r_1\cos(i_1+\varphi_1)}{\cos i_1}$$

ergeben. Also hat man nach 1) und 2) zur Bestimmung vo und φ_1 die beiden folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\alpha\sin\varphi\sin\varphi_1, \\ \dfrac{r\cos(i+\varphi)}{\cos i} = \dfrac{r_1\cos(i_1+\varphi_1)}{\cos i_1}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich auf verschiedene Arten lösen, etwa nach folgendem Verfahren.

Die erste Gleichung bringt man leicht auf die folgende Fo

$$4)\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos(\varphi - \varphi_1) + \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos(\varphi + \varphi_1) = \cos\varepsilon.$$

Bringt man nun die zweite Gleichung auf die Form

$$\frac{r\cos i_1}{r_1\cos i} = \frac{\cos(i_1+\varphi_1)}{\cos(i+\varphi)},$$

so erhält man leicht:

$$\frac{r\cos i_1 - r_1\cos i}{r\cos i_1 + r_1\cos i} = \frac{\cos(i_1+\varphi_1) - \cos(i+\varphi)}{\cos(i_1+\varphi_1) + \cos(i+\varphi)},$$

also, wie man sogleich findet:

$$5)\quad \frac{r\cos i_1 - r_1\cos i}{r\cos i_1 + r_1\cos i} = \tang\tfrac{1}{2}\{(i - i_1) + (\varphi - \varphi_1)\}\tang\tfrac{1}{2}\{(i + i_1) + (\varphi + \varphi$$

tzt man der Kürze wegen

$$6)\quad \varphi-\varphi_1=u,\quad \varphi+\varphi_1=v;$$

l

$$7)\quad \mu=\frac{r\cos i_1-r_1\cos i}{r\cos i_1+r_1\cos i};$$

werden die Gleichungen 4) und 5):

$$8)\quad \begin{cases}\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos u+\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos v=\cos\varepsilon,\\ \mu=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(i-i_1+u)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(i+i_1+v).\end{cases}$$

se Gleichungen kann man aber, wenn man der Kürze wegen noch

$$9)\quad x=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u,\quad y=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v$$

$$10)\quad f=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(i-i_1),\quad g=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(i+i_1)$$

t, auf folgende Art ausdrücken:

$$11)\quad \begin{cases}\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\dfrac{1-y^2}{1+y^2}=\cos\varepsilon,\\[2ex] \mu=\dfrac{f+x}{1-fx}\cdot\dfrac{g+y}{1-gy}.\end{cases}$$

ninirt man aus diesen beiden Gleichungen y oder x, so ält man respective für x oder y eine Gleichung des vierten des, deren Entwickelung ich dem Leser überlasse.

Kommt man in den Fall, die vorhergehende Aufgabe praktisch uwenden, so wird man immer am besten auf folgende Art veren. Man löset die Aufgabe zuerst nach I. so auf, als wenn zwischen den Vertikalen der Punkte B, B_1, D liegende, ein ärisches Dreieck bildende Theil der Meeresfläche eine Ebene e. Dann wird man mittelst der nach I. gefundenen Entfernun-, die dort durch x und x_1 bezeichnet worden sind, und des annten Erdhalbmessers leicht auf bekannte Weise Näherungsthe von φ und φ_1 berechnen können. Mittelst dieser Nähegswerthe werden sich dann ferner ohne Schwierigkeit die geen Werthe von φ und φ_1, welche den beiden Gleichungen

$$\frac{r\cos(i+\varphi)}{\cos i}=\frac{r_1\cos(i_1+\varphi_1)}{\cos i_1},$$

$$\cos\varepsilon=\cos\varphi\cos\varphi_1+\cos\alpha\sin\varphi\sin\varphi_1$$

genügen müssen, finden lassen. Lässt man nämlich φ mehrer dem gefundenen Näherungswerthe dieses Winkels wenig vers dene Werthe durchlaufen, so wird man die entsprechenden W von φ_1 leicht mittelst der Formel

$$\cos(i_1+\varphi_1)=\frac{r\cos i_1}{r_1\cos i}\cos(i+\varphi)$$

berechnen und dann prüfen können, ob diese Werthe von φ φ_1 auch der Gleichung

$$\cos\varepsilon=\cos\varphi\cos\varphi_1+\cos\alpha\sin\varphi\sin\varphi_1$$

genügen. Hat man aber auf diese Weise die genauen W von φ und φ_1 gefunden, so ergiebt sich auch leicht der ge Werth von ϱ mittelst einer der beiden Formeln:

$$\varrho=\frac{r\cos(i+\varphi)}{\cos i},\quad \varrho=\frac{r_1\cos(i_1+\varphi)}{\cos i_1}.$$

Aus den genauen Werthen von φ und φ_1 und dem bel ten Erdhalbmesser kann man aber endlich auch leicht die als gen grösster Kreise auf der Meeresfläche betrachteten Entfe gen der Punkte B, D und B_1, D von einander, überhaupt Grössen berechnen, welche hier von Wichtigkeit sein können

---

XXV.

Verschiedene Bemerkungen.

Von

Herrn Doctor *Paul Buttel*

zu Hamburg.

Im „Archiv Bd. IV. Abhandl. XII. S. 91." ist, wenn F Fläche des eingeschriebenen, F'_k die des umschriebenen eckes bedeutet, für F_k ein von F'_k unabhängiger Ausdruck Herrn Professor Grunert aufgestellt und dann die Frage a

n, ob sich für F'_k ein ähnlicher einfacher Ausdruck herstel-
esse. Ich bin auf demselben Wege, wie in der angeführten
ndlung, zu dem im Folgenden entwickelten Ausdruck gelangt;
lbe lässt sich aber auch noch anderweitig kürzer finden. Die
nothwendigen Relationen sind:

$$(F_k)^2 = F_{k-1} . F'_{k-1} \qquad (1)$$

$$F'_k = \frac{2F_{k-1} . F'_{k-1}}{F_{k-1} + F_k}. \qquad (2)$$

e ich die zweite der Gleichungen und reducire dieselbe auf
so erhalte ich:

$$F'_k . F_{k-1} + F'_k . F_k - 2F_{k-1} . F'_{k-1} = 0.$$

us folgt:

$$(2F'_{k-1} - F'_k) F_{k-1} = F'_k . F_k$$

$$\frac{F_k}{F_{k-1}} = \frac{2F'_{k-1} - F'_k}{F'_k}. \qquad (3)$$

re ich diese Gleichung in (1), so ergiebt sich:

$$F_k = \frac{F'_{k-1} . F'_k}{2F'_{k-1} - F'_k}.$$

ich mir hieraus den analogen Ausdruck für F_{k-1}, so ergiebt
wenn ich für k, $k-1$ setze:

$$F_{k-1} = \frac{F'_{k-2} . F'_{k-1}}{2F'_{k-2} - F'_{k-1}},$$

h

$$\frac{F_k}{F_{k-1}} = \frac{F'_k (2F'_{k-2} - F'_{k-1})}{F'_{k-2} (2F'_{k-1} - F'_k)}. \qquad (4)$$

len Gleichungen (3) und (4) erhalte ich:

$$\frac{2F'_{k-1} - F'_k}{F'_k} = \frac{F'_k (2F'_{k-2} - F'_{k-1})}{F'_{k-2} (2F'_{k-1} - F'_k)}$$

$$\left\{ \frac{2F'_{k-1} - F'_k}{F'_k} \right\}^2 = \frac{2F'_{k-2} - F'_{k-1}}{F'_{k-2}}$$

$$\frac{2F'_{k-1}}{F'_k}-1=\sqrt{2-\frac{F'_{k-1}}{F'_{k-2}}},$$

oder

$$F'_k=\frac{2F'_{k-1}}{1+\sqrt{2-\frac{F'_{k-1}}{F'_{k-2}}}}, \qquad (5)$$

wobei nur das positive Zeichen berücksichtigt werden darf.

Berichtigung.

In der Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Dienger in d „Archiv Bd. XI. Abh. XL." finden sich in §. 5. unter (8) zı Formeln für sn a und cn a, deren Werthe unrichtig sind. Benı man nämlich zu ihrer Herleitung in (7) die Relation:

$$\mathrm{cn}\,2a=\frac{\mathrm{cn}^2 a-\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a}{1-m^2\,\mathrm{sn}^4 a},$$

so ergiebt sich:

$$\mathrm{sn}\,a=\pm\frac{1}{m}\sqrt{\frac{1\pm\mathrm{dn}\,2a}{1+\mathrm{cn}\,2a}}$$

und

$$\mathrm{cn}\,a=\pm\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m^2(1+\mathrm{cn}\,2a)-(1\pm\mathrm{dn}\,2a)}{1+\mathrm{cn}\,2a}},$$

deren Herleitung folgende ist:

$$\mathrm{sn}^4 a-2\frac{\mathrm{sn}^2 a}{m^2(1+\mathrm{cn}2a)}+\frac{1-\mathrm{cn}\,2a}{m^2(1+\mathrm{cn}\,2a)}=0,$$

d. h.

$$\mathrm{sn}^2 a=\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}2a)}\pm\sqrt{\frac{1}{m^4(1+\mathrm{cn}\,2a)^2}-\frac{1-\mathrm{cn}\,2a}{m^2(1+\mathrm{cn}\,2a)}}$$

$$=\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}2a)}\pm\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}\,2a)}\sqrt{1-m^2+m^2\mathrm{cn}^2 2a}$$

$$=\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}2a)}\pm\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}2a)}\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 2a}$$

$$=\frac{1}{m^2(1+\mathrm{cn}\,2a)}(1\pm\mathrm{dn}\,2a)$$

oder

$$\operatorname{sn} a = \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1 \pm \operatorname{dn} 2a}{1 + \operatorname{cn} 2a}},$$

woraus die weniger gefällige Form für cn$a$ folgt.

XXVI.

Miscellen.

Tafel zur Bestimmung der Capillardepression in Barometern.

Die Herren Pohl und Schabus zu Wien haben zwei sehr werthvolle Tafeln zur Vergleichung und Reduction der in verschiedenen Längenmaassen abgelesenen Barometerstände und zur Reduction der in Millimetern abgelesenen Barometerstände auf die Normaltemperatur von 0° Celsius herausgegeben, die in den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, aber auch in besonderen Abdrücken erschienen sind, und allen Beobachtern des Barometers dringend empfohlen werden müssen. Ganz neuerlich haben dieselben Herren auch eine äusserst werthvolle Tafel zur Bestimmung der Capillardepression in Barometern berechnet. Da diese Tafel, wie es scheint, bis jetzt in keinem besonderen Abdrucke zu haben ist, und der bisher meistens immer gebrauchten Tafel von Schleiermacher und Eckhardt weit vorgezogen werden muss, so will ich mir erlauben, diese Tafel zu weiterer Verbreitung derselben im Folgenden den Lesern des Archivs mitzutheilen, wodurch ich Manchem einen besonderen Dienst zu leisten hoffe. Zur Erklärung der Tafel genügt vollständig die Bemerkung, dass die erste Vertikalspalte den Röhrendurchmesser des Barometers, die oberste Horizontalspalte die Meniskushöhe giebt, Alles, so wie auch die Capillardepressionen selbst, in Millimetern ausgedrückt.

Tafel zur Bestimmung der

Röhrendurchmesser in Millimetern.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2.0	1.268	2.460	3.516	4.396	5.085				
.2	1.048	2.044	2.942	3.713	4.339				
.4	0.876	1.715	2.484	3.162	3.728	4.190			
.6	0.744	1.462	2.128	2.724	3.236	3.663			
.8	0.638	1.256	1.836	2.363	2.825	3.218	3.542		
3.0	0.554	1.092	1.601	2.068	2.484	2.846	3.150		
.2	0.484	0.955	1.404	1.820	2.196	2.528	2.812	3.050	
.4	0.427	0.842	1.241	1.613	1.954	2.258	2.522	2.748	
.6	0.378	0.747	1.103	1.437	1.746	2.024	2.270	2.483	2.662
.8	0.336	0.667	0.986	1.288	1.568	1.823	2.051	2.251	2.422
4.0	0.302	0.598	0.885	1.158	1.413	1.648	1.859	2.046	2.209
.2	0.271	0.539	0.799	1.046	1.279	1.495	1.690	1.865	2.020
.4	0.245	0.487	0.723	0.948	1.161	1.360	1.541	1.705	1.851
.6	0.223	0.442	0.657	0.863	1.058	1.241	1.409	1.564	1.701
.8	0.203	0.403	0.599	0.787	0.966	1.135	1.292	1.436	1.565
5.0	0.186	0.368	0.548	0.721	0.885	1.042	1.187	1.321	1.442
.2	0.170	0.337	0.502	0.661	0.813	0.958	1.093	1.218	1.332
.4	0.156	0.310	0.462	0.608	0.749	0.883	1.009	1.125	1.232
.6	0.143	0.285	0.425	0.560	0.691	0.815	0.932	1.041	1.142
.8	0.132	0.263	0.392	0.517	0.639	0.754	0.863	0.965	1.060
6.0	0.122	0.243	0.362	0.478	0.591	0.698	0.800	0.896	0.985
.2	0.113	0.225	0.336	0.444	0.548	0.648	0.743	0.833	0.917
.4	0.105	0.209	0.312	0.412	0.509	0 602	0.691	0.776	0.855
.6	0.098	0.194	0.290	0.383	0.473	0.561	0.644	0.723	0.798
.8	0.091	0.181	0.269	0.356	0.441	0.523	0.601	0.675	0.745
7.0	0.085	0.168	0.251	0.332	0.411	0.488	0.561	0.631	0.697
.2	0.079	0.157	0.234	0.310	0.384	0.455	0.524	0.590	0.652
.4	0.074	0.147	0.219	0.290	0.359	0.426	0.490	0.552	0.610
.6	0.069	0.137	0.205	0.271	0.336	0.399	0.459	0.517	0.572
.8	0.064	0.128	0.192	0.254	0.315	0.373	0.431	0.485	0.537
8.0	0.060	0.120	0.180	0.238	0.295	0.350	0.404	0.455	0.504

Capillardepression in Barometern.

Röhrendurchmesser in Millimetern.	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
2.0									
.2									
.4									
.6									
.8									
3.0									
.2									
.4									
.6									
.8									
4.0	2.348								
.2	2.153								
.4	1.978	2.087							
.6	1.822	1.926							
.8	1.680	1.780	1.866						
5.0	1.552	1.648	1.731						
.2	1.436	1.528	1.608	1.676					
.4	1.331	1.419	1.495	1.561					
.6	1.235	1.318	1.392	1.456	1.511				
.8	1.148	1.227	1.297	1.359	1.413				
6.0	1.068	1.143	1.210	1.270	1.322	1.368			
.2	0.995	1.066	1.131	1.188	1.238	1.282			
.4	0.928	0.995	1.057	1.112	1.161	1.203	1.238		
.6	0.867	0.931	0.989	1.041	1.088	1.129	1.164		
.8	0.810	0.871	0.926	0.976	1.021	1.061	1.095		
7.0	0.758	0.815	0.868	0.916	0.959	0.997	1.030		
.2	0.710	0.764	0.814	0.860	0.901	0.938	0.970		
.4	0.665	0.717	0.764	0.808	0.847	0.883	0.914		
.6	0.624	0.673	0.718	0.760	0.797	0.831	0.861	0.887	
.8	0.586	0.632	0.675	0.715	0.751	0.783	0.812	0.837	
8.0	0.551	0.594	0.635	0.673	0.707	0.738	0.766	0.790	

Tafel zur Bestimmung der

Röhrendurchmesser in Millimetern.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8.0	0.060	0.120	0.180	0.238	0.295	0.350	0.404	0.455	0.504
.2	0.056	0.113	0.169	0.223	0.277	0.329	0.379	0.428	0.474
.4	0.053	0.106	0.158	0.210	0.260	0.309	0.356	0.402	0.446
.6	0.050	0.100	0.149	0.198	0.244	0.290	0.335	0.378	0.419
.8	0.047	0.094	0.140	0.185	0.230	0.273	0.315	0.356	0.395
9.0	0.044	0.088	0.13[illegible]	0.174	0.216	0.257	0.297	0.335	0.372
.2	0.042	0.083	0.124	0.164	0.204	0.242	0.280	0.316	0.351
.4	0.039	0.078	0.117	0.155	0.192	0.228	0.264	0.298	0.331
.6	0.037	0.074	0.110	0.146	0.181	0.215	0.249	0.281	0.312
.8	0.035	0.069	0.104	0.138	0.170	0.203	0.235	0.265	0.294
10.0	0.033	0.065	0.098	0.130	0.161	0.192	0.221	0.250	0.278
.2	0.031	0.061	0.092	0.123	0.152	0.181	0.209	0.237	0.262
.4	0.029	0.058	0.087	0.116	0.144	0.171	0.198	0.224	0.248
.6	0.027	0.055	0.082	0.109	0.135	0.162	0.187	0.212	0.234
.8	0.026	0.052	0.078	0.103	0.128	0.153	0.177	0.200	0.222
11.0	0.024	0.049	0.074	0.097	0.121	0.145	0.167	0.189	0.210
.2	0.023	0.047	0.070	0.092	0.115	0.137	0.158	0.179	0.199
.4	0.022	0.044	0.066	0.087	0.109	0.129	0.150	0.169	0.188
.6	0.021	0.042	0.062	0.083	0.103	0.122	0.142	0.160	0.178
.8	0.020	0.039	0.059	0.078	0.097	0.116	0.134	0.152	0.169
12.0	0.019	0.037	0.056	0.074	0.092	0.110	0.127	0.144	0.160
.2	0.018	0.035	0.053	0.070	0.087	0.104	0.120	0.136	0.152
.4	0.017	0.034	0.050	0.067	0.083	0.099	0.114	0.129	0.144
.6	0.016	0.032	0.047	0.063	0.078	0.094	0.108	0.122	0.137
.8	0.015	0.030	0.045	0.060	0.074	0.089	0.103	0.116	0.130
13.0	0.015	0.028	0.043	0.057	0.070	0.084	0.098	0.110	0.123
.2	0.014	0.027	0.041	0.054	0.067	0.080	0.093	0.105	0.117
.4	0.013	0.025	0.039	0.051	0.064	0.076	0.088	0.100	0.111
.6	0.012	0.024	0.037	0.049	0.061	0.072	0.084	0.095	0.105
.8	0.012	0.023	0.035	0.046	0.058	0.068	0.079	0.090	0.100
14.0	0.011	0.022	0.033	0.044	0.055	0.065	0.075	0.085	0.095

Capillardepression in Barometern.

Röhrendurchmesser in Millimetern.	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
8.0	0.551	0.594	0.635	0.673	0.707	0.738	0.766	0.790	
.2	0.518	0.559	0.598	0.634	0.666	0.696	0.723	0.746	
.4	0.487	0.526	0.563	0.597	0.628	0.657	0.682	0.705	
.6	0.459	0.495	0.530	0.563	0.592	0.620	0.644	0.666	
.8	0.432	0.467	0.500	0.531	0.559	0.585	0.609	0.630	
9.0	0.407	0.441	0.472	0.501	0.528	0.552	0.575	0.596	
.2	0.384	0.416	0.445	0.473	0.499	0.522	0.544	0.563	
.4	0.362	0.392	0.420	0.447	0.470	0.494	0.514	0.532	
.6	0.342	0.370	0.397	0.422	0.445	0.467	0.486	0.504	
.8	0.323	0.349	0.375	0.399	0.421	0.442	0.460	0.477	
10.0	0.305	0.330	0.354	0.377	0.398	0.418	0.436	0.452	
.2	0.288	0.312	0.335	0.356	0.376	0.395	0.412	0.428	
.4	0.272	0.295	0.317	0.337	0.356	0.374	0.390	0.405	0.418
.6	0.258	0.279	0.300	0.319	0.337	0.354	0.369	0.384	0.396
.8	0.244	0.264	0.284	0.302	0.319	0.336	0.350	0.364	0.376
11.0	0.231	0.250	0.269	0.286	0.302	0.318	0.332	0.345	0.356
.2	0.218	0.237	0.255	0.271	0.287	0.301	0.315	0.327	0.338
.4	0.207	0.225	0.241	0.257	0.272	0.286	0.299	0.310	0.320
.6	0.196	0.213	0.228	0.243	0.257	0.271	0.283	0.294	0.304
.8	0.186	0.202	0.216	0.231	0.244	0.257	0.268	0.279	0.288
12.0	0.176	0.191	0.205	0.219	0.231	0.243	0.254	0.264	0.273
.2	0.167	0.181	0.195	0.208	0.219	0.231	0.241	0.251	0.259
.4	0.158	0.172	0.185	0.197	0.208	0.219	0.229	0.238	0.246
.6	0.150	0.163	0.175	0.187	0.197	0.208	0.217	0.226	0.233
.8	0.142	0.154	0.166	0.177	0.187	0.197	0.206	0.214	0.221
13.0	0.135	0.146	0.158	0.168	0.178	0.187	0.196	0.203	0.210
.2	0.128	0.139	0.150	0.160	0.169	0.178	0.186	0.193	0.200
.4	0.122	0.132	0.142	0.152	0.161	0.169	0.177	0.183	0.190
.6	0.116	0.126	0.135	0.144	0.153	0.160	0.168	0.174	0.180
.8	0.110	0.120	0.128	0.137	0.145	0.152	0.160	0.166	0.171
14.0	0.105	0.114	0.122	0.130	0.138	0.145	0.152	0.158	0.163

Tafel zur Bestimmung der

Röhrendurchmesser in Millimetern.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
14.0	0.011	0.022	0.033	0.044	0.055	0.065	0.075	0.085	0.095
.2	0.010	0.021	0.031	0.041	0.052	0.062	0.071	0.081	0.090
.4	0.010	0.020	0.029	0.039	0.049	0.058	0.067	0.076	0.085
.6	0.009	0.018	0.027	0.037	0.046	0.054	0.063	0.072	0.081
.8	0.008	0.017	0.025	0.034	0.043	0.051	0.060	0.068	0.076
15.0	0.007	0.016	0.024	0.032	0.040	0.048	0.056	0.064	0.072
.2	0.006	0.014	0.022	0 030	0.038	0.046	0.053	0.061	0.068
.4	0.005	0.013	0.021	0.028	0.036	0.043	0.050	0.057	0.064
.6	0.005	0.012	0 019	0.027	0.034	0 041	0.048	0.054	0.061
.8	0.004	0.011	0.018	0.025	0.032	0.039	0.046	0.052	0.058
16.0	0.003	0.010	0.017	0.024	0.031	0.037	0.043	0.049	0.055
.2	0.002	0.009	0.016	0.023	0.029	0.035	0.041	0.047	0.053
.4	0.002	0.009	0.015	0.021	0.027	0.033	0.039	0.045	0.051
.6	0.002	0.008	0.014	0.020	0.026	0.031	0.037	0.043	0.049
.8	0.001	0.007	0.013	0.019	0.024	0.029	0.035	0.041	0.046
17.0	0.001	0.006	0.012	0.018	0.023	0.028	0.033	0.038	0.043
.2	0.001	0.006	0 011	0.016	0.021	0.026	0.031	0.036	0.041
.4		0.005	0.010	0.015	0.020	0.024	0.029	0.034	0.039
.6		0.004	0.009	0.014	0.019	0.023	0.028	0.032	0.037
.8		0.004	0.009	0.013	0.018	0.022	0.026	0.031	0.035
18.0		0.003	0.008	0.012	0.017	0.021	0.025	0.029	0.033
.2		0.003	0.007	0.011	0.016	0.020	0.024	0.028	0 032
.4		0.003	0.007	0.011	0.015	0.019	0 022	0.026	0.030
.6		0.002	0.006	0.010	0.014	0.018	0.021	0.025	0.028
.8		0.002	0.005	0.009	0.013	0.017	0.020	0.023	0.026
19.0		0.001	0.005	0.009	0.013	0.016	0.019	0.022	0.025
.2		0.001	0.004	0.008	0 012	0.015	0.018	0.021	0.024
.4		0.001	0.004	0.008	0.012	0.015	0.017	0.020	0.023
.6			0.003	0.007	0.011	0.014	0.016	0.019	0.022
.8			0.003	0.007	0.011	0.014	0.016	00.18	0.021
20.0			0.003	0.007	0.010	0.013	0.015	0.018	0.020

Capillardepression in Barometern.

Röhrendurchmesser in Millimetern.	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
14.0	0.105	0.114	0.122	0.130	0.138	0.145	0.152	0.158	0.163
.2	0.099	0.108	0.116	0.124	0.131	0.138	0.144	0.150	0.155
.4	0.094	0.102	0.110	0.117	0.124	0.131	0.137	0.142	0.147
.6	0.089	0.097	0.104	0.111	0.118	0.124	0.130	0.135	0.140
.8	0.084	0.092	0.009	0.105	0.112	0.118	0.123	0.128	0.132
15.0	0.080	0.087	0.094	0.100	0.106	0.111	0.116	0.121	0.125
.2	0.075	0.082	0.089	0.095	0.100	0.105	0.110	0.114	0.118
.4	0.071	0.077	0 084	0.090	0.095	0.100	1.104	0.108	0.111
.6	0.067	0.073	0.079	0.085	0 090	0.095	0.099	0.102	0.105
.8	0.064	0.070	0.075	0.081	0.086	0.090	0.094	0.097	0.100
16.0	0.061	0.067	0.072	0.077	0.082	0.086	0.090	0.093	0.096
.2	0.059	0.064	0.069	0.074	0.078	0.082	0.085	0.088	0.091
.4	0 056	0.061	0.066	0.070	0.074	0 078	0.081	0.084	0.087
.6	0.054	0.058	0.062	0.066	0 070	0.074	0.077	0.080	0.082
.8	0.051	0.055	0.059	0.063	0.066	0.070	0.073	0.076	0.078
17.0	0.048	0.052	0.056	0.060	0.063	0.066	0.069	0.072	0 074
.2	0.045	0.049	0.053	0.057	0.060	0.063	0.066	0.068	0.070
.4	0.043	0.047	0.051	0.054	0.057	0.060	0.063	0.065	0.067
.6	0.041	0.045	0.048	0.051	0.054	0.057	0.060	0.062	0.064
.8	0.039	0.043	0.046	0.049	0.052	0.054	0 057	0.059	0.061
18.0	0.037	0.041	0.044	0.047	0.049	0.051	0.054	0.056	0.058
.2	0.035	0.038	0.041	0.044	0.046	0.049	0.051	0.053	0.055
.4	0.033	0.036	0.039	0.042	0.044	0.046	0.048	0.050	0.052
.6	0.031	0.034	0.037	0.040	0.042	0.044	0.046	0.048	0.049
.8	0.029	0.032	0.035	0.038	0.040	0.042	0.044	0.046	0.047
19.0	0.028	0.031	0.033	0.036	0.038	0.040	0.042	0.044	0.045
.2	0.027	0.029	0.032	0.034	0.036	0.038	0.040	0.042	0.043
.4	0.026	0.028	0.030	0.032	0.034	0.036	0.038	0.039	0.040
.6	0.024	0.026	0.028	0.030	0.032	0.034	0.036	0.037	0.038
.8	0.023	0.025	0.027	0.029	0.031	0.033	0.034	0.035	0.036
20.0	0.022	0.024	0.026	0.028	0.029	0.031	0.032	0.033	0.034

Ueber die dreiseitige Pyramide.

Vom Herausgeber.

Wenn in der dreiseitigen Pyramide $SABC$ Taf. IV. Fig. I die in der Spitze S zusammenstossenden Kanten SA, SB, S respective durch a, b, c und die von diesen Kanten eingeschl senen Winkel durch (ab), (bc), (ca), die Seitenflächen ASB, BS CSA aber durch $\Delta_{a,b}$, $\Delta_{b,c}$, $\Delta_{c,a}$, und die Seitenfläche AB durch Δ bezeichnet werden, so ist bekanntlich:

$$\Delta_{a,b} = \tfrac{1}{2}ab\sin(ab),$$
$$\Delta_{b,c} = \tfrac{1}{2}bc\sin(bc),$$
$$\Delta_{c,a} = \tfrac{1}{2}ca\sin(ca);$$

und wenn wir noch die Kanten AB, BC, CA durch x, y, z zeichnen, so ist:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab),$$
$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(bc),$$
$$z^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(ca).$$

Bezeichnen nun u und v respective die Projection der Seite auf die Seite AB und die Höhe des Dreiecks ABC für C Spitze und AB als Grundlinie, so ist

$$u^2 + v^2 = z^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(ca),$$
$$(x-u)^2 + v^2 = y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(bc);$$

also, wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt:

$$x^2 - 2xu = b^2 - a^2 - 2bc\cos(bc) + 2ca\cos(ca),$$

und folglich, wenn man

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab)$$

einführt:

$$xu = a^2 - ab\cos(ab) + bc\cos(bc) - ca\cos(ca),$$

also

$$u = \frac{a^2 - ab\cos(ab) + bc\cos(bc) - ca\cos(ca)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab)}}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$v^2 = z^2 - u^2$$

ist, so erhält man, wenn man für x und u ihre Werthe aus dem Obigen einführt, nach einigen leichten Verwandlungen die folgende Gleichung:

$$\{a^2+b^2-2ab\cos(ab)\}v^2$$

$$=a^2b^2\sin(ab)^2+b^2c^2\sin(bc)^2+c^2a^2\sin(ca)^2$$

$$-2abc\left\{\begin{array}{l} a[\cos(bc)-\cos(ab)\cos(ca)] \\ +b[\cos(ca)-\cos(bc)\cos(ab)] \\ +c[\cos(ab)-\cos(ca)\cos(bc)] \end{array}\right\}.$$

Weil aber

$$\{a^2+b^2-2ab\cos(ab)\}v^2=x^2v^2=4\Delta^2$$

und

$$a^2b^2\sin(ab)^2=4\Delta_{a,\,b}{}^2,$$

$$b^2c^2\sin(bc)^2=4\Delta_{b,\,c}{}^2,$$

$$c^2a^2\sin(ca)^2=4\Delta_{c,\,a}{}^2$$

ist, so ist

$$\Delta^2=\Delta_{a,\,b}{}^2+\Delta_{b,\,c}{}^2+\Delta_{c,\,a}{}^2$$

$$-\tfrac{1}{2}abc\left\{\begin{array}{l} a[\cos(bc)-\cos(ab)\cos(ca)] \\ +b[\cos(ca)-\cos(bc)\cos(ab)] \\ +c[\cos(ab)-\cos(ca)\cos(bc)] \end{array}\right\}.$$

Bezeichnen wir jetzt die an den Kanten SA, SB, SC liegenden Neigungswinkel der in denselben zusammenstossenden Seitenflächen der Pyramide respective durch A, B, C; so ist nach den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos(bc)-\cos(ab)\cos(ca)=\sin(ab)\sin(ca)\cos A,$$

$$\cos(ca)-\cos(bc)\cos(ab)=\sin(bc)\sin(ab)\cos B,$$

$$\cos(ab)-\cos(ca)\cos(bc)=\sin(ca)\sin(bc)\cos C;$$

also nach dem Obigen:

$$\cos(bc)-\cos(ab)\cos(ca)=\frac{4\Delta_{a,\,b}\Delta_{c,\,a}}{a^2bc},$$

$$\cos(ca)-\cos(bc)\cos(ab)=\frac{4\Delta_{b,\,c}\Delta_{a,\,b}}{ab^2c},$$

$$\cos(ab)-\cos(ca)\cos(bc)=\frac{4\Delta_{c,\,a}\Delta_{b,\,c}}{abc^2}.$$

Substituirt man dies in den obigen Ausdruck für Δ^2, so erhält man

$$\Delta^2 = \Delta_{a,b}^2 + \Delta_{b,c}^2 + \Delta_{c,a}^2$$
$$-2\Delta_{a,b}\Delta_{c,a}\cos A - 2\Delta_{b,c}\Delta_{a,b}\cos B - 2\Delta_{c,a}\Delta_{b,c}\cos C.$$

Einen andern Beweis dieser merkwürdigen Formel findet man z. B. in Crelle's: „Sammlung mathematischer Aufsätze. Erster Band. Berlin. 1821. S. 108.", welcher auf den bekannten Satz gegründet ist, dass die (algebraische) Summe der drei Projectionen dreier Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide auf der vierten Seitenfläche (oder Grundfläche) dieser vierten Seitenfläche gleich ist. Vielleicht ist auch die obige Entwickelung nicht ganz ohne Interesse und für den Unterricht geeignet.

Für $A = B = C = 90^0$ erhält man den bekannten, zuerst von Tinseau (Mém. présentés. T. IX.) gefundenen Satz:

$$\Delta^2 = \Delta_{a,b}^2 + \Delta_{b,c}^2 + \Delta_{c,a}^2,$$

welcher bekanntlich als ein Analogon des pythagoräischen Lehrsatzes betrachtet werden kann.

Ueber die Ellipse.

Von dem Herausgeber.

Zwischen der grossen und kleinen Halbaxe a und b einer Ellipse, dem von einem Brennpunkte derselben nach einem gewissen Punkte in ihr gezogenen Vector v und dem von demselben Brennpunkte auf die durch den in Rede stehenden Punkt gezogene Berührende der Ellipse gefällten Perpendikel q existirt eine bemerkenswerthe Beziehung, die sich auf folgende Art entwickeln lässt.

Der gegebene Punkt der Ellipse sei (xy), so ist, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die laufenden Coordinaten bezeichnen, bekanntlich

$$\frac{x\mathfrak{x}}{a^2} + \frac{y\mathfrak{y}}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem Punkte (xy). Bezeichnen nun e, 0, wo e soll positiv und negativ sein können, die Coordinaten eines der beiden Brennpunkte der Ellipse, von welchem das Perpendikel q auf die durch die vorstehende Gleichung charakterisirte Berührende gefällt worden ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$q^2 = \frac{\left(\frac{ex}{a^2}-1\right)^2}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}} = \frac{b^4(ex-a^2)^2}{a^4y^2+b^4x^2}.$$

er ist für den von dem in Rede stehenden Brennpunkte $(e0)$ dem Punkte (xy) gezogenen Vector v der Ellipse:

$$v^2=(e-x)^2+y^2.$$

den drei Gleichungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

$$v^2=(e-x)^2+y^2,$$

$$b^4(ex-a^2)^2=q^2(a^4y^2+b^4x^2)$$

n wir nun die Coordinaten x, y ganz eliminiren, um die gete Relation zwischen den Grössen a, b, v, q zu finden, wonan zu beachten hat, dass zwischen a, b, e bekanntlich die hung

$$e^2=a^2-b^2$$

findet.

Weil wegen der ersten der drei obigen Gleichungen

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

so ist

$$a^4y^2+b^4x^2=a^2b^2(a^2-x^2)+b^4x^2$$
$$=b^2\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}=b^2(a^4-e^2x^2);$$

lie dritte Gleichung ist also:

$$b^4(a^2-ex)(a^2-ex)=b^2q^2(a^4-e^2x^2)$$
$$=b^2q^2(a^2-ex)(a^2+ex);$$

as sich

$$b^2(a^2-ex)=q^2(a^2+ex),$$

$$a^2(b^2-q^2)=ex(b^2+q^2),$$

h

$$x=\frac{a^2}{e}\cdot\frac{b^2-q^2}{b^2+q^2},$$

und hieraus

$$e-x=\frac{e^2(b^2+q^2)-a^2(b^2-q^2)}{e(b^2+q^2)},\quad a^2-x^2=a^2\frac{e^2(b^2+q^2)^2-a^2(b^2-q^2)^2}{e^2(b^2+q^2)^2};$$

also

$$y^2=\frac{b^2}{e^2}\cdot\frac{e^2(b^2+q^2)^2-a^2(b^2-q^2)^2}{(b^2+q^2)^2}$$

ergiebt. Führt man nun diese Werthe von $e-x$ und y^2 in die zweite der drei obigen Hauptgleichungen ein, so wird dieselbe:

$$v^2=\frac{b^2\{e^2(b^2+q^2)^2-a^2(b^2-q^2)^2\}+\{e^2(b^2+q^2)-a^2(b^2-q^2)\}^2}{e^2(b^2+q^2)^2}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist:

$$e^2(b^2+q^2)^2(b^2+e^2)+a^2(b^2-q^2)^2(a^2-b^2)$$
$$-2a^2e^2(b^2+q^2)(b^2-q^2)$$
$$=a^2e^2\{(b^2+q^2)^2+(b^2-q^2)^2-2(b^2+q^2)(b^2-q^2)\}$$
$$=a^2e^2\{(b^2+q^2)-(b^2-q^2)\}^2=4a^2e^2q^4;$$

also ist nach dem Obigen:

$$v^2=\frac{4a^2q^4}{(b^2+q^2)^2},$$

welches zu den in mehrfacher Beziehung bemerkenswerthen einfachen Relationen:

$$v=\frac{2aq^2}{b^2+q^2},\quad a=\frac{b^2+q^2}{2q^2}v,\quad b=\frac{q}{v}\sqrt{2av-v^2}$$

führt.

Aehnliche Untersuchungen über die Parabel und Hyperbel anzustellen, überlasse ich dem Leser, glaube aber, dass die Entwickelung dieser Relationen zwischen grosser und kleiner Halbaxe (oder Parameter), Radius-Vector und Perpendikel von dem Brennpunkte auf die Berührende zweckmässig als Stoff zu Aufgaben in der analytischen Geometrie für Anfänger benutzt werden kann, welches auch die hauptsächlichste Veranlassung zur vorstehenden Mittheilung ist.

Zur sphärischen Astronomie.

Von dem Herausgeber.

In dem Moment, wo ein Stern eine der Polhöhe des Beobachtungsorts gleiche Höhe erreicht, finden zwischen seiner Declination, seinem Stundenwinkel, seinem Azimuth und der Polhöhe des Beobachtungsorts einige einfache Relationen Statt, die ich hier entwickeln will.

Zwischen der Declination δ, dem Stundenwinkel σ, der Höhe h eines Sterns und der Polhöhe φ hat man bekanntlich *) die Gleichung:

$$1)\quad \sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma\cos\delta\cos\varphi.$$

Ist nun die Höhe des Sterns der Polhöhe gleich, also $h=\varphi$, so wird diese Gleichung:

$$\sin\varphi = \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma\cos\delta\cos\varphi,$$

also

$$\cos\sigma\cos\delta\cos\varphi = (1-\sin\delta)\sin\varphi = 2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2\sin\varphi$$

oder

$$2\cos\sigma\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)\cos\varphi = 2\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2\sin\varphi,$$

folglich:

$$2)\quad \cos\sigma = \operatorname{tang}(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)\operatorname{tang}\varphi.$$

Ferner hat man bekanntlich **) zwischen der Declination δ, dem Azimuth ω, der Höhe h und der Polhöhe φ die folgende Gleichung:

$$3)\quad \sin\delta = \sin h\sin\varphi - \cos\omega\cos h\cos\varphi,$$

also für $h=\varphi$:

$$\sin\delta = \sin\varphi^2 - \cos\omega\cos\varphi^2,$$

woraus sich

$$\cos\omega = \frac{\sin\varphi^2-\sin\delta}{\cos\varphi^2}$$

ergiebt. Also ist

$$1-\cos\omega = \frac{\cos\varphi^2-\sin\varphi^2+\sin\delta}{\cos\varphi^2} = \frac{\cos2\varphi+\sin\delta}{\cos\varphi^2},$$

folglich

$$2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{2\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta-\varphi)\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta+\varphi)}{\cos\varphi^2},$$

woraus sich

---

*) Archiv. Thl. VIII. S. 90.

**) A. a. O.

$$4)\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega=\frac{\sqrt{\cos(45^0-\frac{1}{2}\delta-\varphi)\cos(45^0-\frac{1}{2}\delta+\varphi)}}{\cos\varphi}$$

ergiebt. Auch ist

$$1+\cos\omega=\frac{\cos\varphi^2+\sin\varphi^2-\sin\delta}{\cos\varphi^2}=\frac{1-\sin\delta}{\cos\varphi^2},$$

also

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega^2=\frac{2\sin(45^0-\frac{1}{2}\delta)^2}{\cos\varphi^2},$$

folglich

$$5)\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega=\pm\frac{\sin(45^0-\frac{1}{2}\delta)}{\cos\varphi}.$$

Aus der Gleichung

$$\cos\omega=\frac{\sin\varphi^2-\sin\delta}{\cos\varphi^2}$$

ergiebt sich auch

$$\cos\omega=\operatorname{tang}\varphi^2-\sin\delta\sec\varphi^2=(1-\sin\delta)\operatorname{tang}\varphi^2-\sin\delta,$$

folglich

$$\operatorname{tang}\varphi^2=\frac{\sin\delta+\cos\omega}{1-\sin\delta}.$$

Aus 2) erhält man:

$$\operatorname{tang}\varphi=\cos\sigma\cot(45^0-\tfrac{1}{2}\delta).$$

Also ist

$$\cos\sigma^2\cot(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2=\frac{\sin\delta+\cos\omega}{1-\sin\delta}$$

$$=\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\omega-\delta)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\omega+\delta)\}}{\sin(45^0-\frac{1}{2}\delta)^2},$$

woraus sich die Relation:

$$6)\quad \cos\sigma^2\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2=\sin\{45^0-\tfrac{1}{2}(\omega-\delta)\}\cos\{45^0-\tfrac{1}{2}(\omega+\delta)\}$$

ergiebt. Auch ist

$$\cos\omega=2\cos\sigma^2\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2-\sin\delta,$$

$$1-\cos\omega=1+\sin\delta-2\cos\sigma^2\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega^2=(1-\cos\sigma^2)\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2=\sin\sigma^2\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta)^2;$$

also

$$7)\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega=\pm\sin\sigma\cos(45^0-\tfrac{1}{2}\delta).$$

In dem **Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Mai. 1853. p. 168.** beweiset Herr **Besgé** eine bemerkenswerthe Transformation eines bestimmten Integrals. Herr **Besge** sagt:

On m'a demandé la démonstration rigoureuse que je dis avoir de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u du.$$

La voici en peu de mots. Dans l'intégrale placée au premier membre, je groupe les éléments relatifs aux valeurs de la variable à égale distance des deux limites, moyennant quoi cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\, du.$$

Puis je fais $\sin 2u = \cos^2 x$, d'où $\cos 2u du = -\sin x \cos x dx$; et j'observe que u variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, x varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0 Je trouve ainsi notre intégrale égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \frac{\sin x \cos x dx}{\cos 2u} (\cos u + \sin u).$$

Mais

$$(\cos u + \sin u)^2 = 1 + \sin 2u = 1 + \cos^2 x;$$

donc

$$\cos u + \sin u = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

D'un autre côté

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \cos^4 x} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

L'intégrale dont nous nous occupons est donc finalement égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x dx;$$

e qu'il fallait démontrer.

In den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Band IX. Jahrgang 1852. II. Heft. giebt Herr Haidinger einige bemerkenswerthe Notizen über die niedrigste Höhe der Gewitterwolken. Zuerst führt er Folgendes an: „Für die tiefste Stellung der Gewitterwolken in Paris fand Arago aus den bisherigen Beobachtungen von De l'Isle 1400 Metres. Tiefergehende nach Le Gentil in der heissen Zone, nach dessen Beobachtungen in Isle de France, Pondichery und Manilla, geben die gewöhnliche Höhe des Herdes der Gewitter auf 900 Metres.“

„Die Tobolsker Beobachtungen geben einen Fall, wo die Gewitterwolken nicht höher streichen konnten als 214 Metres
einen zweiten, wo u. s. w. . . . . 292 „
sechs Fälle, wo die Höhen lagen zwischen . 400 und 600 „
drei Fälle, wo die Höhen lagen zwischen . . 600 „ 800 „
fünf Fälle, wo die Höhen beträchtlicher waren als 800 „

Diesen Angaben fügt Herr Haidinger einige Angaben über in Admont am 27. August 1827 und in Gratz am 19. Juli 1826 beobachtete Gewitter bei, wo sich die Höhe der Gewitterwolken messen liess. Diesen Angaben entnehme ich Folgendes. Bei dem Gewitter in Admont am 26. August 1827 schlug der Blitz während des Gottesdienstes in das Chor der Stiftskirche und tödtete zwei junge Geistliche, wobei erwähnt wurde, dass der elektrische Strahl augenscheinlich zuerst die Schnallen rückwärts an der Halsbinde getroffen hatte und dadurch Veranlassung zu dem unglücklichen Ausgange gab. Hier war die Wolke, aus welcher der Blitz fuhr, nicht dicker als vier Klafter und nicht weiter vom Boden entfernt als vierzehn Klafter = 84 Fuss, also in einer Schrecken erregenden Nähe bei der Erde.

Das Gewitter zu Gratz am 19. Juli 1826 dauerte nur etwa eine Stunde, dabei folgte aber Blitz auf Blitz, im Ganzen ohne allzuheftigen Donner. Es schlug aber neunzehn Mal ein und zündete darunter fünf Mal. Die zündenden Blitze fielen mit lebhaftem Krachen. Hier liess sich die Höhe der oberen Oberfläche der Wolke über der Fläche auf etwa . . . . 320 Fuss
die untere Oberfläche der Wolke auf etwa . . . . . 210 „
die Dicke der Wolkenschicht also auf . . . . 110 „
schätzen.

Die Mittheilung mehrerer solcher und ähnlicher Notizen wäre zu wünschen.

XXVII.

Cauchy's Lehrsatz über die Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen gegebenen Gränzen.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*,

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Der Lehrsatz von Sturm hat bekanntlich zum Zweck, die An-ahl reeller, von einander verschiedener Wurzeln einer algebrai-chen Gleichung, entweder im Allgemeinen oder zwischen zwei estimmten (reellen) Gränzen liegend, kennen zu lernen. Was nun turm's Satz für die reellen Wurzeln leistet, das thut ein Lehr-atz von Cauchy für die imaginären. Ich kenne denselben übrigens loss aus einer Abhandlung Moigno's in Liouville's Journal 1840)*). Wie aus den meisten Schriften über die Bestimmung der naginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die in der letzten eit erschienen sind, hervorzugehen scheint, ist dieser Lehrsatz enig kekannt, und ich glaube daher eine nicht ganz unnöthige rbeit zu thun, wenn ich im Folgenden jenen Lehrsatz wieder Erinnerung bringe. Ich habe ihn dabei vollkommen bestimmt efasst, bestimmter als diess Moigno gethan, während der Rech-

---

*) Die Darstellung von Moigno ist auch im Archiv Thl. I. No. . S. 19. zu finden. Es wird die Leser freuen, diesen hochwichtigen egenstand, dessen weitere Verbreitung im höchsten Grade zu wünschen t, von einem so ausgezeichneten Mathematiker wie dem Herrn Verfas-er des obigen Aufsatzes einer neuen Behandlung unterworfen zu sehen, ofür ich, und gewiss jeder Leser mit mir, demselben zu besonderem anke verpflichtet bin. G.

nungsmechanismus, der übrigens dem beim Sturm'schen Satze ganz analog ist, von Moigno herrührt. Hinsichtlich einiger weniger Ausdrücke, die etwa vorkommen, muss ich u. A. auf die Darstellung des Sturm'schen Satzes in meinen „Grundzügen der algebraischen Analysis" (S. 152—159) verweisen. Was die näherungsweise Berechnung der imaginären Wurzeln einer (algebraischen) Gleichung selbst anbelangt, so hat Herr Simon Spitzer, Privatdozent am k. k. polytechnischen Institute in Wien, in seiner „Allgemeinen Auflösung der Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten" (Wien 1851) bereits das Horner'sche Verfahren darauf angewendet und in dieser Beziehung, wenn auch noch nicht Alles zum Abschluss gebracht, so doch die Hauptarbeit vollendet. Nach diesen kurzen Bemerkungen wende ich mich nun zur Darstellung des Satzes selbst.

§. 1.

Seien U und V zwei ganze, stetige Funktionen der Unbekannten x und y, die auf irgend eine beliebige Weise sonst mögen erhalten worden sein; sei ferner i die imaginäre Einheit ($\sqrt{-1}$) und

$$U+Vi=R(\cos T+i\sin T). \tag{1}$$

Denken wir uns nun weiter in einer Ebene ein rechtwinkliches Koordinatensystem der x und y, so werden zwei beliebige Werthe von x und y immer als die Koordinaten eines bestimmten Punktes in dieser Ebene angesehen werden können. Zeichnen wir nun in dieser Ebene irgend eine geschlossene Kurve (die entweder aus geraden oder aus krummen Linien zusammengesetzt sein kann) und lassen einen beweglichen Punkt den Umfang dieser Kurve durchlaufen, indem er, von einem (willkührlichen) Anfangspunkte ausgehend, diesen Umfang dergestalt durchläuft, dass seine Drehung dieselbe sei, als wenn man die positive Axe der x gegen die positive Axe der y hin dreht, so wollen wir in (1) den Grössen x und y bloss diejenigen Werthe uns beigelegt denken, welche die Koordinaten der auf einander folgenden Lagen des beweglichen Punktes angeben. Dabei wollen wir T als eine kontinuirliche (d. h. also sich stetig oder durch unendlich kleine Stufen ändernde) Funktion von x und y ansehen. Letztere Annahme ist allerdings willkührlich, da man T um $\pm 2n\pi$ sich ändern lassen kann (n eine ganze Zahl), ohne dass die Grösse $\cos T+i\sin T$ sich ändert. Unsern folgenden Betrachtungen liegt nun aber wesentlich dieses Auffassen von T als einer stetig sich ändernden Funktion zu Grunde, und namentlich wird diese Auffassung im Endresultate nochmals deutlich hervortreten.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\operatorname{tg} T = \frac{V}{U}, \quad T = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right) \pm n\pi; \qquad (2)$$

wo n eine positive ganze Zahl oder Null ist, und das Zeichen $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = a)$ die bekannte Bedeutung hat. (Siehe „Grundzüge etc." Einleitung S. VII.)

Sei nun A der Punkt der geschlossenen Kurve, von dem aus der bewegliche Punkt seinen Lauf beginnt; U_0, V_0, T_0 die Werthe von U, V und T in diesem Punkte; U, V, T die Werthe dieser Grössen in einem (beliebigen) Punkte M der Kurve, so ist nach (2):

$$T_0 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V_0}{U_0}\right) \pm n_0\pi, \quad T = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right) \pm n\pi; \qquad (3)$$

wo n_0 ebenfalls eine ganze Zahl ist. Aus (3) folgt offenbar:

$$T - T_0 - \left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V_0}{U_0}\right)\right] = p\pi, \qquad (4)$$

wo p eine (positive oder negative) ganze Zahl ist, Null mit inbegriffen.

Lassen wir nun den Bogen der durchlaufenen Kurve in einem bestimmten Punkte anfangen; sei s_0 der Bogen bis zu A, s bis zu M, so wird man offenbar U_0, V_0, also auch T_0, als Funktionen von s_0; allgemein U, V, also auch T, als Funktionen von s ansehen können, und zwar werden, unserer Annahme nach, diese Funktionen kontinuirlich sein. Ist nun s wenig verschieden von s_0, so muss auch T wenig verschieden von T_0 sein, so wie $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right)$ von $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V_0}{U_0}\right)$; mithin kann die zweite Seite der Gleichung (4) bloss $p = 0$ geben, und für ein sehr kleines $s - s_0$ ist also

$$T - T_0 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V_0}{U_0}\right). \qquad (5)$$

Wächst nun, bei fortdauernder Bewegung des die Kurve durchlaufenden Punktes, s, so wird auch T sich und zwar stetig ändern, wie diess auch mit $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right)$ geschieht. Die Gleichung (5) wird also gelten, so lange die Stetigkeit von $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{V}{U}\right)$ besteht. Diese hört aber plötzlich auf, wenn $\frac{V}{U}$ durch ∞ geht und dabei sein Zeichen wechselt. Geht nämlich dabei $\frac{V}{U}$ von $-$ zu $+$

über, so springt $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)$ plötzlich von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ über, ändert sich also unstetig und zwar um π; geht dagegen $\frac{V}{U}$ von $+$ zu $-$, so springt $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)$ von $+\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$ und ändert sich also abermals plötzlich um π. Sobald man also an die erste Stelle gelangt ist, bei der $\frac{V}{U}$ durch ∞ geht und dabei sein Zeichen wechselt*), darf die Gleichung (5) nicht mehr als zu Recht bestehend angenommen werden, während sie galt von A an bis zu diesem Punkte (etwa B). Von B an zunächst nun wird man zu (4) zurückkehren müssen, und man übersieht leicht, dass T sich nur dann, von A aus bis über B, stetig ändert, wenn man von B an setzt:

1) wenn $\frac{V}{U}$ von $-$ zu $+$ übergeht:

$$T-T_0=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)-\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right)-\pi;$$

2) wenn $\frac{V}{U}$ von $+$ zu $-$ übergeht:

$$T-T_0=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)-\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right)+\pi.$$

Man kann diess auch offenbar so ausdrücken: Sei s_1 der Werth von s, für den $\frac{V}{U}$ das erste Mal, von $s=s_0$ an, durch ∞ geht und sein Zeichen wechselt, so ist

von $s=s_0$ bis $s=s_1$:

$$T-T_0=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)-\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right);$$

von $s=s_1$ an:

$$T-T_0=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V}{U}\right)-\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right)\pm\pi; \qquad (6)$$

je nachdem, ob der Durchgang von $+$ zu $-$, oder von $-$ zu $+$ geschieht.

Gesetzt nun, im weitern Verlauf der Bewegung gehe $\frac{V}{U}$ für $s=s_2$ zum zweiten Male durch ∞ und wechsele dabei sein Zeichen, so wird die Gleichung (6) nur gelten von $s=s_1$ bis zu $s=s_2$.

---

*) Ohne den Zeichenwechsel wäre die Stetigkeit nicht unterbrochen.

Dort macht $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V}{U}\right)$ abermals einen Sprung um π, und man übersieht leicht, dass für $s > s_2$ man der zweiten Seite von (6) wird π zufügen müssen, wenn der Durchgang durch ∞ von $+$ zu $-$ geschieht, dagegen π abziehen, wenn er von $-$ zu $+$ vor sich geht.

Fährt man so fort, bis $s = s'$ geworden ist, und ist dabei $\frac{V}{U}$ mehrmals durch ∞ gegangen und hat sein Zeichen gewechselt, und zwar geschah dieser Durchgang n mal von $+$ zu $-$ und n' mal von $-$ zu $+$, so wird man für $s > s'$ setzen müssen:

$$T - T_0 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V}{U}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right) + (n-n')\pi. \quad (7)$$

Bezeichnen wir mit e die Zahl, die angiebt, wie vielmal mehr $\frac{V}{U}$, indem es durch ∞ ging und sein Zeichen wechselte, von $-$ zu $+$ als von $+$ zu $-$ übersprang, während s von s_0 bis s' ging, so ist $n - n' = -e$, also

$$T - T_0 = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V}{U}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right) - e\pi. \quad (7')$$

Lässt man nun den beweglichen Punkt die ganze Kurve durchlaufen und ist s_1 der ganze Umfang, sind U_1, V_1, T_1 die Werthe von U, V, T in diesem Punkt, hat e die so eben angegebene Bedeutung für $s = s_1$, so ist $U_0 = U_1$, $V_0 = V_1$, also

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V_1}{U_1}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{V_0}{U_0}\right),$$

und also ergiebt sich aus (7'):

$$T_1 - T_0 = -e\pi, \quad (8)$$

wo mithin e angiebt, wie vielmal mehr $\frac{V}{U}$, indem es durch ∞ ging und sein Zeichen wechselte, von $-$ zu $+$ als von $+$ zu $-$ übersprang, indem man für x und y bloss die Werthe der Koordinaten der sämmtlichen auf einander folgenden Punkte der geschlossenen Kurve wählte.

Betrachten wir nun die zwei Brüche $\frac{V}{U}$ und $\frac{U}{V}$, so wird der zweite Null, wenn der erste unendlich ist und umgekehrt. Bezeichnet man darum mit e' den Werth für $\frac{U}{V}$, den e für $\frac{V}{U}$ so eben be-

deutete, so wird e' offenbar angeben, wie vielmal mehr, indem $\frac{V}{U}$ durch 0 ging und sein Zeichen wechselte, dieser Wechsel von — zu + als von + zu — geschah; woraus folgt, dass $e+e'$ angiebt, wie vielmal mehr, indem $\frac{V}{U}$ sein Zeichen wechselte, dieser Wechsel von — zu + als von + zu — vor sich ging. Legt man s seinen letzten Werth (s_1 = dem ganzen Umfang, wenn $s_0=0$ wäre) bei, so sind $\frac{V_1}{U_1}$ und $\frac{V_0}{U_0}$ einander gleich, und wenn also $\frac{V}{U}$ von $s=s_0$ bis $s=s_1$ auch sein Zeichen wechselte, so musste dieser Wechsel eben so vielmal von — zu + als von + zu — geschehen, so dass offenbar $e+e'=0$, also $e'=-e$ ist. Vergleicht man diess mit (8), so erhält man folgenden wichtigen Lehrsatz:

„Sind U, V zwei ganze Funktionen von x und y, welche letztere Grössen als rechtwinkliche Koordinaten der Punkte einer geschlossenen Kurve (wie immer zusammengesetzt diese auch sein mag) angesehen werden sollen; ist $U+Vi=R(\cos T+i\sin T)$ und wird T als stetige Funktion von x und y betrachtet; legt man ferner x und y die Werthe aller Koordinaten der auf einander folgenden Punkte der Kurve, von einem bestimmten Punkte A aus bis wieder zu ihm, bei, indem man Sorge hat, die Kurve so zu durchlaufen, dass die Drehung in derselben Richtung vor sich geht, als wenn man von der positiven Axe der x sich gegen die positive Axe der y dreht*); sind endlich T_0 und T_1 die Anfangs- und Endwerthe von T und zeigt e an, wie vielmal mehr dabei der Bruch $\frac{U}{V}$, indem er durch ∞ ging und sein Zeichen wechselte, von — zu + als von + zu — übersprang, so ist

$$T_1-T_0=e\pi.\text{“} \quad (9)$$

§. 2.

Der so eben ausgesprochene interessante Satz gilt im Grunde für alle stetigen Funktionen U und V von x und y, wenn sie auch nicht gerade ganze Funktionen sein sollten.

Seien nun u, v; u', v'; .... eben solche Funktionen von x und y; bedeuten r, t; r', t'; .... dasselbe für diese Funktionen, wie R

---

*) Es ist diese Bestimmung hier zunächst willkührlich, sie ist es aber nicht mehr für das Hauptresultat in §. 3.

und T für U und V, d. h. ist $u+vi=r(\cos t+i\sin t)$, ..., sind t, t', ... ebenfalls stetig und ist endlich

$$U+Vi=(u+vi)(u'+v'i)\ldots\ldots,$$

so ist bekanntlich

$$T=t+t'+\ldots\ldots,$$

also

$$T_1-T_0=t_1-t_0+t'_1-t'_0+\ldots\ldots,$$

wenn t_0, t'_0, ... die Werthe von t, t'. .... für den Ausgangspunkt A; t_1, t'_1, ... diese Werthe für den Endpunkt (wieder A) sind. Bedeuten nun E, e, e', ... wie vielmal mehr die Brüche $\frac{U}{V}, \frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}, \ldots$, indem sie ∞ wurden und ihr Zeichen wechselten, von $-$ zu $+$ als von $+$ zu $-$ übergingen, so folgt aus (9) nun leicht, dass

$$E=e+e'+\ldots\ldots, \tag{10}$$

ein Satz, der in vielen Fällen die Berechnung von E erleichtern wird.

§. 3.

Sei $u=x-\alpha$, $v=y-\beta$, $u'=x-\alpha'$, $v'=y-\beta'$, u. s. w., also

$$U+Vi=[x-\alpha+(y-\beta)i][x-\alpha'+(y-\beta')i]\ldots\ldots \tag{11}$$

so werden sich die Werthe von e, e', ... direkt angeben lassen. Wir wollen nur den ersten betrachten, da die anderen in derselben Weise gefunden werden.

Es ist $\frac{u}{v}=\frac{x-\alpha}{y-\beta}$. Setzt man nun $x-\alpha+(y-\beta)i=r(\cos t+i\sin t)$, so ist $\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\operatorname{cotg} t$, und r und t werden die Polarkoordinaten eines Punktes der gezeichneten Kurve sein, wenn der Pol in den Punkt verlegt ist, dessen rechtwinkliche Koordinaten α und β sind, und dabei die Bewegung des die Kurve durchlaufenden Punktes in der mehr erwähnten Richtung geschieht. So oft nun dabei $\operatorname{cotg} t$ durch ∞ geht, geschieht diess auch bei $\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{u}{v}$. Es ist diess der Fall für $t=180^\circ$ und $t=360^\circ$ (oder 0, wenn man lieber will). t ändert sich stetig. Ist diese Aenderung nun der Art, dass t fortwährend wächst, so wird der Durchgang durch 180° und 360°

höchstens einmal geschehen und dabei wird immer cotg t von zu + überspringen. Ist die Aenderung von t aber der Art, d bei 180° oder 360° ein Schwanken Statt hat, so dass t mehrn 180° oder 360° wird (wenn die Kurve sehr unregelmässige I gungen hätte, wie etwa in Taf. IV. Fig. 13.), so wird beim Zurü gehen von t durch 180° oder 360° allerdings ein Uebergang + zu — Statt finden; allein es ist leicht zu übersehen, dass w t überhaupt über 180° (oder 360°) wegkommen soll, immer e mal mehr der Durchgang von — zu + als von + zu — gescł Wir müssen nun hiebei drei Fälle unterscheiden:

1) Der Punkt (α, β) liegt im Innern der geschlossenen Ku

In diesem Falle muss t die sämmtlichen Werthe von 0 360° durchlaufen, also wird, wie auch immer t schwanken mö im Ganzen ein Durchgang mehr direkt durch 180° und ei direkt durch 360° Statt finden, so dass hier $e=2$, (was auch aus geschlossen wird, dass $t_0=0$, $t_1=2\pi$, also $e=\frac{t_1-t_0}{\pi}=$

2) der Punkt (α, β) liegt im Umfang der geschlossenen Ku

In diesem Falle ist der Spielraum für t nur 180°, und es das Schwanken von t sein, welches es will, es kann nur ein mehr ein direkter Durchgang durch 180° Statt finden. Also ist $e=1$. $(t_0=0,\ t_1=\pi,\ e=\frac{t_1-t_0}{\pi}=1)$.

3) Der Punkt (α, β) liegt ausserhalb der geschlossenen Ku

In diesem Falle wird t entweder nie 360° oder nie 180°; wenn es t das eine oder andere Mal auch wird, so muss es so viel direkt als rückläufig geschehen; also ist hier $e=0$. $(t_0=0,\ t_1=$ $e=\frac{t_1-t_0}{\pi}=0)$.

Dass dasselbe für $e', \ldots.$ Statt hat, liegt klar vor Augen.

Wir schliessen daraus nun folgenden wichtigen Satz:

„Liegen von den Punkten, deren rechtwinkliche Koordina $\alpha, \beta;\ \alpha', \beta';\ \ldots..$ sind, ihrer m im Innern der geschlossenen Ku ihrer m' im Umfange derselben, die übrigen ausserhalb, und is

$$U+Vi=[x-\alpha+(y-\beta)i]\,[x-\alpha'+(y-\beta')i]\ldots..,$$

so ist

$$E=2m+m'\text{“}. \qquad (1$$

Dabei ist zu bemerken, dass, wenn einige der Faktoren $x-\alpha+(y-\beta)i$, $x-\alpha'+(y-\beta')i$, ... einander gleich sein sollten, jeder in m oder m' so vielmal zu rechnen ist, als er vorkommt; so dass wenn die Punkte (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_r, β_r) im Innern, (α', β'), (α'', β''), ... (α^r, β^r) im Umfang, die übrigen ausserhalb liegen und

$$U+Vi=(x-\alpha_1+(y-\beta_1)i)^{c_1}(x-\alpha_2+(y-\beta_2)i)^{c_2}\ldots$$
$$\ldots(x-\alpha_r+(y-\beta_r)i)^{c_r}(x-\alpha'+(y-\beta')i)^{a'}\ldots(x-\alpha^r+(y-\beta^r)i)^{a^r}\ldots,$$

man hat:

$$E=2(c_1+c_2+\ldots+c_r)+a'+a''+\ldots+a^r.$$

Sei $F(z)=0$ eine algebraische Gleichung, $z=x+yi$ und

$$F(x+yi)=U+Vi,$$

so werden $\alpha+\beta i$, $\alpha'+\beta' i$, ..., in Folge von (11), die (imaginären) Wurzeln der Gleichung $F(z)$ sein. Denken wir uns ferner für die geschlossene Kurve ein Rechteck, dessen Seiten parallel den Koordinatenaxen, und sind (in der erwähnten Richtung gegangen) die Koordinaten seiner Eckpunkte: x_0 und y_0, x_1 und y_0, x_1 und y_1, x_0 und y_1, $(x_0<x_1, y_0<y_1)$, so werden die Punkte (α, β), (α', β'), ..., die im Innern des Rechtecks liegen, Wurzeln andeuten, deren reelle Theile zwischen x_0 und x_1, und die imaginären zwischen $y_0 i$ und $y_1 i$ liegen. Durchläuft aber der bewegliche Punkt das Rechteck, so wird, so lange er auf der ersten Seite bleibt, $y=y_0$ sein, während x von x_0 bis x_1 geht; auf der zweiten $x=x_1$, während y von y_0 bis y_1; auf der dritten $y=y_1$, und x von x_1 bis x_0; auf der vierten $x=x_0$, und y von y_1 bis y_0. Bezeichnet man nun mit

E_1 das vielfach erwähnte Mehr des Bruches $\frac{U}{V}$, wenn $y=y_0$ und x geht von x_0 bis x_1;

E_2 das vielfach erwähnte Mehr des Bruches $\frac{U}{V}$, wenn $x=x_1$ und y geht von y_0 bis y_1;

E_3 das vielfach erwähnte Mehr des Bruches $\frac{U}{V}$, wenn $y=y_1$ und x geht von x_1 bis x_0;

E_4 das vielfach erwähnte Mehr des Bruches $\frac{U}{V}$, wenn $x=x_0$ und y geht von y_1 bis y_0;

so ist offenbar

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

wobei man freilich Acht haben muss, dass man nicht in den E
punkten einen Durchgang verliert. Fasst man nun alles Gesa
zusammen, so ergiebt sich der folgende Lehrsatz von Cauchy

„Um zu untersuchen, wie viele imaginäre Wurzeln $\alpha+\beta i$
algebraische Gleichung $F(z)=0$ habe, deren reeller Theil α z
schen x_0 und x_1, der imaginäre β zwischen y_0 und y_1 liege
$< x_1, y_0 < y_1$), vorausgesetzt, dass nicht zugleich $\beta=y_0$ un
zwischen x_0 und x_1, oder $\alpha=x_1$ und β zwischen y_0 und y_1, o
$\beta=y_1$ und α zwischen x_0 und x_1, oder $\alpha=x_0$ und β zwisc
y_0 und y_1 *), sei $F(x+yi)=U+Vi$, und man bestimme nun,
vielmal mehr der Bruch $\frac{U}{V}$, indem er durch ∞ geht und
Zeichen wechselt, er von — zu + als von + zu — überg
und zwar:

a) wenn $y=y_0$ und x geht von x_0 bis zu x_1,
b) „ $x=x_1$ „ y „ „ y_0 „ „ y_1,
c) „ $y=y_1$ „ x „ „ x_1 „ „ x_0,
d) „ $x=x_0$ „ y „ „ y_1 „ „ y_0,

gebe darauf Acht, dass nicht für die Anfangs- und Endpun
solche Uebergänge übersehen werden, addire sämmtliche M
so ist die Hälfte dieser Summe die gesuchte Zahl, wobei jed
zu merken ist, dass mehrfache imaginäre Wurzeln innerhalb
ser Gränzen auch als mehrfache eingerechnet sind."

Das was hier jeweils hinsichtlich der Eckpunkte gesagt
wird im Folgenden keine Schwierigkeit machen, da wir ger
diesen Fall ausschliessen werden.

Da, wie bereits in §. 1. gesagt, die vielfach erwähnten M
von $\frac{U}{V}$ und von $\frac{V}{U}$ von entgegengesetztem Zeichen sind, so v
man, je nach der Bequemlichkeit, das eine oder das andere
stimmen.

Unsere Aufgabe ist nun bloss noch, eben jenes Mehr zu
stimmen, wobei, wie man sieht, bloss Funktionen einer einzi
Grösse in Rechnung kommen. Wir folgen dabei nun, wie ber
gesagt, dem Rechnungsmechanismus von Moigno, der dem
Sturm durchaus analog, vielmehr nachgebildet ist.

---

*) d. h. wenn $\alpha=x_0$ oder $=x_1$ darf nicht β zwischen y_0 und
und wenn $\beta=y_0$ oder y_1 darf nicht α zwischen x_0 und x_1 sein.

§. 4.

Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Funktionen von x, so soll die Zahl, welche angiebt, wie vielmal der Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, indem er durch ∞ geht und sein Zeichen wechselt, wenn x wächst von x_0 bis x_1, von $-$ zu $+$ als von $+$ zu $-$ übergeht, der Ueberschuss jenes Bruches zwischen den genannten Gränzen heissen. Ist E dieser Ueberschuss, so ist offenbar $-E$ der Ueberschuss von $-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Ist ferner E' der Ueberschuss von $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ innerhalb der Gränzen, so giebt (wie in §. 1.) $E+E'$ an, wie vielmal mehr, indem $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sein Zeichen wechselt von $x=x_0$ bis $x=x_1$, dieser Wechsel von $-$ zu $+$ als von $+$ zu $-$ geschieht. Ist nun $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ negativ und $\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$ positiv, so ist dieses Mehr offenbar 1; ist ersterer Bruch positiv, der zweite negativ, so ist es -1; sind beide positiv, oder beide negativ, so ist es 0. Setzt man also

$$E+E'=e, \tag{13}$$

so ist:

$e=0$, wenn $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ eine Zeichenfolge, $\varphi(x_1)$ und $\psi(x_1)$ eine Zeichenfolge bilden;

$e=0$, wenn $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ einen Zeichenwechsel, $\varphi(x_1)$ und $\psi(x_1)$ einen Zeichenwechsel bilden;

$e=1$, wenn $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ einen Zeichenwechsel, $\varphi(x_1)$ und $\psi(x_1)$ eine Zeichenfolge bilden;

$e=1$, wenn $\varphi(x_0)$ und $\psi(x_0)$ eine Zeichenfolge, $\varphi(x_1)$ und $\psi(x_1)$ einen Zeichenwechsel bilden.

Im Allgemeinen wird man annehmen dürfen, $\varphi(x)$ sei von niederern Grade als $\psi(x)$. Ist diess nicht der Fall, so dividire man $\psi(x)$ in $\varphi(x)$, bis ein Rest $\varphi'(x)$ erscheint, der von niederern Grade ist als der Divisor. Ist Q der Quotient, so ist dieser eine ganze Funktion von x und man hat

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=Q+\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}.$$

Daraus folgt, dass wenn $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gegen ∞ geht, diess auch mit $\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ der Fall sein muss, indem Q immer endlich bleibt. Da aber

dann das Zeichen des zweiten Gliedes obiger Gleichung offenbar bloss von $\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ abhängt, so werden $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ und $\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ zu gleicher Zeit durch ∞ gehen und dort dieselben Zeichen haben, so dass der Ueberschuss des einen Bruches gleich dem des andern ist, es mithin genügt, bloss $\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ statt $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zu untersuchen, was eben unsere Behauptung rechtfertigt.

Sei also $\varphi(x)$ von niedererm Grade als $\psi(x)$, und man dividire nun $\varphi(x)$ in $\psi(x)$, kehre aber in dem bleibenden Reste sämmtliche Zeichen um, wodurch er zu $\varphi_1(x)$ werde; ist Q_1 der erhaltene Quotient, so ist demnach:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}. \tag{14}$$

Ist nun E' der Ueberschuss des Bruches $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, E der von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so ist, wie bereits in (13) gezeigt:

$$E + E' = e,$$

wo e die oben angegebene Bedeutung hat. Ist weiter E_1 der Ueberschuss von $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, so ist $-E_1$ der von $-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ und aus (14) folgt, dass $E' = -E_1$, wodurch man endlich erhält:

$$E - E_1 = e, \tag{15}$$

während e immer die bereits angegebene Bedeutung behält.

§. 5.

Auf die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ wollen wir nun dieselben Operationen anwenden, als wenn man den grössten gemeinschaftlichen Theiler derselben suchen wollte, dabei aber Sorge tragen, jeweils das Zeichen des Restes umzukehren („Grundzüge" S. 152.). Seien die so erhaltenen Reste $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,...., die Quotienten Q_1, Q_2,..., so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=Q_1-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},\\
&\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}=Q_2-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)},\\
&\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=Q_3-\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)},\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\varphi_{r-2}(x)}{\varphi_{r-1}(x)}=Q_r-\frac{\varphi_r(x)}{\varphi_{r-1}(x)},\\
&\frac{\varphi_{r-1}(x)}{\varphi_r(x)}=Q_{r+1};
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

wo $\varphi_r(x)$ eine kein x enthaltende Zahl ist, wenn $\varphi(x)$, $\psi(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; im andern Falle diesen gemeinschaftlichen Theiler vorstellt. ($\varphi_0(x)$ wäre hiernach $=\varphi(x)$, und $\varphi_{-1}(x)=\psi(x)$.).

Seien nun $E, E_1, E_2, \ldots, E_r, E_{r+1}$ die Ueberschüsse der Brüche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \ldots, \frac{\varphi_r(x)}{\varphi_{r-1}(x)}, \frac{\varphi_{r-1}(x)}{\varphi_r(x)}$; $e, e_1, \ldots, e_r$ Grössen, analog den e in §. 4., sich beziehend auf $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \ldots, \frac{\varphi_r(x)}{\varphi_{r-1}(x)}$; so ist nach (15) und (13):

$$E-E_1=e,\; E_1-E_2=e_1,\; E_2-E_3=e_2,\; \ldots,$$
$$E_{r-1}-E_r=e_{r-1},\; E_r+E_{r+1}=e_r.$$

Da aber $\varphi_r(x)$ in $\varphi_{r-1}(x)$ aufgeht, so ist jedenfalls $E_{r+1}=0$, also $E_r=e_r$ und folglich, wenn man alle diese Gleichungen addirt:

$$E=e+e_1+e_2+\ldots+e_r. \qquad (17)$$

Setzen wir nun in $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ zuerst $x=x_0$, dann $x=x_1$, so erhalten wir folgende Werthenreihen:

$$\psi(x_0),\; \varphi(x_0),\; \varphi_1(x_0), \ldots\ldots, \varphi_r(x_0); \qquad (I)$$
$$\psi(x_1),\; \varphi(x_1),\; \varphi_1(x_1), \ldots\ldots, \varphi_r(x_1). \qquad (II)$$

Nun ist allgemein:

$e_n=0$, wenn $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ eine Zeichenfolge; $\varphi_{n-1}(x_1)$, $\varphi_n(x_1)$ eine Zeichenfolge;

$e_n=0$, wenn $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ einen Zeichenwechsel; $\varphi_{n-1}(x_1)$, $\varphi_n(x_1)$ einen Zeichenwechsel;

$e_n = 1$, wenn $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ einen Zeichenwechsel; $\varphi_{n-1}(x_1)$, $\varphi_n(x_1)$ eine Zeichenfolge;

$e_n = -1$, wenn $\varphi_{n-1}(x_0)$, $\varphi_n(x_0)$ eine Zeichenfolge; $\varphi_{n-1}(x_1)$, $\varphi_n(x_1)$ einen Zeichenwechsel bilden.

Bedeutet nun W die Anzahl von Zeichenwechseln der ersten Reihe, die beim Uebergange von der Reihe (I) zur Reihe (II) sich in Zeichenfolgen, umgekehrt F die Anzahl Zeichenfolgen, die bei diesem Uebergange sich in Zeichenwechsel verwandeln, so ist demnach aus (17) offenbar:

$$E = e + e_1 + \ldots + e_r = W - F.$$

Die Differenz $W-F$ giebt aber offenbar an, wie viele Zeichenwechsel die Reihe (I) mehr habe, als die (II); zählt man also die Anzahl Zeichenwechsel w_1 der Reihe (I), die w_2 der Reihe (II), so ist $W-F = w_1 - w_2$, und also endlich

$$E = w_1 - w_2, \tag{18}$$

welche Gleichung den zu erweisenden Satz einschliesst, den wir nochmals in Worte fassen wollen.

Man überzeugt sich leicht (wie diess beim Sturm'schen Satze der Fall ist, siehe „Grundzüge" S. 155.) dass es Nichts thut, wenn eines der Glieder der Reihen (I) oder (II) verschwindet, nur darf es jeweils nicht das erste sein.

Der Sturm'sche Satz selbst wäre eine ganz einfache Folgerung dieser Lehren, wie diess auch leicht erhellt, wenn man $\varphi(x)$ die ersten Differentialquotienten von $\psi(x)$ sein lässt. Doch gehört diess jetzt nicht hieher.

Diess Alles, zusammengehalten mit §. 3., wird nun zur Lösung der gestellten Aufgabe genügen.

Dass man bei den vorkommenden Divisionen die bekannten Erleichterungen (Grundzüge S. 148.) anwenden darf, versteht sich von selbst.

Wir wollen nun das Gesagte auf einige Beispiele anwenden.

§. 6.

1) Sei die Gleichung

$$z^4 + 1 = 0 \tag{19}$$

vorgelegt, und man fragt, wie viele Wurzeln $x+yi$ derselben so liegen, dass x zwischen 0 und 1, y ebenfalls zwischen 0 und 1 sei.

Ist $z=x+yi$, so ist

$$z^4+1=x^4-6x^2y^2+y^4+1+(4x^3y-4xy^3)i,$$

also

$$U=x^4-6x^2y^2+y^4+1\,,\quad V=4x^3y-4xy^3,$$

wobei man den Faktor 4 in V füglich weglassen kann.

Wir wollen jeweils $\frac{V}{U}$ untersuchen, da immer V von niederem Grade ist, als U.

a) Erste Seite. $y=0$, x von 0 bis 1. $U=x^4+1$, $V=0$, also $\frac{V}{U}=0$, und mithin der Ueberschuss 0.

b) Zweite Seite. $x=1$, y von 0 bis 1. $U=y^4-6y^2+2$, $V=-y^3+y$.

$$\left.\begin{aligned}
\psi(y) &= y^4-6y^2+2,\\
\varphi(y) &= -y^3+y,\\
\varphi_1(y) &= 5y^2-2,\\
\varphi_2(y) &= -y\\
\varphi_3(y) &= +1
\end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} y=0&:+-+\\ y=1&:-+-+\end{aligned}\right\}\ \varepsilon_2=-1.$$

c) Dritte Seite. $y=1$, x von 1 bis 0. $U=x^4-6x^2+2$, $V=x^3-x$.

$$\left.\begin{aligned}
\psi(x) &= x^4-6x^2+2,\\
\varphi(x) &= x^3-x,\\
\varphi_1(x) &= 5x^2-2\\
\varphi_2(x) &= +x,\\
\varphi_3(x) &= +1
\end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x=1&:-+++\\ x=0&:+-++\end{aligned}\right\}\ \varepsilon_3=-1.$$

d) Vierte Seite. $x=0$, y von 1 bis 0. $U=y^4+1$, $V=0$, also $\frac{V}{U}=0$, mithin der Ueberschuss 0.

Also endlich

$$E=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)=2,$$

folglich die gesuchte Anzahl imaginärer Wurzeln 1, wie man sich auch sonst leicht überzeugt.

2) Sei die Gleichung

$$z^3-21z+344=0 \qquad (20)$$

vorgelegt, und man frägt, wie viele imaginäre Wurzeln $x+yi$ derselben so liegen, dass x zwischen 0 und 5, y zwischen 0 und 6 liegt. Für $z=x+iy$ ist hier:

$$U=x^3-3xy^2-21x+344,\quad V=3x^2y-y^3-21y.$$

a) Erste Seite. $y=0$, $V=0$, also $\varepsilon_1=0$.

b) Zweite Seite. $x=5$, y von 0 bis 6. $U=-15y^2+364$, $V=-y^3+54y$.

Da wir $\frac{V}{U}$ untersuchen, und U von niedererm Grade ist, so müssen wir zuerst dividiren. Der Rest ist $446y$ oder kürzer y. Also

$$\begin{array}{l|l} \psi(y)=-15y^2+364, & \\ \varphi(y)=y, & \left.\begin{array}{l} y=0:+-\\ y=6:-+\end{array}\right\}\varepsilon_2=-1. \\ \varphi_1(y)=-1 & \end{array}$$

c) Dritte Seite. $y=6$, x von 5 bis 0. $U=x^3-129x+344$, $V=18x^2-342=18(x^2-19)$.

$$\begin{array}{l|l} \psi(x)=x^3-129x+344, & \\ \varphi(x)=x^2-19, & \left.\begin{array}{l} x=5:-+++\\ x=0:+--+\end{array}\right\}\varepsilon_3=-1. \\ \varphi_1(x)=55x-172, & \\ \varphi_2(x)=+1 & \end{array}$$

d) Vierte Seite. $x=0$, y von 6 bis 0. $U=344$, $V=-y^3-21y$. $\frac{V}{U}$ ist eine ganze Funktion, $\varepsilon_4=0$.

$$E=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)=2,$$

also liegt eine imaginäre Wurzel von (20) der Art, wie verlangt. (Die Wurzeln von (20) sind $4\pm\sqrt{27}.i, -8.$).

3) Die Gleichung

$$z^4-8z^3+27z^2-38z+26=0 \qquad (21)$$

hat die Wurzeln $1 \pm i$, $3 \pm 2i$. Ist nun $x_0=1$, $x_1=3$, $y_0=0$, $y_1=3$, so tritt der in §. 3. ausgeschlossene Fall ein, indem auf der zweiten und vierten Seite Wurzeln liegen. Man wird also $E=2$ erhalten, während doch 2 Wurzeln innerhalb der angegebenen Gränzen liegen, also $E=4$ herauskommen sollte. Die folgende Rechnung wird diess nachweisen.

Setzt man $z=x+iy$, so erhält man:

$$U=x^4-6x^2y^2+y^4-8x^3+24xy^2+27x^2-27y^2-38x+26,$$
$$V=4x^3y-4xy^3-24x^2y+8y^3+54xy-38y;$$

wo man in V füglich den Faktor 2 ausfallen lassen kann.

a) Erste Seite. $y=0$, also $V=0$ und mithin $\varepsilon_1=0$.

b) Zweite Seite. $x=3$, y von 0 bis 3. $U=20-9y^2+y^4$, $V=-2y^3-8y=2(-y^3+4y)$.

$$\frac{U}{V}=\frac{20-9y^2+y^4}{-y^3+4y}=\frac{(y^2-5)(y^2-4)}{-y(y^2-4)}=\frac{y^2-5}{-y}.$$

$\psi(y)=y^2-5,$	$y=0:-+$
$\varphi(y)=-y,$	$y=3:+-+$
$\varphi_1(y)=+1;$	$\varepsilon_2=-1.$

c) Dritte Seite. $y=3$, x von 3 bis 1.

$$U=x^4-8x^3-27x^2+178x-136,\quad V=2x^3-12x^2+9x+17.$$

$\psi(x)=x^4-8x^3-27x^2+178x-136,$	$x=3:+--++$
$\varphi(x)=2x^3-12x^2+9x+17,$	$x=1:++--+$
$\varphi_1(x)=87x^2-391x+238,$	$\varepsilon_3=0$
$\varphi_2(x)=75733x-191029,$	
$\varphi_3(x)=+1$	

d) Vierte Seite. $x=1$, y von 3 bis 0.

$$U=y^4-9y^2+8=(y^2-8)(y^2-1),\quad V=y^3-y=(y^2-1)y.$$

$\psi(y)=y^2-8,$	$y=3:+++$
$\varphi(y)=y,$	$y=0:-+$
$\varphi_1(y)=+1,$	$\varepsilon_4=-1.$

$$E=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)=2, \text{ wie angegeben.}$$

4) Die Gleichung

$$z^4-2z^3+3z^2-2z+1=0 \qquad (21)$$

hat die Wurzeln $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$ jede zweimal; ist nun $x_0=0$, $x_1=1$, $y_0=-1$, $y_1=+1$, so muss $E=8$ erscheinen.

Für $z=x+yi$:

$$U=x^4-6x^2y^2+y^4-2x^3+6xy^2+3x^2-3y^2-2x+1,$$
$$V=2x^3y-2xy^3-3x^2y+y^3+3xy-y.$$

a) Erste Seite. $y=-1$, x von 0 bis 1.

$$U=x^4-2x^3-3x^2+4x-1,\quad V=-2x^3+3x^2-x.$$

$\psi(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1,$	$x=0:-+++$
$\varphi(x)=-2x^3+3x^2-x,$	$x=1:-+-+$; $\varepsilon_1=-2.$
$\varphi_1(x)=17x^2-17x+4,$	
$\varphi_2(x)=-2x+1,$	
$\varphi_3(x)=+1.$	

b) Zweite Seite. $x=1$, y von -1 bis $+1$.

$$U=y^4-3y^2+1,\quad V=-y^3+y.$$

$\psi(y)=y^4-3y^2+1,$	$y=-1:-+++$
$\varphi(y)=-y^3+y,$	$y=+1:-+-+$; $\varepsilon_2=-2.$
$\varphi_1(y)=2y^2-1,$	
$\varphi_2(y)=-y,$	
$\varphi_3(y)=+1$	

c) Dritte Seite. $y=1$, x von 1 bis 0.

$$U=x^4-2x^3-3x^2+4x-1,\quad V=2x^3-3x^2+x.$$

$\psi(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1,$	$x=1:-+++$
$\varphi(x)=2x^3-3x^2+x,$	$x=0:-+-+$; $\varepsilon_3=-2.$
$\varphi_1(x)=17x^2-17x+4,$	
$\varphi_2(x)=2x-1,$	
$\varphi_3(x)=+1$	

d) Vierte Seite. $x=0$, y von 1 bis -1.

$$U=y^4-3y^2+1,\quad V=y^3-y.$$

$\psi(y)=y^4-3y^2+1,$	$y=1: -+++$
$\varphi(y)=y^3-y,$	$y=-1: -+-+$
$\varphi_1(y)=2y^2-1,$	$\Big\}\ \varepsilon_4=-2.$
$\varphi_2(y)=y,$	
$\varphi_3(y)=+1$	

$$E=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)=8.$$

Dass, wenn die Gränzen von y (y_0 und y_1) die Null einschlies-, man die Anzahl der reellen Wurzeln mit erhält, ist klar. Wir len zu dem Ende die einfache Gleichung:

$$z^2-2z+1=0$$

len, welche die Wurzel 1 zweimal enthält, und setzen $x_0=0$, $=2$, $y_0=-1$, $y_1=+1$, so muss $E=4$ erscheinen.

Für $z=x+yi$ ist

$$U=x^2-y^2-2x+1,\quad V=xy-y.$$

a) Erste Seite. $y=-1$, $U=x^2-2x$, $V=-x+1$, x von is 2.

$\psi(x)=x^2-2x,$	$x=0: -++$
$\varphi(x)=-x+1,$	$x=2: +-+$
$\varphi_1(x)=+1$	$\Big\}\ \varepsilon_1=-1.$

Allerdings ist hier $\psi(x)=0$ für $x=0$, was nicht sein sollte; muss desshalb statt $x=0$ für x eine unendlich kleine positive l sich denken (wie das im Folgenden auch geschehen muss), lann ist $\psi(x)$ negativ.

b) Zweite Seite. $x=2$, y von -1 bis $+1$. $U=-y^2+1$, $V=y$.

$\psi(y)=-y^2+1,$	$y=-1: +--$
$\varphi(y)=y$	$y=+1: -+-$
$\varphi_1(y)=-1$	$\Big\}\ \varepsilon_2=-1.$

Auch hier ist $\psi(y)=0$ für $y=1$ und -1; man denkt sich shalb die Gränzen von y: $y_0=-1+\varrho$, $y_1=+1+\varrho$, wo ϱ eine ndlich kleine positive Zahl ist.

c) Dritte Seite. $y=1$, x von 2 bis 0. $U=x^2-2x$. $V=a$

$$\begin{array}{l|l} \psi(x) = x^2-2x, & x=2: +++ \\ \varphi(x) = x-1 & x=0+\varrho: --+ \\ \varphi_1(x) = +1 & \end{array} \Big\} \varepsilon_3 = -1.$$

d) Vierte Seite. $x=0$, y von 1 bis -1. $U=-y^2+1$, $V=$

$$\begin{array}{l|l} \psi(y) = -y^2+1, & y=+1+\varrho: --- \\ \varphi(y) = -y, & y=-1+\varrho: ++- \\ \varphi_1(y) = -1 & \end{array} \Big\} \varepsilon_4 = -1.$$

$$E = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 4,$$

wie behauptet.

Obiges Beispiel zeigt zugleich, wie man sich helfen m wenn $\psi(x)$ oder $\psi(y)$ zu Null wird. Natürlich hätte man sich : helfen können, indem man andere Gränzen gewählt hätte. Der B $\frac{V}{U}$ geht in unserm Falle durch ∞, wenn der bewegliche Punl den Ecken des Rechtecks angekommen ist, und daraus schon l man $E=4$ ableiten können.

Obige Beispiele mögen zur Erläuterung genügen. Wie vermittelst des obigen Theorems die imaginären Wurzeln tre kann, ist leicht zu übersehen und bedarf hier keiner weitern örterung. In jedem Falle ist das bewiesene Theorem der ein wissenschaftliche Weg, die ersten Stellen (Ganzen) der imag ren Wurzeln zu erhalten.

XXVIII.

Untersuchungen über die wahre oder scheinbare Unbestimmtheit der Grössen, welche unter der Darstellungsform $\frac{0}{0}$ erscheinen.

Von
Herrn Dr. *Chr. Wiener*
in Giessen.

Bei den bruchförmigen Functionen, deren Zähler und Nenner zugleich für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen Null werden und somit die Function unbestimmt machen können, hat man bisher stets den meist zugleich bestehenden bestimmten Werth, welchen man leicht durch Differentiation findet, als den wahren Werth der Function für jenen Werth der willkürlich Veränderlichen betrachtet und die eintretende Unbestimmtheit eine nur scheinbare genannt. Ist die Function eine solche von Einer Veränderlichen, so kann allerdings stets ein bestimmter Werth gefunden werden; aber diess berechtigt uns noch nicht, den unbestimmten als nur scheinbar zu verwerfen. Im Gegentheil, dieser unbestimmte Werth muss, wie im Isten Theil des Folgenden gezeigt werden soll, im Allgemeinen als zur Function gehörig betrachtet werden; und wenn wir uns die Werthe der Function als die Ordinaten einer Kurve vorstellen, deren zugehörige Abscissen durch den zugehörigen Werth der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt werden, so tritt anschaulich hervor, dass die Grösse jener fraglichen Ordinate nicht nur durch den gefundenen bestimmten Werth der Function, sondern auch durch den unbestimmten ausgedrückt wird, d. h. dass die ganze Ordinate einen Ast der Kurve bildet. Drückt aber die Gleichung die Abhängigkeit zwischen an-

deren Grössen, z. B. körperlichen oder mechanischen aus, so ist allerdings der unbestimmte Werth häufig zu verwerfen; und es ist in jedem Falle, wie an einzelnen Beispielen gezeigt werden wird, zu untersuchen, ob die Unbestimmtheit in der Natur der Sache liegt, oder nur durch mathematische Operationen hereingebracht wurde.

Hat man eine Function zweier Veränderlichen, so ist es im Allgemeinen unmöglich, statt des unbestimmten Werthes einen bestimmten zu finden; nur in besonderen Fällen bekommt man statt der vollkommenen Unbestimmtheit Grenzen, zwischen welchen die Werthe der Function liegen oder auch einen einzigen bestimmten Werth. Es ist nun sehr interessant, die Gestalt der Fläche zu untersuchen, deren 3te Coordinate als Function von den zwei willkürlich Veränderlichen durch die gegebene Function ausgedrückt ist, und zwar besonders in der Nähe jener Stelle, wo die 3te Coordinate unbestimmt wird. Diese Ordinate liegt dann, wie wir im IIten Theil des Folgenden sehen werden, entweder ganz in der Fläche oder nur ein Theil oder ein Punkt derselben. Wir werden aber finden, dass auch in letzteren Fällen der übrige Theil der Linie als ein Ast der Fläche betrachtet werden muss, sowie ja auch ein Punkt ein Ast einer Kurve sein kann.

Die Aufgabe des Folgenden ist daher, auf analytischem Wege zu beweisen, dass der in einer Function eintretende unbestimmte Werth ein durchaus wirklich bestehender und nicht nur scheinbarer ist, diese Wahrheit durch Anwendung auf Kurven und Flächen zur übersichtlichen Anschauung zu bringen, und durch einige specielle Beispiele aus der Geometrie und Mechanik zu zeigen, wann die eintretende Unbestimmtheit für diese Begriffe der vorgestellten Grössen eine wahre und wann eine nur scheinbare ist. Es wird dabei hervortreten, dass diese Untersuchung keine gleichgültige ist, indem durch Unklarheit über diesen Punkt sehr leicht falsche Resultate erzielt werden können. So hat z. B. Euler in seinen Untersuchungen über die Vertheilung eines Drucks auf mehr als drei Stützpunkte ohne Rücksicht auf die Formveränderung, welche bei jedem Körper unter dem Einflusse irgend einer Kraft eintritt, fälschlicher Weise gewisse Grenzwerthe als wahre bestimmte Auflösung hingestellt, während sich aus der Isten Aufgabe des IIten Theils im Folgenden ergeben wird, dass die Unbestimmtheit für die hypothetischen vollkommen starren Körper Eulers wirklich besteht, und nur bei wahren stets elastischen Körpern Bestimmtheit eintritt, deren Werth aber dem Resultate Eulers nur unter bestimmten Bedingungen gleich ist.

I.

Wenn ein Ausdruck $y=\frac{fx}{Fx}$, für $x=x_0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so ist die hierdurch dargestellte Unbestimmtheit nicht nur scheinbar; obgleich sich auch noch ein besonderer bestimmter Werth für y finden lässt.

A. Wenn in dem Ausdrucke $y=\frac{fx}{Fx}$ für den besonderen Werth $x=x_0$ sowohl fx als auch Fx zu Null wird, so erscheint $y=\frac{0}{0}$ nter der Form der Unbestimmtheit. Um einen bestimmten Werth ir $y_0=\frac{fx_0}{Fx_0}$ zu erhalten, geht man von zwei wesentlich verchiedenen Grundbetrachtungen aus, die aber beide zu erselben Methode führen.

1) Da x_0 für x eingesetzt, fx und Fx zu Null macht, so ist ; eine Wurzel, und daher $x-x_0$ ein Factor beider Functionen; an kann daher auch

$$x=\frac{fx}{Fx}=\frac{M(x-x_0)}{N(x-x_0)}$$

etzen, worin M und N andere Functionen von x sind. Reducirt ian, indem man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor streicht, so erhält man $y=\frac{M}{N}$ und hieraus für $x=x_0$ inen bestimmten Werth von y_0. Enthalten M und N nochmals en gemeinschaftlichen Factor $x-x_0$, so dass für $x=x_0$ auch $\frac{f}{l}=\frac{0}{0}$ wird, so ist im Allgemeinen

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{P(x-x_0)^m}{Q(x-x_0)^n},$$

orin P und Q wieder Functionen von x sind, die aber den Factor $-x_0$ nicht mehr enthalten, so erhält man aus $y=\frac{P}{Q}(x-x_0)^{m-n}$ ir $x-x_0$ den bestimmten Werth von y_0, welcher Null, endlich ler unendlich wird, je nachdem $m>n$, $m=n$ oder $m<n$ ist. — m nun diese gemeinschaftlichen Factoren $x-x_0$ zu entfernen und $\frac{f}{f}$ oder $\frac{P}{Q}$ zu erhalten, bedient man sich mit grossem Vortheil der Diffe-

rentialrechnung, indem $\frac{M}{N}=\frac{f'x_0}{F'x_0}$ ist, d. h. gleich dem Verhältniss der Differentialquotienten, worin man $x=x_0$ gesetzt hat. Es ist nämlich

$$\frac{f'x}{F'x}=\frac{d[M(x-x_0)]}{d[N(x-x_0)]}=\frac{M+(x-x_0)\frac{dM}{dx}}{N+(x-x_0)\frac{dN}{dx}},$$

daher $\frac{f'x_0}{F'x_0}=\frac{M}{N}$, was man suchte. Wird $\frac{M}{N}$ für $x=x_0$ wieder $\frac{0}{0}$, so findet man nach $n$maliger Differentiation des Zählers und des Nenners

$$\frac{d^n[P(x-x_0)^m]}{d^n[Q(x-x_0)^n]}=\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)P(x-x_0)^{m-n}}{n(n-1)\ldots.2.1.Q},$$

was für $x=x_0$ gleich 0, $\frac{P}{Q}$ oder ∞ wird, je nachdem $m>n$, $m=n$ oder $m<n$ ist.

2) Nimmt man an, dass $y=\frac{fx}{Fx}$ für $x=x_0$ continuirlich sei und setzt statt x, x_0+h, so bekommt man

$$y=\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{fx_0+hf'x_0+\frac{1}{2}h^2f''x_0+\ldots.}{Fx_0+hF'x_0+\frac{1}{2}h^2F''x_0+\ldots.}$$
$$=\frac{hf'x_0+\frac{1}{2}h^2f''x_0+\ldots.}{hF'x_0+\frac{1}{2}h^2F''x_0+\ldots.},$$

da fx_0 und $Fx_0=0$ sind, und es wird für $h=0$ wieder $y=\frac{0}{0}$. Reducirt man jedoch vorher, indem man Zähler und Nenner durch h dividirt, so erhält man

$$y=\frac{f'x_0+\frac{1}{2}hf''x_0+\ldots.}{F'x_0+\frac{1}{2}hF''x_0+\ldots.},$$

was für $h=0$, $y_0=\frac{f'x_0}{F'x_0}$ gibt. Für $f'x_0=0$ und $F'x_0=0$ erhält man auf ähnliche Weise $y_0=\frac{f''x_0}{F''x_0}$ u. s. w.

3) Die letzte Methode kann noch durch folgende geometrische Betrachtung erläutert werden. Sei $u=fx$ durch die Kurve MN (Taf. V. Fig. 1.), $U=Fx$ durch PQ und $y=\frac{fx}{Fx}$ durch

RS dargestellt, und sei für $x=x_0=OA$, fx und $Fx=0$, so müssen MN und PQ die Abscissenaxe in A schneiden. Die Kurve RS verzeichnet man, indem man für irgend eine Abscisse Oa, für welche die Ordinaten der ersten Kurven an, aq bekannt sind, die Ordinate $as=1.\frac{an}{aq}$ construirt. Auf diese Weise lassen sich alle Ordinaten, ausser der bei A finden. Nähert man sich jedoch diesem Punkte und denkt sich bei A selbst zwei Tangenten MN und PQ gezogen, so geht $\frac{u}{U}$ immer mehr in das Verhältniss der Ordinaten der Tangenten für dieselbe Abscisse über und erreicht es endlich bei A, oder es wird $\frac{u}{U}=\frac{du}{dU}=\frac{f'x}{F'x}$. Diese geometrische Betrachtung gibt für besondere Fälle noch weitere Uebereinstimmung mit der vorigen analytischen Entwickelung. Tangiren nämlich beide Kurven MN und PQ bei A an die Abscissenaxe, so kann der unbestimmte Grenzwerth y_0 nicht unmittelbar als der gleichbedeutende Werth für die Tangenten gefunden werden, weil letzterer selbst unbestimmt ist. Betrachtet man nun $u'=f'x$ wieder als Kurve, deren Ordinate die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Abscissenaxe und derjenigen Tangente darstellt, welche an die ursprüngliche Kurve $u=fx$ in dem derselben Abscisse x entsprechenden Punkte gezogen wird, so schneidet diese Kurve in unserm Falle ebenfalls in A die Abscissenaxe, ebenso wie die Kurve $U'=F'x$, welche der ursprünglichen Kurve $U=Fx$ entspricht. Man ist so auf den früheren Fall zurückgeführt und findet nun $y_0=\frac{f''x_0}{F''x_0}$ als bestimmten Grenzwerth für jene Tangenten, also auch für die ursprünglichen Kurven. Ist auch $y_0=\frac{f''x_0}{F''x_0}=\frac{0}{0}$, so geht man durch ganz dieselben Betrachtungen zu $y_0=\frac{f'''x_0}{F'''x_0}$ über.

Veranschaulichen wir uns das Letztere durch ein einfaches Beispiel.

Es sei

$$y=\frac{2-\sqrt{(4-x^2)}}{x^2},$$

so wird $x_0=0$, $y_0=\frac{0}{0}$. Wir bekommen weiter

$$\frac{f'x}{F'x}=\frac{+\frac{x}{\sqrt{(4-x^2)}}}{2x},$$

was aber für $x_0=0$ wieder zu $y_0=\frac{0}{0}$ wird; endlich ist

$$f''x:F''x=\frac{\sqrt{(4-x^2)}+\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)}}}{4-x^2}:2,$$

was $y_0=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$ liefert. — Es bedeutet nun $u=2(\mp)\sqrt{(4-x^2)}$ d Kreis MN (Taf. V. Fig. 2.), dessen Mittelpunkt in C, wofür $CO=$ und $U=x^2$ die Parabel PQ. Wir finden ferner $u'=f'x=\frac{x}{\sqrt{(4-}}$ als die Gleichung der Kurve FG, für welche im Ursprung $\frac{du'}{dx}=$ ist; ebenso $U'=F'x=2x$ als die Gleichung der Geraden E Für $y'=\frac{f'x}{F'x}$ aber ist nach dem Früheren für $x_0=0$ der bestimn Werth $y_0=\frac{f''x}{F''x}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}=AK$ leicht zu finden. RS stellt (Lauf der Kurve $y=\frac{2\mp\sqrt{(4-x^2)}}{x^2}$ dar.

B. Nimmt man $y_0=\frac{0}{0}$ als den Ausdruck von nicht nur sche barer, sondern **wirklich bestehender** Unbestimmtheit an, sagt er, dass für $x=x_0$, y jeden beliebigen Werth annehmen ka Ausserdem gibt $y_0=\frac{f^n x_0}{F^n x_0}$ noch einen bestimmten Werth als Gre für die benachbarten y, wenn x in x_0 übergeht, welcher We aber in $y_0=\frac{0}{0}$ einbegriffen ist. Denkt man sich durch $y=$ wieder eine **Kurve** dargestellt, so soll im Folgenden gezeigt w den, dass für $x=x_0$ nicht nur der bestimmte zum Aste RS (Taf. Fig. 1.) gehörige Werth $y_0=AK$ stattfindet, sondern auch der We $y=\frac{0}{0}$. Diese letztere Gleichung in Verbindung mit der $x=$ stellt aber die Gerade AL, welche mit OY parallel ist, dar. I Kurve besteht also aus zwei Aesten, nämlich der Kurve RS ı aus AL, der **Ordinate in A in ihrer ganzen Ausdehnu** in K findet daher ein Doppelpunkt statt. Wir wollen diese I hauptung aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten und richtig beweisen.

1) Von dem Ausdrucke

$$y=\frac{P(x-x_0)}{Q(x-x_0)}\cdot\left(\text{oder } y=\frac{hf'x+\frac{1}{2}h^2f''x+\ldots}{hF'x+\frac{1}{2}h^2F''x+\ldots}\right)$$

sagt Lacroix, man müsse ihn $=\frac{P}{Q}$ setzen, da die Gesetze des Rechnens verlangten, vor Allem ihn auf seine einfachste Form zurückzuführen. Wollte man dieses Gesetz anerkennen, so müsste man auch die Gleichung $yQ(x-x_0)=P(x-x_0)$ sogleich auf die einfachste Form $yQ=P$ bringen, während doch hierdurch eine Wurzel $x=x_0$ entfernt wird. Es muss vielmehr der Grundsatz gelten, dass nur solche Formveränderungen mit einer Gleichung vorgenommen werden dürfen, durch welche keine der aus ihr möglichen Folgerungen verändert wird. Der Gleichung $y=\frac{P(x-x_0)}{Q(x-x_0)}$ wird aber Genüge geleistet durch $x=x_0$, welchen Werth auch y annehmen mag, während bei $y=\frac{P}{Q}$ diess nicht mehr stattfindet; setzt man andererseits in P und Q, $x=x_0$, so gibt $y=y_0$ den ebenfalls geltenden bestimmten Werth von y_0 an. Nach diesem Grundsatze müssen also die beiden Gleichungen

$$y=\frac{P(x-x_0)}{Q(x-x_0)} \text{ und } yQ(x-x_0)=P(x-x_0)$$

als ganz identisch angesehen werden, so dass sie beide und nicht nur die letzte die Wurzel x_0, wofür y unbestimmt ist, haben. — Hierfür spricht auch Folgendes: Bei einer Gleichung mit Gliedern, welche Functionen der Veränderlichen zu Nennern haben, bringt man diese Nenner durch Multiplication der Gleichung mit denselben weg, um ein Glied zu vermeiden, dessen Nenner $=0$ werden kann. Denn die Bedeutung eines solchen Gliedes als unendlich wird erst durch jene Multiplication deutlich. Dass nämlich in $y=\frac{a}{0}+b$ die Grösse $\frac{a}{0}$ unendlich ist, gegen welche die Constante b verschwindet, ergibt sich erst aus $y0=a+b0=a$, woraus $\frac{a}{0}+b=\frac{a}{0}$. Dasselbe muss in einer Gleichung geschehen, wenn der Zähler zugleich mit dem Nenner Null werden kann. Denn die Bedeutung des Ausdruckes $\frac{0}{0}$ als unbestimmt, ergibt sich ebenfalls erst durch Multiplication der Gleichung mit dem Nenner; aus $y=\frac{0}{0}$ muss erst $y0=0$ abgeleitet werden, um an letzterer Gleichung die Unbestimmtheit von y zu erkennen. — Es folgt also hieraus und aus dem obigen an und für sich klaren Grundsatze, dass der Factor $\frac{x-x_0}{x-x_0}$ nur so lange $=1$ gesetzt werden muss, als $x-x_0$ nicht $=0$ ist.

2) Ganz eng und übereinstimmend schliesst sich hieran folgende geometrische Betrachtung an. Die Gleichungen

$$x=x_1,\ x=x_2,\dots,\ \text{oder}\ x-x_1=0,\ x-x_2=0,\dots,$$

worin x_1, x_2, ... constante Grössen, und welche eine Reihe von Punkten auf der Abscissenaxe darstellen sollen, lassen sich durch die einzige Gleichung

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots=0$$

ausdrücken, welche alle jene Punkte darstellt. Ebenso, wenn

$$y-x=0,\ y^2+x^2-a^2=0,\ x-x_0=0,\dots$$

die Gleichungen von Kurven sind, so besteht die Kurve

$$(y-x)(y^2+x^2-a^2)(x-x_0)\dots=0$$

aus jenen einzelnen Kurven; wie z. B.

$$(x-x_0)(x+x)=x^2-x_0{}^2=0,$$

$x=\pm x_0$ gibt, d. i. die beiden Geraden $x=x_0$ und $x=-x_0$

Hat man so die Gleichungen

$$y=y_0\ \text{und}\ x=x_0,$$

welche mit den Axen OX und OY in den Abständen y_0 und x_0 parallel laufende Gerade darstellen, und vereinigt sie in

$$(y-y_0)(x-x_0)=0,$$

so umfasst diese Kurve die beiden vorigen Geraden. Entwickelt man die Gleichung in Bezug auf y, so wird

$$y=\frac{y_0(x-x_0)}{x-x_0},$$

für welches die beiden Werthe $y=y_0$ und $y=\frac{0}{0}$ für $x=x_0$ der Gestalt der Kurve zufolge als wirklich bestehende und nicht nur scheinbare anerkannt werden müssen. Ebenso gibt

$$x=\frac{x_0(y-y_0)}{y-y_0},\ x=x_0\ \text{und}\ x=\frac{0}{0}\ \text{für}\ y=y_0.$$

3) Gehen wir auf die Betrachtung von A. 3) zurück, worin wir uns unter $y=\frac{fx}{Fx}$, $u=fx$ und $U=Fx$ drei Kurven RS, MN und PQ vorstellten, nehmen wir aber an, dass in fx statt $x, x-b$

gesetzt werde, so dass nicht $x=x_0$, sondern $x=x_0+b$ eine Wurzel ist, so wird die Kurve MN um $AB=b$ (Taf. V. Fig. 1.) zur Rechten gerückt, schneidet also die Abscissenaxe in B für $x=0B=x_0+b$; PQ aber schneidet sie noch in A für $x=0A=x_0$. Wir bekommen hierdurch

$$y=\frac{f(x-b)}{Fx},$$

und dieses wird für $x=x_0+b=0B$ zu $y=\frac{0}{F(x_0+b)}=0$, dagegen für $x=x_0=0A$ zu $y=\frac{f(x_0-b)}{0}=\infty$; die jetzt dargestellte Kurve $R'L'$, $L'S'$ schneidet also in B die Abscissenaxe und hat die in A errichtete Ordinate zur Asymptote. — Nähert sich nun b immer mehr dem Null, rückt also B immer näher an A, so nähert sich auch $\frac{f(x-b)}{Fx}$ immer mehr dem ursprünglichen $\frac{fx}{Fx}$ und die hierdurch dargestellte Kurve $R'L'$, $L'S'$ immer mehr der Kurve RS und der Geraden AL, welche seine Asymptoten sind. Für die Grenze $b=0$ geht die Kurve in die beiden Asymptoten, die Gleichung in die Form $y=\frac{fx}{Fx}$ über, welche also jene beiden Asymptoten, also auch die Ordinate AL darstellt; daher ist der für $x=x_0$ gefundene Werth $y=\frac{0}{0}$ ein wirklich bestehender.

Wir wollen zwei Beispiele dieses interessanten Uebergangs betrachten:

Es sei

$$y=\frac{fx}{Fx}=\frac{x}{-x},$$

so ist hierin $u=x$ die Gerade MN (Taf. V. Fig. 3.), und $U=-x$ die Gerade PQ, welche beide durch den Ursprung 0 gehen. Bei $y=\frac{x}{-x}$ aber ist $x_0=0$ und hierfür $y_0=\frac{0}{0}$; ferner nach Entfernung des gemeinschaftlichen Factors, $y=-1$. Die Gleichung stellt also das System der beiden Geraden $y=-1(RS)$ und $x=0(AL)$ dar. — Hat man statt dessen $y=\frac{x-b}{-x}$ und setzt dabei $b=1$, so stellt $u=x-1$ die Gerade $M''N''$, und $y=\frac{x-1}{-x}$ die gleichseitige Hyperbel $R''L''$, $L''S''$ dar, welche jene Geraden RS und AL zu

Asymptoten hat. Für $b=0{,}1$ wird $u=x-0{,}1$ und $y=\frac{x-0{,}1}{-x}$, welche Gleichungen die Gerade $M'N'$ einerseits und andererseits die Hyperbel $R'L'$, $L'S'$ darstellen. Man sieht, wie sich die Hyperbel immer mehr den Asymptoten nähert und wie die Gleichung, wenn sie die Grenze $y=\frac{x}{-x}$ erreicht, auch das System der beiden Asymptoten, welche die Grenze der Kurve sind, darstellen muss.

Die Gleichung der Quadratrix ist

$$y=\frac{x}{\operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)},$$

worin der Radius des Kreises als Längeneinheit gilt. Dabei stellt $u=x$ die Gerade MN (Taf. V. Fig. 4.) und $U=\operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ die Tangentioide PQ mit ihren verschiedenen Aesten dar; die Quadratrix selbst besteht aus dem Aste RS (mit noch einer unendlichen Reihe von symmetrischen Nebenästen) und der Ordinatenaxe selbst, da ja für $x_0=0$, $y_0=\frac{0}{0}$ ist. Für $b=-1$ stellt $u=x+1$ die Gerade $M''N''$ und $y=\frac{x+1}{\operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}$ die zweiästige Kurve $R''L''$, $L''S''$ vor, welche die Quadratrix und die Ordinate zu Asymptoten hat; ebenso für $b=-0{,}1$ gibt $u=x+0{,}1$ die Gerade $M'N'$ und $y=\frac{x+0{,}1}{\operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)}$ die Kurve $R'L'$, $L'S'$, welche sich den Asymptoten genähert hat, und für $b=0$ in dieselben, nämlich in RS und AL übergeht.

4) Transformirt man in der Gleichung $y=\frac{fx}{Fx}$ die Coordinaten, indem man auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem $X'OY'$ übergeht, das mit dem alten denselben Ursprung hat, aber mit demselben die Winkel $XOX'=\alpha$, $YOX'=90-\alpha$ bildet, setzt also

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \text{ und } y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

so erhält man die neue Gleichung der Kurve:

$$x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{f(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)}{F(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)},$$

und entwickelt man diese Gleichung in Bezug auf y', so erhält man

$$y' = \frac{\varphi x'}{\Psi x'},$$

worin nicht mehr Zähler und Nenner die den früheren entsprechenden gleichen Wurzeln haben. Die früher zur Kurve gehörige Ordinate ist nicht verschwunden, da vor der Transformation nicht reducirt wurde, sondern zu einer schiefen Linie geworden, und ihr jetzt unzweifelhaftes Dasein beweist auch ihr Dasein vor der Transformation. Diese Betrachtung kann jedoch nur in Verbindung mit der unter B. 1) als richtig angesehen werden, indem man sonst vor der Entwickelung von y' die Reduction vornehmen könnte.

Beispiel. Transformirt man die Gleichung

$$y = \frac{x^2}{-x},$$

so erhält man

$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \frac{(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2}{-x' \cos\alpha + y' \sin\alpha},$$

oder

$$y'^2 \sin\alpha (\cos\alpha - \sin\alpha) + x'y' (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha)$$
$$- x'^2 \cos\alpha (\cos\alpha + \sin\alpha) = 0,$$

und setzen wir hierin $\alpha = 30^0$, so wird

$$y'^2 + 2x'y' = 6{,}47\, x'^2$$

und

$$y' = x'(-1 \pm 2{,}73),$$

welche Gleichung die beiden Geraden

$$y' = +1{,}73 x' \text{ und } y' = -3{,}73 x'$$

darstellt, wovon die erstere die frühere Ordinatenaxe ist. Es stellt also $y = \frac{x^2}{-x}$ die beiden Geraden $x = 0$ und $y = -x$ dar.

5) Wenn man eine krumme Fläche hat, in welcher eine mit der Axe OZ parallel laufende Gerade ganz enthalten ist, und man denkt sich durch diese Gerade eine Schnittebene gelegt, so erhält man als Durchschnittslinie mit jener Fläche eine Kurve, welche diese ganze Gerade ohne Zweifel in sich fasst. Die Gleichung einer solchen Fläche kann nur die Form einer gebrochenen Function

$$z = \frac{\varphi(x,y)}{\Psi(x,y)}$$

haben, da nur diese für $x = x_0$ und $y = y_0$ den hierfür nothwendig bestehenden Werth $z_0 = \frac{0}{0}$ annehmen kann; und wenn man mit dieser die Gleichung jener auf XY senkrechten Schnittebene

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

worin m beliebig ist, verbindet, erhält man

$$z = \frac{fx}{Fx}$$

als Gleichung der Projection der Durchschnittslinie auf XZ, welche für $x = x_0$ in $z_0 = \frac{0}{0}$ übergeht, und von der zugleich gewiss ist, dass sie die zugehörige Ordinate als Ast enthält. — Also auch aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, begreift die gleiche Kurve $y = \frac{fx}{Fx}$ jene Ordinate in sich.

Beispiel. Eine Kegelfläche durchschneide die Ebene XY in dem Kreise $0A$ (Taf. V. Fig. 5.), dessen Gleichung $y^2 + (x-1)^2 = 1$ ist; die Spitze derselben liege in K, dessen Coordinaten $y = 0$, $x = 2$, $z = 1$ sind, so ist ihre Gleichung

$$y^2 + (x - 1 - z)^2 = (1 - z)^2.$$

Wird dieselbe durch die Ebene XZ durchschnitten, so setzen wir $y = 0$, und erhalten die Durchschnittskurve

$$(x - 1 - z)^2 = (1 - z)^2,$$

oder

$$2z(2 - x) = 2x - x^2,$$

woraus

$$z = \frac{x(2 - x)}{2(2 - x)}.$$

Die Durchschnittskurve besteht aber aus den beiden Geraden $0K$ und AL, welche daher beide durch die letzte Gleichung dargestellt sein müssen; es ist also nicht nur der Werth $z = \frac{x}{2}$, sondern auch $z = \frac{0}{0}$ für $x = 2$ gültig.

6) Wir haben in den letzten vier Nummern nur nachzuweisen gesucht, dass $y_0=\frac{0}{0}$ ein wirklich bestehender Werth sei, wenn $y=\frac{fx}{Fx}$ eine Kurve darstellt; es ist daher jetzt noch die Frage zu erörtern, ob dieser Werth $y_0=\frac{0}{0}$ auch dem durch y bezeichneten Begriffe angemessen sei, wenn die gegebene Gleichung die Relation zwischen anderen, als linearen Grössen darstellt. Hierauf lässt sich antworten, dass es darauf ankommt, ob in dem Ausdrucke

$$y=\frac{M(x-x_0)}{N(x-x_0)}$$

die Factoren $x-x_0$ dem Gegenstande angemessen sind, oder nur bei dem Lösen der Aufgabe, y durch eine Formel auszudrücken, durch mathematische Operationen in dieselbe gebracht wurden, dem Gegenstande selbst aber fremd sind. Es muss diess in jedem Falle besonders untersucht werden, wie es jetzt an einigen hervorleuchtenden Beispielen geschehen soll.

Beispiel. Es sei das Dreieck ABC (Taf. V. Fig. 6.) in seinen drei Ecken unterstützt und bei P durch die Last P belastet; welchen Druck Q hat der Stützpunkt C auszuhalten, wenn das Dreieck in die gerade Linie ADB übergeht?

Nehmen wir die Seite AB als Drehaxe an, und sei der senkrechte Abstand des Angriffspunktes der Last und des Stützpunktes von ihr $PE=p$, $CD=q$, so ist

$$Q=P\frac{p}{q}.$$

Nehmen nun p und q zugleich ab, sei aber stets $p=x$ und $q=2x$, so ist $Q=P\frac{x}{2x}$, oder, so lange x nicht Null ist,

$$Q=\tfrac{1}{2}P.$$

Sobald aber $x=0$ wird, nimmt Q neben diesem Werthe auch den

$$Q=\frac{0}{0}P$$

an, oder es wird unbestimmt. In diesem Falle ist $Q=\frac{0}{0}$ ein wahrer Werth, denn in der Formel $Q=\frac{x}{2x}P$ ist das Verhältniss $\frac{x}{2x}$ ein dem Gegenstande zugehöriges, und wirklich geben auch für

$x=0$, P und C in die Punkte E und D über, und die L:
durch eine gerade Linie getragen, welche an drei Punkte
stützt ist; hierbei ist aber bekanntermassen der Druck aı
Punkt unbestimmt, wenn man nicht das noch bestehende
Bestimmungsmoment, nämlich die Elasticität der Linie, :
nimmt. — Von diesem Standpunkte aus muss auch die be
Auflösung dieser unbestimmten Aufgabe von Herrn Koss
mathematischen Journal von Crelle (I. Band, Seite 37) b
werden, welcher nämlich jene unbestimmt machenden Facto
einer ähnlichen willkührlichen Annahme, wie die $q=2p$
Zähler und Nenner entfernte. Man kann so, je nach dem
welchen man dem Verhältnisse $q:p$ gibt, ehe beide Null
beliebig viele bestimmte Grenzwerthe für Q finden, wenn
Stützpunkte in eine Gerade fallen. H. Abel und Crelle
denn auch in demselben Bande (S. 117 u. 118 ff.) die Unbı
heit dieser Aufgabe auf anderem Wege nach, und letzt
stimmte die Grenzen, zwischen welchen die Belastung je
terstützungspunktes schwanken kann, wenn man die L
vollkommen starr betrachtet.

Beispiel. Es ist der Inhalt eines abgestutzten Kı
bestimmen, wenn er in einen Cylinder übergeht.

Seien R und r die Radien der beiden Grundflächen
Höhe des abgestutzten, x die Höhe des Ergänzungs- und
die Höhe des ergänzten Kegels, so ist

$$H=h\frac{R}{R-r} \text{ und } x=h\frac{r}{R-r};$$

daher der körperliche Inhalt des ergänzten Kegels

$$=\tfrac{1}{3}R^2\pi H=\tfrac{1}{3}\pi h\frac{R^3}{R-r},$$

der des Ergänzungskegels

$$=\tfrac{1}{3}r^2\pi x=\tfrac{1}{3}\pi h\frac{r^3}{R-r},$$

und daraus der des abgestutzten Kegels

$$K=\tfrac{1}{3}\pi h\frac{R^3-r^3}{R-r}.$$

Geht derselbe in einen Cylinder über, oder wird $r=R$, so

$$K=\tfrac{1}{3}\pi h\frac{0}{0}$$

oder unbestimmt, während wir doch wissen, dass der Inhalt ein ganz bestimmter ist. Da aber

$$R^3 - r^3 = (R - r)(R^2 + Rr + r^2),$$

so nimmt

$$K = \tfrac{1}{3}\pi h \frac{(R^2 + Rr + r^2)(R - r)}{R - r}$$

für $r = R$ auch den bestimmten Werth

$$K = \pi h R^2$$

an. — In diesem Falle war es dem Gegenstande angemessen, dass h mit der zweiten Potenz einer Länge multiplicirt wurde, um die dritte Potenz einer solchen oder einen Körper zu erhalten. Durch die Formel erhalten wir aber erst eine vierte Potenz, die wir durch Division auf eine dritte herabbringen müssen. Der unbestimmt machende Faktor $\frac{R-r}{R-r}$ rührt nur daher, dass wir in der Formelentwickelung K als die Differenz zweier Kegel ansahen, die für $r = R$ beide unendlich wurden, und dass dann $\infty - \infty$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erschien; oder, wenn wir noch weiter zurückgehen, daher, dass die Verhältnisse $\frac{R}{R-r}$ und $\frac{r}{R-r}$, welche zur Bestimmung von H und x dienten, unendlich wurden, so dass die Differenz der Kegel unbestimmt werden musste. — Ein hiermit übereinstimmender Beweis, dass $\frac{R-r}{R-r}$ ein dem Gegenstande nicht zugehöriger Faktor ist, ist der, dass man die Formel

$$K = \tfrac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

unmittelbar erhalten kann, wenn man von der abgestutzten dreiseitigen Pyramide ausgehend, diese als aus drei ganzen Pyramiden von der gemeinschaftlichen Höhe h zusammengesetzt betrachtet.

Beispiel. Die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Tangente einer Kurve $y = fx$ gegen die Axe OX zu finden.

Lösen wir erst diese Aufgabe für eine Sekante, welche durch die Punkte x, y und $x + h$, $y + k$ geht, so finden wir aus

$$y + k = fx + hf'x + \frac{h^2}{2} f''x + \ldots:$$

$$\frac{k}{h} = \frac{hf'x + \frac{h^2}{2} f''x + \ldots}{h}.$$

Setzt man hierin $h=0$, so wird

$$\frac{k}{h}=f'x.\frac{h}{h},$$

was die zwei Werthe hat:

$$\frac{k}{h}=\frac{0}{0} \text{ und } \frac{k}{h}=f'x;$$

und wirklich ist die Sekante unbestimmt, wenn nur ein Punkt g geben ist, durch welchen sie gehen soll. Da aber die Tange die Grenze ist, welcher sich die Sekante bei abnehmendem h imn mehr nähert, nicht aber die Linie, in welche die Sekante üb geht, wenn ihre zwei Durchschnittspunkte in einen zusammenf len, weil diese Linie plötzlich unbestimmt wird, so ist nur (Grenzwerth

$$\frac{k}{h}=f'x$$

gültig, und der andere $\frac{k}{h}=\frac{0}{0}$ rührt von der Definition der Ta gente als einer Sekante her.

II.

Von der Gestalt der durch die Gleichung $z=\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ dargestellten Flächen, bei welchen für den besondere Werth $x=x_0$ und $y=y_0$, $z_0=\frac{0}{0}$ wird.

Wenn der Ausdruck

$$z=\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$$

für $x=x_0$ und $y=y_0$ den Werth $z_0=\frac{0}{0}$ annimmt, so sucht ma den bestimmten Werth, indem man von dem bestimmten Wertl

$$z=\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}$$

zur Grenze

$$z_0=\frac{df(x_0,y_0)}{dF(x_0,y_0)}$$

übergeht, und findet, wenn man

$$\frac{df(x_0, y_0)}{dx}=p_0, \quad \frac{df(x_0, y_0)}{dy}=q_0,$$

$$\frac{dF(x_0, y_0)}{dx}=P_0, \quad \frac{dF(x_0, y_0)}{dy}=Q_0$$

$$z_0=\frac{p_0 dx+q_0 dy}{P_0 dx+Q_0 dy},$$

venn man den dem x_0 und y_0 entsprechenden Werth von $\frac{dy}{dx}$
' bezeichnet, auch

$$z_0=\frac{p_0+q_0 y_0'}{P_0+Q_0 y_0'}.$$

ıge nun hierin y_0' selbst unbestimmt bleibt, und es ist das ırliche Verhältniss, welches man den unendlich kleinen hsen dy und dx unter einander gibt, so lange ist im Allge- ı auch z_0 unbestimmt und kann zwischen

$$z_0=0 \text{ und } z_0=\pm\infty$$

$$y_0'=-\frac{p_0}{q_0} \text{ und } y'_0=-\frac{P_0}{Q_0}$$

ıken.

'ir wollen nun dieses Bekannte uns geometrisch vorzu- ı suchen. — Denken wir uns, ähnlich wie in I. A. 3.) und . durch $u=f(x, y)$ eine Fläche $MNDE$ (Taf. V. Fig. 7.) und $U=F(x, y)$ eine andere $PQDE$ dargestellt, welche die XY in den Kurven MN [$f(x, y)=0$] und PQ [$F(x, y)=0$], ch unter einander in der Kurve DE, deren Projection auf $D'E'$ [$f(x, y)=F(x, y)$] sei, schneiden; denken wir uns fer- ı einer beliebigen Stelle auf XY eine Senkrechte errichtet, elcher jene zwei Flächen zwei Stücke u und U abschneiden ı, und denken wir uns endlich die Länge $z=1.\frac{u}{U}$ berech- ıd auf derselben Senkrechten von XY an aufgetragen; so wir im anderen Endpunkte einen Punkt der Fläche $z=\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$, ır alle anderen Punkte auf gleiche Weise construirt werden. 'ollen die Flächen

$$u=f(x, y), \quad U=F(x, y) \text{ und } z=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

; der Kürze halber die Flächen u, U und z nennen.

Suchen wir uns nun einen allgemeinen Begriff von der Gestalt der Fläche z zu machen. Vorerst wird dieselbe für $f(x, y)=0$ oder in MN die Ebene XY schneiden, dagegen für $F(x, y)=0$ oder in der durch PQ gelegten, auf XY senkrechten Cylinderfläche unendlich sein, und zwar im Allgemeinen $\pm\infty$, da auf den beiden Seiten von PQ U von Null aus im Allgemeinen verschiedene Zeichen annimmt. Ferner wird z in der durch DE oder $D'E'$ gelegten, auf XY senkrechten Cylinderfläche den Werth 1 annehmen. Für den Punkt A, den Durchschnittspunkt von MN, PQ und DE finden so schon vier Werthe von z statt, nämlich $z=0$, $\pm\infty$ und 1. Es ist aber für A, dessen Coordinaten x_0 und y_0 seien, $u=0$ und $U=0$, daher

$$z_0=\frac{f(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)}=\frac{0}{0}$$

oder unbestimmt. Geht man von A aus auf MN vorwärts, so bekommt man $z=0$, auf PQ $z=\pm\infty$ und auf den zwischenliegenden Kurven im Allgemeinen alle Werthe für z zwischen 0 und $\pm\infty$. Geht man von A in solchen Kurven vorwärts, welche überall einen constanten Werth $z=c$ liefern, deren Gleichung also

$$c=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

ist, und errichtet auf denselben Cylinderflächen, so sind die in denselben liegenden, mit XY parallelen Kurven Elemente der Fläche z. Geht man auf einer anderen durch A gelegten Kurve oder Geraden vorwärts, so erhält man keinen constanten Werth für z. Der Grenzwerth z_0 für A ist aber demjenigen gleich, welchen die der früheren Cylinderflächen gab, an welche die neue in A tangirt; er hängt von der Ausgangsrichtung, d. i. von y_0'. ab. Betrachtet man die Reihenfolge der ersten Cylinderflächen, so kann man sich die Fläche z auf folgende Art entstanden denken. Eine die Gestalt ändernde Kurve, deren Gleichung $c=\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$ ist, und welche Anfangs als MN in XY selbst liegt, entfernt sich nach der positiven und negativen Seite hin von XY, stets mit dieser Ebene parallel und stets die in A errichtete Senkrechte durchschneidend, bis sie für $c=\pm\infty$ die Gestalt PQ annimmt. Taf. V. Fig. 8. gibt in Verbindung mit Fig. 7. ein Bild dieser Fläche. Hierbei und bei den folgenden ähnlichen ist die Fläche stets durch eine kreisförmige Cylinderfläche begrenzt gezeichnet, deren Axe die Ordinate in A ist.

Beispiel 1. Als einfachstes Beispiel diene die Fläche

$$z=\frac{y}{x},$$

das hyperbolische Paraboloid. Für $x_0=0$ und $y_0=0$ wird $z_0=\frac{0}{0}$; differenzirt man, so wird, da

$$p_0=0,\ q_0=1,\ P_0=1,\ Q_0=0$$

ist:

$$z_0=\frac{y_0'}{1}=y_0'$$

und kann also mit dem beliebigen y_0' jeden Werth annehmen. — Um die Gestalt der Fläche näher zu bestimmen, finden wir, dass $u=y$ eine Ebene, welche XY in $y=0$, d. i. in der Axe $0X(MN)$ (Taf. V. Fig. 9.), die Ebene YZ in der Geraden $u=y$ schneidet, also den Rechten $Y0Z$ halbirt. Ferner ist $U=x$ ebenfalls eine Ebene, welche XY in $x=0$, d. i. in der Axe $0Y(PQ)$ schneidet und den Rechten $X0Z$ halbirt. — Um DE zu erhalten, setzt man $z=1$, wonach $x=y$ die Gerade $D'E'$ gibt, welche den Rechten $X0Y$ halbirt. Wir geben ferner z nach und nach verschiedene constante Werthe c und finden $y=cx$, die Gleichung einer Geraden, welche die Axe $0Z$ schneidet und dabei für $c=0$ $x=0$ wird, also mit MN zusammenfällt, für $c=1$ $x=y$ mit $D'E'$, für $c=10$, $y=10x$, für $c=\infty$ $0=x$ wird, also mit PQ zusammenfällt. Ebenso finden wir für $c=-1$, $c=-10$, $c=-\infty$: $y=-x$, $y=-10x$, $-0=x$. Die Fläche entsteht also, indem eine Gerade, welche stets durch $0Z$ geht und mit XY parallel ist (Taf. V. Fig. 10.), sich so von dieser Ebene auf- und abwärts bewegt, dass sie im ersten Falle von dem positiven Theile der Axe $0X$ zu dem positiven, im zweiten zum negativen Theile der Axe $0Y$ übergeht, und so die Ebene YZ, welche sie stets in $0Z$ schneidet, zur Asymptote hat und für $z=\pm\infty$ mit ihr zusammenfällt. Ebenso hat diese Fläche auch die Ebene XY zur Asymptote.

Beispiel 2. Es sei

$$z=\frac{\log x+\log y}{x+2y-3},$$

so ist für $x_0=1$ und $y_0=1$: $z_0=\frac{0}{0}$. Differenzirt man, so wird

$$z_0=\frac{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}y_0'}{1+2y_0'}=\frac{1+y_0'}{1+2y_0'},$$

was für $y_0'=-1$ $z_0=0$ und für $y_0'=-\frac{1}{2}$ $z_0=\pm\infty$ gibt. Eben so tritt für $x_0=2$ und $y_0=0{,}5$ Unbestimmtheit ein. — Um die Fläche z näher zu untersuchen, finden wir vorerst, dass die Fläche $u=\log.x+\log y=\log.xy$ mit XY die Durchschnittskurve $0=\log.xy$ oder $1=xy$ hat, also die gleichseitige Hyperbel MN (Taf. V. Fig. 11.), deren einer Scheitel in A liegt. Alle anderen mit XY parallele Schnittebenen, für welche $u=c$, geben ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, deren Gleichung $xy=e^c$; ihre Axe wächst also mit c und wird <1 für $c<0$. Die Projection der Durchschnittskurve der durch $0Z$ gehenden und den Winkel $X0Y$ halbirenden Ebene $x=y$ mit dieser Fläche u auf XZ hat die Gleichung $u=\log.x^2$, ist also eine logarithmische Linie mit den zwei Aesten CD und EF (Taf. V. Fig. 12). Man kann sich daher die Fläche durch eine gleichseitige Hyperbel mit veränderlicher Axe erzeugt denken, welche sich parallel mit XY so bewegt, dass ihre beiden Scheitel jene doppellastige logarithmische Linie beschreiben, sie selbst aber die Ebenen XZ und YZ zu Asymptoten hat. — Ferner ist die Fläche $U=x+2y-3$ eine Ebene, welche die Ebene XY in der Geraden PQ (Taf. V. Fig. 11.), deren Gleichung $x+2y-3=0$ ist, die Axe $0Z$ aber im Punkte $U=-3$ schneidet. Die Linien MN und PQ schneiden sich in den Punkten $A(x_0=1,\ y_0=1)$ und $a(x_0=2,\ y_0=0{,}5)$, und es gehören daher die in beiden errichteten Ordinaten zur Fläche z. — Die Fläche $z=\frac{\log x+\log y}{x+2y-3}$ endlich liegt nur in den Räumen $X0Y$ und $X'0Y'$. Geben wir z nach und nach verschiedene constante Werthe c, so erhalten wir für $c=1$ die Gleichung der Kurve $D'E'$: $x+2y-3=\log.xy$, welche aus zwei Theilen, nämlich einer geschlossenen, durch A gehenden Kurve und einem offenen, hyperbelähnlichen auf der anderen Seite des Ursprungs liegenden Aste besteht. Für $c=\infty$ ist $x+2y-3=0$, welche Gleichung die Linie PQ ausdrückt, aber auch $\log.xy=\infty$, welche beide Axen XX' und YY' darstellt. Von diesen beiden Linien gilt nur die erste für $\pm\infty$, die zweite dagegen vertheilt sich zu Stücken für $+\infty$ und $-\infty$. Taf. VI. Fig. 13. soll eine möglichst deutliche perspectivische Ansicht dieser Fläche geben, bei deren Entstehung die erzeugende mit XY parallele und die Ordinate in A (sowie auch die in a) stets schneidende Kurve auf folgende Art ihre Form nach und nach ändert. Der positive, in $X0Y$ liegende Ast ist für $z=0$ der Hyperbelast MN, welcher für $z>0$ sogleich die Gestalt einer

geschlossenen Kurve, für $z=1$ die Gestalt $D'E'$ und für $z=+\infty$ die des Dreiecks POQ als Grenze annimmt; für $z<0$ dagegen nähert sich dieser Hyperbelast rasch den beiden Asymptoten und hat für $z=-\infty$ die Gestalt der gebrochenen Geraden $XQPY$ zur Grenze. Der negative in $X'OY'$ liegende Ast, welcher für $z<-0{,}2$ imaginär ist, bildet für $z=-0{,}2$ einen Punkt ($x=-5{,}2$, $y=-2{,}6$); bei zunehmendem z geht derselbe in eine wachsende geschlossene Kurve und diese für $z=0$ in den zweiten Hyperbelast MN über. Dieser schliesst sich dann immer mehr an seine Asymptoten an und hat für $z=+\infty$ dieselben, nämlich die gebrochene Gerade $X'OY'$ zur Grenze. — Die durch OZ gelegte und den Winkel XOY halbirende Ebene schneidet die Fläche in der in A errichteten Ordinate und der aus zwei Aesten bestehenden Kurve, welche in Taf. V. Fig. 12. durch die punktirten Linien zz dargestellt sind.

Man sieht an diesen Beispielen, wie man für verschiedene Werthe von z auf verschiedenen Kurven zur Ordinate in A gelangt; also auch, wie umgekehrt für dieselbe alle Werthe von z gelten, dieselbe ganz in der Fläche liegt.

Geben wir nun wieder in der Theorie und zwar zuerst auf dem analytischen Wege weiter. Cournot in seiner Theorie der Functionen sagt, dass

$$z_0=\frac{p_0+q_0y_0'}{P_0+Q_0y_0'}$$

unabhängig von dem willkührlichen y_0', also bestimmt sei, wenn p_0 und P_0 oder q_0 und Q_0 gleich Null seien. Diese Bedingung ist, wie man leicht sieht, zu eng; es findet vielmehr schon Bestimmtheit statt, wenn

$$\frac{p_0}{P_0}=\frac{q_0}{Q_0}$$

ist, welches Verhältniss $=a$ sein möge. Dann ist nämlich

$$p_0=aP_0,\ q_0=aQ_0 \text{ und } z_0=\frac{aP_0+aQ_0y_0'}{P_0+Q_0y_0'}=a.$$

Die obigen Bedingungen sind nur zwei specielle Fälle von letzterer. Dabei ist z_0 bestimmt, welchen Werth auch y_0' annehmen möge, nur für

$$y_0' = -\frac{p_0}{q_0} = -\frac{P_0}{Q_0} \text{ wird } z_0 = \frac{0}{0},$$

und es tritt wieder Unbestimmtheit ein.

Die geometrische Betrachtung führt uns zu demselben Resultate. Denken wir uns an die Flächen u und U in A Tangentialebenen gelegt, so geben diese, wenn man ihre Ordinaten statt der der ursprünglichen Flächen betrachtet, dieselben Grenzwerthe von z für den Punkt A von 0 bis $\pm\infty$. Ihre Durchschnittslinien mit XY sind Tangenten der Durchschnittskurven MN und PQ im gemeinschaftlichen Punkte A. Tritt aber der Fall ein, dass die Tangentialebenen dieselbe Durchschnittslinie TT (Taf. VI. Fig. 14.) mit XY haben und nur verschiedene Winkel mit derselben bilden, so ist für alle Stellen das Verhältniss ihrer zwei zusammengehörigen Ordinaten dasselbe, nämlich $=a$, und alle Grenzverhältnisse $z_0 = \frac{u}{U}$ für die beiden ursprünglichen Flächen, auf welcher Kurve man sich auch dem Punkte A nähern möge, nehmen denselben gemeinschaftlichen Werth a an. Da jedoch die Tangentialebenen für ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie TT mit XY den Werth $z = \frac{0}{0}$ geben, da ferner die Kurven MN und PQ welche bei A an TT tangiren, überall, also auch bei A, $z=0$ und $z = \pm\infty$ liefern, so wird man hier die verschiedensten Werthe von z_0 erhalten, je nachdem man sich diesem Punkte auf irgend einer aber stets an TT tangirenden Kurve nähert.

Die so entstehende Fläche z unterscheidet sich nur dadurch von den früheren, dass die erzeugende, mit XY parallele, ihre Gestalt ändernde Kurve sich so an die Ordinate in A anlehnt dass sie immer an derjenigen Ebene, welche XY senkrecht in TT schneidet, tangirt. In jeder nicht in dieser Ebene liegenden Richtungslinie, in welcher man sich A nähert, erhält man ein und denselben bestimmten Werth a für z_0.

Für diesen Fall fallen also die Tangenten an den Durchschnittskurven MN und PQ in A, für welche zur Bestimmung von y_0 die Gleichungen

$$p_0 + q_0 y_0' = 0 \text{ und } P_0 + Q_0 y_0' = 0$$

gelten, zusammen, wonach

$$y_0' = -\frac{p_0}{q_0} \text{ und } y_0' = -\frac{P_0}{Q_0}$$

gleich sein müssen, woraus

$$\frac{p_0}{P_0}=\frac{q_0}{Q_0}=a$$

folgt. Ist diese gemeinschaftliche Tangente TT mit der Axe $0X$ parallel, so ist $y_0'=0$, also auch $p_0=0$, $P_0=0$; ist sie dagegen mit $0Y$ parallel, so ist $y_0'=\infty$, also $q_0=0$, $Q_0=0$; was also mit den obigen speciellen Fällen übereinstimmt, wie das vorhergehende mit dem allgemeinen.

Beispiel 3. Hat man

$$z=\frac{y-x}{x-y},$$

so wird für $y_0=x_0$, $z_0=\frac{0}{0}$; zugleich tritt aber auch der bestimmte Werth $z_0=-1$ ein, welchen man ohne zu differenziren findet, da hier die gemeinschaftlichen Factoren $y-x$ deutlich hervortreten. Die Fläche $u=y-x$ ist aber eine Ebene, welche XY in $y=x$ und XZ in $u=-x$ schneidet; ebenso ist $U=x-y$ eine Ebene, welche XY in derselben Geraden $y=x$, XZ aber in $U=x$ schneidet. Beide Flächen schneiden also XY in derselben Geraden $y=x$ unter gleichen, aber auf verschiedenen Seiten liegenden Winkeln, weshalb das Resultat $z=-1$ leicht zu übersehen ist. Zu dieser Ebene $z=-1$ gehört aber noch die Ebene $y=x$ als zweiter Ast der Fläche z, was noch deutlicher hervortritt, wenn man ähnlich wie in I. B. 3.) die Function $z=\frac{y-x}{x-y}$ aus der im Beispiel 1. discutirten $z=\frac{y}{x}$ entstehen lässt, indem dabei die beiden Flächen u und U (Taf. V. Fig. 9.) ihre Lage nach und nach so ändern, dass die Geraden MN und PQ in die $D'E'$ zusammenfallen. Hierdurch schliesst sich das dort entstandene hyperbolische Paraboloid (Taf. V. Fig. 10.) immer enger an seine Asymptotenebenen $x=0$ und $z=0$ an, bis es endlich mit denselben zusammenfällt, wenn diese zugleich selbst ihre Lage in die $x=y$ und $z=-1$ umgeändert haben. — Statt des Punktes A haben wir hier eine Linie $x=y$.

Beispiel 4. Ist

$$z=\frac{\log x+\log y}{\frac{3}{2}(x+y-2)},$$

so wird für $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{0}{0}$. Differenzirt man, so wird, da $p_0 = \frac{1}{x_0} = 1$, $q_0 = \frac{1}{y_0} = 1$, $P_0 = \frac{3}{2}$ und $Q_0 = \frac{3}{2}$:

$$z_0 = \frac{1 + y_0'}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} y_0'}.$$

Hierbei ist

$$\frac{p_0}{P_0} = \frac{q_0}{Q_0} = a = \frac{2}{3},$$

daher

$$z_0 = \frac{2}{3};$$

für $y_0' = -1$ ist noch $z_0 = \frac{0}{0}$. — Um diese Resultate an der Gestalt der Fläche bestätigt zu finden, bemerken wir, dass wir fast das Beispiel 2. wieder haben. Hier, wie dort, ist $u = \log x + \log y$ jene logarithmische Fläche (Taf. V. Fig. 11. und 12.), hier ist $U = \frac{3}{2}(x + y - 2)$ ebenfalls eine Ebene, welche wie dort die Axe $0Z$ in $z = -3$ schneidet; ihre Durchschnittslinie $P'Q'$ mit XY jedoch hat die Gleichung $0 = x + y - 2$, geht also auch durch den Punkt A, für welchen $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$, tangirt aber hier die Kurve MN. Es tritt also der Fall ein, dass MN und $P'Q'$ eine gemeinschaftliche Tangente in A haben, nämlich die Gerade $P'Q'$ selbst. Dem entsprechend ist auch die Gestalt der Fläche z bei der Ordinate in A beschaffen. Nimmt man mehrere horizontale Schnitte, gibt also z verschiedene constante Werthe c, so erhält man Kurven, den entsprechenden in Beispiel 2. sehr ähnlich, aber mit dem Unterschied, dass hier diese erzeugende veränderliche Kurve, welche mit XY parallel sich aufwärts bewegt, stets bei dem Durchschnittspunkte mit der Ordinate in A an die Ebene $x + y - 2 = 0$ tangirt. Für $z = \frac{2}{3}$ wird dieselbe zu einem Punkte und geht dann bei wachsendem z auf die andere Seite jener Ordinate und endlich für $z = +\infty$ zu dem Dreiecke $Q'0P'$ über. Die Gestalt der Fläche ist daher der in Taf. VI. Fig. 13. dargestellten sehr ähnlich, nur dass der dort schon enge Hals hier für $z = \frac{2}{3}$ die Weite eines Punktes annimmt.

Beispiel 5. Hat man

$$z = \frac{\sqrt{2y^2 - x}}{y^2 + x^2},$$

so wird für $x_0=0$ und $y_0=0$: $z_0=\frac{0}{0}$. Ferner ist

$$p_0=-1,\ q_0=2\sqrt{2}y_0=0,\ P_0=2x_0=0,\ Q_0=2y_0=0,$$

daher

$$z_0=\frac{-1+0.y_0'}{0.y_0'}=\mp\infty,$$

je nachdem $y_0=0$ Grenzwerth von $y>0$ oder von $y<0$ ist; nur für $y_0'=-\frac{p_0}{q_0}=+\infty$ ist $z_0=\frac{0}{0}$. — Untersuchen wir nun die Flächen. Vorerst schneidet die Fläche u die Ebene XY in $y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ (MN in Taf. VI. Fig. 15), einer Parabel vom Parameter $\frac{1}{\sqrt{2}}$, die Ebene XZ nach der Geraden $u=-x$ (uu in Taf. VI. Fig. 16.) und für $z=c$ erhalten wir als mit XY parallele Schnitte die Parabeln $y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+c)$, von dem constanten Parameter $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Diese Fläche u, eine parabolische Cylinderfläche, entsteht also, indem die Parabel $y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}x$, welche in der Ebene XY liegt, deren Scheitel der Ursprung und deren Axe $0X$ ist, sich so an der in der Ebene XZ liegenden Geraden $u=-x$ hinbewegt, dass ihr Scheitel die letztere beschreibt, ihre Fläche und Axe aber in stets paralleler Lage bleiben. — Die Fläche U hat mit der Ebene XY die Kurve $0=y^2+x^2(PQ)$ gemein, welche aber der Punkt $x=0$, $y=0(A)$ ist. Sie schneidet die Ebene XZ in der Parabel $U=x^2$ (UU in Taf. VI. Fig. 16.), und jeder mit XY parallele Schnitt gibt für $z=c$ den Kreis $c=y^2+x^2$. Die Fläche ist daher ein Rotationsparaboloid, das durch Drehung der Parabel $U=x^2$ um die Axe $0Z$ entsteht; sein Scheitel berührt die Ebene XY. — In diesem Falle ist also die Axe $0Y$ die gemeinschaftliche Tangente von MN und PQ, da jede durch den Punkt A gehende Gerade als Tangente der zu einem Punkte gewordenen Kurve PQ betrachtet werden kann. Es tritt also hier für z_0 ein bestimmter Werth ($\pm\infty$) ein; nur wenn man sich in Kurven, die an die Ebene YZ tangiren, diesem Punkte A nähert, bekommt man für z_0 alle Werthe zwischen $+\infty$ und $-\infty$. — Um die Gestalt der Fläche näher kennen zu lernen, geben wir wieder z constante Werthe c und erhalten die Kurve

$$c(y^2+x^2)=\sqrt{2}y^2-x,$$

oder

$$y^2(c-\sqrt{2})+c\left(x+\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{4c},$$

ein Kegelschnitt, dessen Hauptaxe die der x und dessen einer Scheitel der Ursprung ist. Diese Kurve ist für $c=0$ die Parabel $MN: y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}x$; für $c=1$ eine Hyperbel $D'E': -0{,}6y^2+(x+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, deren zweiter Scheitel in $x=-1$ liegt; für $c=\sqrt{2}=1{,}4$ ist sie $\sqrt{2}x^2+x=0$, ein Paar von zwei Geraden $x=0$ und $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $=-0{,}7$; für $c=2$ ist sie eine Ellipse $0{,}3y^2+(x+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$, deren zweiter Scheitel in $x=-\frac{1}{2}$ liegt; für $c=+\infty$ geht diese Ellipse in den Punkt $A: x^2+y^2=0$ über. Für $c<0$ ist die Kurve stets eine Ellipse und wird z. B. für $c=-1$, $1{,}4y^2+(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$; für $c=-\infty$ aber wieder zum Punkte $A: x^2+y^2=0$. Durchschneidet man die Fläche z mit der Ebene $XZ(y=0)$, so erhält man die Kurve $z=-\frac{x}{x^2}$, welche aus der Geraden $x=0$ (der Axe $0Z$) und der gleichseitigen Hyperbel $zx=-1$ besteht. — Man kann sich daher die Fläche (Taf. VI. Fig. 17.) entstanden denken, indem die Erzeugungskurve $c(y^2+x^2)=\sqrt{2}y^2-x$ (ein Kegelschnitt), welche in der Ebene XY eine Parabel ist, die den Scheitel im Ursprung und zur Axe $0X$ hat, sich parallel mit XY so bewegt, dass ihre Axe stets in XZ und ihre Scheitel in der Axe $0Z$ und jener Hyperbel $xz=-1$ sich befinden, indem sie dabei ihre Gestalt so ändert, dass sie für $c>0$ von der Parabel sogleich in eine Hyperbel übergeht, deren Hauptaxe $=\infty$; dass mit wachsendem c die Hauptaxe der Hyperbel ab- und die Nebenaxe zunimmt, und für $c=\sqrt{2}$ dieselbe in das Paar der zwei parallelen Geraden $x=0$ und $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ übergeht; dass mit weiter wachsendem c sich eine Ellipse mit unendlich grosser Nebenaxe bildet, welche letztere aber wieder beständig abnimmt, sowie auch die Hauptaxe, so dass für $c=+\infty$ die Ellipse zu einem Punkte geworden; dass endlich für $c<0$ aus der Parabel eine Ellipse entsteht, welche für $c=-\infty$ ebenfalls in einen Punkt übergeht. In allen diesen Lagen und Gestalten berührt diese Erzeugungskurve die Ebene YZ in der in A errichteten Ordinate. Letztere gehört ganz zur Fläche und bildet zugleich ihre Asymptote, so dass $z_0=\frac{0}{0}$ und $z_0=\pm\infty$ der unbestimmte und bestimmte Werth von z_0 sind.

Gehen wir nun in der Theorie weiter und zwar zuerst wieder auf dem analytischen Wege. Ist in

$$z_0=\frac{p_0+q_0y'_0}{P_0+Q_0y'_0}$$

p_0, q_0, P_0 und Q_0 gleich Null, so wird $z_0=\frac{0}{0}$. Da wir also durch einmalige Differentiation keinen bestimmten Werth erhalten haben, so nehmen wir

$$z=\frac{p+qy'}{P+Qy'}$$

als ursprünglichen Ausdruck, der für $x=x_0$ und $y=y_0$ unbestimmt wird, differenziren wir vorher und erhalten, wenn wir

$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,\quad \frac{dq}{dy}=t$$

und analog

$$\frac{dP}{dx}=R,\quad \frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=S,\quad \frac{dQ}{dy}=T$$

setzen und diese dem $x=x_0$ und $y=y_0$ entsprechenden Werthe wieder mit r_0, s_0, t_0, R_0, S_0 und T_0 bezeichnen:

$$z_0=\frac{r^0+2s_0y'_0+t_0y'^2_0}{R_0+2S_0y'_0+T_0y'^2_0},$$

weil die Glieder q_0y'' und Q_0y'' wegen q_0 und $Q_0=0$ wegfallen. Dieser Werth von z_0 ist im Allgemeinen unbestimmt, indem man y'_0 jeden beliebigen Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ beilegen kann; jedoch ist damit nicht gesagt, dass auch z_0 zwischen $+\infty$ und $-\infty$ schwanke. Kann der Zähler $=0$ werden, oder hat $r_0+2s_0y'_0+t_0y'^2_0=0$ einen reellen Werth von y'_0 zur Wurzel, so kann auch $z_0=0$ werden; ebenso kann $z_0=\infty$ werden, wenn ein Werth von y'_0 den Nenner $R_0+2S_0y'_0+T_0y'^2_0$ zu Null machen kann. Findet letzteres aber nicht statt, so liegen die unendlich vielen möglichen Werthe von z_0 zwischen Grenzen, welche man findet, wenn man die Werthe der Veränderlichen y'_0 sucht, für welche z_0 ein Maximum und Minimum wird. Haben endlich Zähler und Nenner gleiche Wurzeln, d. h.

$$\frac{r_0}{R_0}=\frac{s_0}{S_0}=\frac{t_0}{T_0}=a,$$

so ist $z_0=a$ ein bestimmter Werth.

Die geometrische Betrachtung zeigt uns in Uebereinsti mung mit diesem Folgendes. Wenn die beiden Flächen u und im Punkte A die Ebene XY nicht schneiden, sondern nur beri ren, so können uns die Tangentialebenen nicht mehr wie bisl z_0 bestimmen, weil sie beide ganz in XY fallen. Und wirkli muss dann $du=0$ und $dU=0$, also auch $z_0=\frac{du}{dU}=\frac{0}{0}$ werden. Wir haben dann den Fall bei Flächen, welcher dem in I. A. für Linien behandelten entspricht. Denken wir uns nämlich C linderflächen durch die Ordinate in A gelegt, so schneiden a diese die beiden Flächen in Kurven, welche die in der Ebene X an jene Cylinderflächen gelegte Tangenten in A berühren; v bekommen desswegen für diese letzteren nach I. A. 3) einen b stimmten Grenzwerth für z_0 auf jeder Cylinderfläche, welche al im Allgemeinen unter einander verschieden sind; ebenso wie v vorhin bei der entsprechenden willkührlichen Annahme von verschiedene Werthe von z_0 erhielten. Hat man diese Cylind flächen so gelegt, dass auf ihnen überall z constant ist, so ist d resultirende Kurve mit XY parallel. Unsere Fläche kann also ga wie alle früheren entstanden gedacht werden, nämlich dadurc dass sich die ihre Gestalt ändernde Erzeugungskurve mit XY p rallel und stets die in A errichtete Ordinate durchschneidend, dieser hinbewegt, jedoch zwischen bestimmten Grenzen, welc freilich auch $\pm\infty$ sein können. — Liefern alle beliebig durch d Ordinate in A gelegte Cylinderflächen denselben Grenzwerth für so fallen beide Grenzen von z_0 zusammen und die Fläche z tang die Ebene $z=z_0$ in ihrem Durchschnittspunkte mit der Ordina in A. — In diesem Falle müssen

$$d^2u=dx^2(r_0+2s_0y'_0+t_0y'^2_0)$$

und

$$d^2U=dx^2(R_0+2S_0y'_0+T_0y'^2_0)$$

für gleiche Werthe von y'_0 stets unter einander dasselbe Ve hältniss $\frac{d^2u}{d^2U}=z_0$ haben, oder es muss

$$r_0+2s_0y'_0+t_0y'^2_0=a\,(R_0+2S_0y'_0+T_0y'^2_0)$$

sein. Dieses ist z. B. der Fall bei Rotationsflächen, bei den alle durch die Axe gelegten Ebenen gleiche Durchschnittskurve also auch gleiche Grenzwerthe z_0 geben. Die Fläche z ist da wieder eine Rotationsfläche. Die Ordinate in A gehört aber st und zwar in diesem Falle als isolirte Linie aus den in I. darg legten Gründen zur Fläche.

Beispiel 6. Setzt man in

$$z=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$x_0=0$ und $y_0=0$, so wird $z_0=\frac{0}{0}$; da ferner

$$p_0=0,\ q_0=2y_0=0,\ P_0=2x_0=0 \text{ und } Q_0=2y_0=0,$$

so ist

$$z_0=\frac{p_0+q_0y'_0}{P_0+Q_0y'_0}=\frac{0}{0}.$$

Bei nochmaliger Differentiation ergibt sich

$$r_0=0,\ s_0=0,\ t_0=2,\ R_0=2,\ S_0=0 \text{ und } T_0=2,$$

daher

$$z_0=\frac{2y'^2_0}{2(1+y'^2_0)}=\frac{y'^2_0}{1+y'^2_0}.$$

Das Minimum dieses Ausdrucks ist $z_0=0$ für $y'_0=0$, und das Maximum $z_0=1$ für $y'^0=\pm\infty$.

Um die geometrische Bedeutung dieser Resultate zu finden, emerkt man, dass die Fläche $u=y^2$ die Ebene XY in der Geaden $y=0$ (MN in Taf. VI. Fig. 18.), die Ebene YZ und alle amit parallelen aber in der Parabel $u=y^2$ schneidet; diese Fläche ntsteht also, indem sich die in der Ebene YZ liegende Parabel $u=y^2$, deren Axe OZ und deren Scheitel der Ursprung, so in paalleler Lage bewegt, dass der Scheitel die Axe OX beschreibt. Die Fläche ist daher die schon in Beispiel 5. vorgekommene paabolische Cylinderfläche, nur mit veränderter Lage der Axe. — Die Fläche $U=x^2+y^2$ ist das ebenfalls in Beispiel 5. vorgekomnene Rotationsparaboloid, dessen Axe OZ und dessen Scheitel er Ursprung. Taf. VI. Fig. 18. giebt eine Vorstellung beider Fläben; der Punkt A liegt diessmal im Ursprung. — Die Fläche z rifft die Ebene XY in der Geraden $y=0$. Gibt man z verschieene constante Werthe c, so erhält man die Kurven

$$y^2(1-c^2)=cx^2 \text{ oder } y=\pm\sqrt{\left(\frac{c}{1-c^2}\right)}x,$$

. i. ein System zweier sich im Ursprung schneidender Geraden; ir $c=1$ wird $x=0$, welche Gerade die Projection $D'E'$ der Durchchnittslinie der beiden Flächen u und U auf XY darstellt; für >1 ist y imaginär. Die Fig. 19. in Taf. VI. giebt ein Bild die-

ser Fläche z, welche also entsteht, indem ein System zweier mit XY paralleler Geraden, welche sich stets in der Axe OZ schneiden und gleiche Winkel mit der Ebene XZ bilden, sich so an dieser Axe OZ hinaufbewegen, dass sie in der Ebene XZ nur eine Gerade, die Axe OX, bilden, mit wachsendem z aber die mit OX gebildeten Winkel stets vergrössern und für $z=1$ endlich darauf senkrecht stehen, indem sie sich wieder zu Einer Geraden vereinigen.

Um zu zeigen, dass die ganze Ordinate in A, und nicht nur das Stück zwischen $z=0$ und $z=1$ zur Fläche gehört, stellen wir eine ähnliche Betrachtung wie die unter I. B. 3) an. Man sieht nämlich, dass dieses Beispiel von dem Beispiele 5. nur darin abweicht, dass die Fläche $u=y^2$ nur eine andere Lage, als die entsprechende $u=\sqrt{2y^2-x}$ hat, in der Form aber mit derselben congruent ist. Denkt man sich nun die letztere durch Veränderung ihrer Lage in unsere jetzige übergehen, so muss auch die abgeleitete Fläche $z=\frac{\sqrt{2y^2-x}}{x^2+y^2}$ sich in unsere jetzige entsprechende umbilden. Betrachtet man dabei noch eine Zwischengestalt der Fläche z, so findet man, dass bei diesem Uebergange folgende Veränderungen vorgehen. Die dort durch den Schnitt mit der durch OZ gehenden und den Winkel XOY halbirenden Ebene entstehende Hyperbel zz (Taf. VI. Fig. 16.) verkleinert, indem sie XY und OZ zu Asymptoten behält, beständig ihre Axen und geht zuletzt in die auf einander senkrechten Asymptoten über. Die Hyperbeln, welche durch Schnitte parallel mit XY entstehen und dort zwischen $z=0$ und $z=\sqrt{2}$ lagen, verringern die Ausdehnung ihrer Lage und die Grösse ihrer Axen beständig und gehen endlich, zwischen $z=0$ und $z=1$ liegend, in zwei sich unter verschiedenen Winkeln schneidende Gerade über. Die ebenfalls durch Schnitte parallel mit XY für $z>\sqrt{2}$ und $z<0$ entstehenden Ellipsen nehmen ebenfalls stets kleinere Axen an, indem diese ja durch die Abstände jener Hyperbeln zz (Taf. VI. Fig. 16.) von ihren Asymptoten bestimmt sind, und werden endlich zu Punkten für $z>1$ und $z<0$. — Hieraus folgt, was gezeigt werden sollte, dass nicht nur das zwischen $z=0$ und $z=1$ liegende Stück der Ordinate in A zur Fläche gehört, sondern auch dessen Verlängerungen, indem sie die Reihe der zu Punkten gewordenen Ellipsen darstellen.

Beispiel 7. Ist

$$z=\frac{4(\mp)4\sqrt{(1-\frac{1}{4}x^2-y^2)}}{x^2+4y^2}$$

gegeben, so wird für $x_0=0$ und $y_0=0$, $z_0=\frac{0}{0}$. Durch Differen-

tiation erhält man

$$z_0=\frac{2(\frac{1}{4}x_0+2y_0y'_0)}{\sqrt{(1-\frac{1}{4}x_0^2-y_0^2)}}:(2x_0+8y_0y'_0)=\frac{0}{0}$$

und nach nochmaliger Differentiation

$$z_0=\frac{2(\frac{1}{4}+2y'^2_0)}{2+8y'^2_0}=\frac{1}{2},$$

also einen constanten von dem Werthe von y'_0 unabhängigen Werth. Wir finden nun, dass

$$u=4\mp4\sqrt{(1-\frac{1}{4}x^2-y^2)}$$

ein Ellipsoid darstellt, welches XY im Punkte $x_0=0$, $y_0=0$ berührt (Taf. VI. Fig. 20.) XZ in der Ellipse $u=4\mp4\sqrt{(1-\frac{1}{4}x^2)}$ und YZ in der Ellipse $u=4\mp4\sqrt{(1-y^2)}$ schneidet. Die dritte Axe dieses Ellipsoids liegt also in OZ und ist $=8$, die zweite mit OY parallele Axe ist $=2$ und die erste mit OX parallele $=4$. — Weiter ist $U=x^2+4y^2$ ein elliptisches Paraboloid, dessen Axe OZ und dessen Scheitel der Ursprung; denn es schneidet XY in $x=0$, $y=0$, XZ in der Parabel $U=x^2$, deren Parameter $=1$ und YZ in der Parabel $U=4y^2$, deren Parameter $=\frac{1}{4}$; jeder mit XY parallele Schnitt endlich gibt eine Ellipse $x^2+4y^2=c$, von der die mit OX parallele Axe $=2\sqrt{c}$, die mit OY parallele aber $=\sqrt{c}$ ist. — Die Fläche z endlich gibt für $z=c$ die horizontale Schnittkurve

$$c\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=1\mp\sqrt{[1-(\frac{1}{4}x^2+y^2)]},$$

oder

$$\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)[c^2\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)-(2c-1)]=0,$$

welche in die zwei Kurven zerfällt:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=0,\ \text{oder}\ x=0,\ y=0,$$

d. i., da diese Gleichung von c unabhängig, die Axe OZ oder die Ordinate in A, die also ganz zur Fläche gehört, und in

$$\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{2c-1}{c^2},$$

d. i. eine Ellipse, von der die mit OX parallele Axe $=\frac{4}{c}\sqrt{(2c-1)}$

und die mit OY parallele $=\frac{2}{c}\sqrt{(2c-1)}$ ist, welche also dasselbe constante Verhältniss $\frac{2}{1}$ haben, wie es bei den gleichen Schnitten der beiden ursprünglichen Flächen stattfindet. Die Durchschnitte mit XZ und YZ haben beide ihren tiefsten Punkt in $z=\frac{1}{2}$ auf der Axe OZ und die in Taf. VI. Fig. 20. dargestellte Gestalt, wonach sie und die ganze Fläche die Axe OZ zur Asymptote haben.

Beispiel 8. Betrachten wir zuletzt noch die Gleichung

$$z=\frac{x^2+y^2}{2(\mp)\sqrt{4-(x^2+y^2)}},$$

welche für $x_0=0$ und $y_0=0$, $z_0=\frac{0}{0}$ gibt. Durch Differentiation erhält man dann

$$z_0=\frac{\dfrac{2x_0+2y_0y'_0}{\dfrac{x_0+y_0y'_0}{\sqrt{4-(x_0{}^2+y_0{}^2)}}}}{}=\frac{0}{0}$$

und durch nochmalige

$$z_0=\frac{2+2y'_0{}^2}{2(1+y'_0{}^2):4}=4,$$

einen bestimmten Werth. — Die Fläche $u=x^2+y^2$ ist ein durch die Umdrehung der Parabel $u=x^2$ um OZ als Axe entstandenes Umdrehungsparaboloid, und $U=2\mp\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ oder $x^2+y^2+(U-2)^2=4$ ist eine Kugel, deren Radius $=2$ und von der die Axe OZ ein Durchmesser ist. Beide Rotationsflächen berühren XY im Ursprung. — Die Gestalt der Fläche z finden wir leicht, indem wir bedenken, dass

$$x^2+y^2=[2\pm\sqrt{4-(x^2+y^2)}][2\mp\sqrt{4-(x^2+y^2)}],$$

woraus dann

$$z=2\pm\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$

wird, also dieselbe Kugelfläche, wie $U=2\mp\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ darstellt, wobei jedem Punkte der letzteren der andere auf derselben Ordinate liegende Pnnkt der Kugel als entsprechender Punkt der ersteren Fläche zukommt. Ausserdem gehört aber noch die Gerade $x=0$, $y=0$, d. i. die Axe OZ zur Fläche z. — Hätte man hier $z=\frac{U}{u}$, so würde diess eine der im vorigen Beispiele dargestellten Fläche ähnliche Rotationsfläche ausdrücken.

Nachdem wir nun die Gestalt dieser Flächen in der Nähe der zu ihnen gehörigen Ordinate in A untersucht haben, bleibt uns nur noch übrig, zwei Beispiele zu liefern, worin eine von zwei Variabelen abhängige Grösse für bestimmte Werthe der letzteren einmal wirklich und einmal nur scheinbar unbestimmt wird.

Aufgabe 1. Zwei physische und elastische gerade Linien P_1P_1 und P_2P_2 (Taf. VI. Fig. 21.) durchschneiden sich senkrecht in ihren Mitten P. Dieses Kreuz ist an den vier Endpunkten P_1, P_1, P_2, P_2 durch elastische Stützen getragen und in der Mitte P durch eine Last P beschwert; wie gross sind die Druckkräfte P_1, P_1, P_2, P_2, welche P auf jede der vier Stützen ausübt? (Siehe meine Abhandlung über diese Aufgabe bei beliebiger Lage der Stützpunkte im Archiv, Theil XIV, 1850, Nr. XXIV.)

Vor Allem sieht man, dass, da die Gestalt des Vierfusses symmetrisch, die Belastung der gegenüberstehenden Stützen gleich ist, nämlich $P_1 = P_1$ und $P_2 = P_2$. Wenn nun die von P ausgehenden Arme und die Stützen vollkommen starr wären, so wäre wegen der symmetrischen Lage der Stützen nur noch die Bedingung gegeben, dass die Summe der vier Seitenkräfte der Mittelkraft gleich sein soll; woraus aber die zwei verschiedenen Seitenkräfte nicht bestimmt werden können. Es ist dieses leicht einzusehen, da man ja P_2, P_2 ganz unbelastet lassen kann, wo dann $P_1 = \frac{1}{2}P$ wird, und umgekehrt. Berücksichtigt man aber die in der Natur stets stattfindende Elasticität der Arme und Stützen, so findet man, dass bei der Belastung folgende Erscheinungen stattfinden müssen. Die mit der Kraft P_1 und P_2 auf ihre elastischen Stützen wirkenden Armenden drücken diese zusammen und senken die Stützpunkte um e_1 und e_2. Wenn die Krafteinheit eine Stütze von gleicher Elasticität wie jede der vier vorhandenen um e zusammendrücken kann, so ist

$$e_1 = P_1 e \text{ und } e_2 = P_2 e.$$

Ferner werden die Arme wegen ihrer Elasticität sich von den Stützpunkten abwärts biegen und in dem so zweimal gesenkten Belastungspunkte P (Taf. VI. Fig. 22.) eine gemeinschaftliche horizontale Berührungsebene haben. Es sei nach der Senkung der Stützpunkte P_1 und P_2 ihr Abstand von dieser Berührungsebene b_1 und b_2, und $PP_1 = a_1$ und $PP_2 = a_2$ seien die Längen der Arme, so kann man annehmen, dass diese letzteren in P eingemauert seien und durch die aufwärts gerichteten rückwirkenden Kräfte P_1 und P_2 der Stützen, welche in den Abständen a_1 und a_2 angreifen, um b_1 und b_2 von der Tangente am eingemauerten Ende ab-

gelenkt werden. Vermag nun die Krafteinheit am Ende ein von der Längeneinheit und von gleichem Biegungsmomen das jener Arme, wirkend, ihren Angriffspunkt von der T am andern eingemauerten Ende um b abzulenken, so ist n Gesetzen der Elasticität

$$b_1 = bP_1 a^3{}_1 \text{ und } b_2 = bP_2 a^3{}_2.$$

Da nun $e_1 + b_1$ und $e_2 + b_2$ die Abweichung jener gemeinsch Berührungsebene von der Ebene der unbelasteten Stützpu deutet, so muss $e_1 + b_1 = e_2 + b_2$, oder

$$P_1(e + ba^3{}_1) = P_2(e + ba^3{}_2)$$

sein; da ferner $2P_1 + 2P_2 = P$, so ist mit Hülfe der vorig chung

$$2P_1\left(1 + \frac{e + ba^3{}_1}{e + ba^3{}_2}\right) = P,$$

oder

$$2P_1 = P\frac{e + ba^3{}_2}{2e + b(a^3{}_1 + a^3{}_2)}.$$

Ist die Elasticität b der Arme gegen die Zusammend keit e der Stützen sehr klein, oder ist $b=0$, so findet d unabhängige Werth

$$2P_1 = \tfrac{1}{2}P$$

statt; ist dagegen $e=0$, so findet man

$$2P_1 = P\frac{a^3{}_2}{a^3{}_1 + a^3{}_2}.$$

Ist aber keines gleich Null, so hängt der Werth von $2P_1$ Grössen b und e ab und ändert sich mit diesen. Für b $e=0$ endlich ist

$$2P_1 = \frac{0}{0},$$

wie wir auch schon bei der ursprünglichen Annahme Starrheit gesehen haben.

Um eine bessere Einsicht in diese Resultate zu erhalt len wir

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ P = 1$$

und die Veränderlichen

$$b = x,\ e = y,\ 2P_1 = z$$

setzen, so wird ihre Abhängigkeit durch die Gleichung

$$z=\frac{x+y}{9x+2y}$$

ausgedrückt. Stellen wir uns hierunter wie früher eine Fläche vor, so ist $u=x+y$ eine Ebene, welche XY in der Geraden $y=-x$ (MN in Taf. VI. Fig. 23.), XZ und YZ in der Geraden $u=x$ und $u=y$ schneidet. — Ebenso ist $U=9x+2y$ eine Ebene, welche jene Ebenen in den Geraden $y=-\frac{9}{2}x(PQ)$, $U=9x$ und $U=2y$ schneidet. — Die Fläche z ist ein hyperbolisches Paraboloid (Taf. VI. Fig. 24.), wie die in Beispiel 1. abgehandelte, aber mit anderen Coefficienten. Schneidet man dasselbe nach einander durch Ebenen, welche durch OZ gelegt sind, z. B. durch die $y=0$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$, $y=5x$, $x=0$, so erhält man die Durchschnitte

$$z=\frac{1.x}{9.x},\quad z=\frac{3.x}{20.x},\quad z=\frac{2.x}{11.x},\quad z=\frac{6.x}{19.x},\quad z=\frac{1.y}{2.y},$$

also gerade Linien, welche in ihrer Continuität zwischen den Grenzen $z=\frac{1}{9}$ und $z=\frac{1}{2}$ den Theil der Fläche bilden, dessen Ordinaten die möglichen Werthe von $z=2P_1$ darstellen. Der übrige Theil der Fläche hat keine Beziehung zu unserer Aufgabe, da negative b und e keinen Begriff geben. Zugleich ist ersichtlich, dass, nachdem das Verhältniss $\frac{b}{e}=\frac{x}{y}$ angenommen, $2P_1=z$ bestimmt ist, und die absolute Grösse von x auf die Ausdrücke $z=\frac{1.x}{9.x}$, $z=\frac{2.x}{11.x}$ u. s. w. keinen Einfluss mehr hat. Nur ist der Werth $x_0=0$ und $y_0=0$ ausgenommen, wofür $z_0=\frac{0}{0}$, oder unbestimmt; was auch schon daraus hervorgeht, dass $x_0=0$ und $y_0=0$ die Grenze der Werthe von x und y bei allen möglichen Verhältnissen derselben ist, also für sie auch alle Werthe von z, die diesen Werthen von $\frac{x}{y}$ entsprechen, gelten müssen.

Es stimmt also hier die aus der Formel $2P_1=\frac{b+e}{9b+2e}$ hervorgehende Unbestimmtheit von $2P_1$ für $b=0$ und $e=0$ ganz mit der wirklichen Unbestimmtheit des Seitendrucks bei vollkommener Starrheit der Arme und Stützen überein.

Aufgabe 2. Es ist die Lage der Tangente in dem Doppelpunkte einer Kurve zu finden.

Sei

$$x^3=y^2-x^2$$

die Gleichung der Kurve, so findet man für sie die in Taf. VI. Fig. 25. verzeichnete Gestalt. Um die Lage der Tangente im Punkte $x_0=0$ und $y_0=0$ zu finden, setzen wir diese Werthe in

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{3x^2+2x}{2y}$$

ein und finden $y'_0=\frac{0}{0}$. Differenziren wir wie früher, um den bestimmten Werth von y'_0 zu finden, so wird

$$y'_0=\frac{6x_0+2}{2y'_0} \text{ oder } y'^2_0=1,\ y'_0=\pm 1,$$

woraus sich ergibt, dass dieser Punkt ein Doppelpunkt ist. Wir können die ursprüngliche Gleichung auch

$$y=\pm x\sqrt{(x+1)}$$

schreiben und erhalten hieraus

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{3x+2}{2\sqrt{(x+1)}},$$

was für $x_0=0$ und $y_0=0$, $y'_0=\pm 1$ unmittelbar liefert, ohne vorher die Gestalt $\frac{0}{0}$ anzunehmen. Führt man in dem ersten Ausdrucke für y' den Werth von $y=\pm x\sqrt{(x+1)}$ ein, so erhält man

$$y'=\frac{3x^2+2x}{\pm 2x\sqrt{(x+1)}},$$

oder, wenn man die gleichen Factoren x im Zähler und Nenner streicht,

$$y'=\frac{3x+2}{\pm 2\sqrt{(x+1)}},$$

übereinstimmend mit dem letzten Resultate. Fragt man nun, ob denn die so gefundenen Grenzwerthe die einzigen richtigen sind und ob nicht auch der unbestimmte Werth, der die anderen in sich begreift, zulässig sei, und betrachtet desswegen zuerst die Formel

$$y'=\frac{3x^2+2x}{2y},$$

so kann diese nicht, wie es bei der Fläche $z=\frac{3x^2+2x}{2y}$ möglich

wäre, auf jeden beliebigen Grenzwerth von z_0 für $x_0=0$ und $y_0=0$ führen, weil nicht jeder Weg oder jede beliebige Relation zwischen x und y, für welche $x_0=0$ und $y_0=0$ möglich ist, gewählt werden kann, sondern nur die beiden $y=\pm x\sqrt{(x+1)}$. — Fragt man, indem man andererseits die Formel

$$y'=\pm\frac{(3x+2).x}{2\sqrt{(x+1)}.x}$$

betrachtet, ob die Grenzwerthe $y'_0=\pm 1$ die einzig richtigen seien und der Factor $\frac{x}{x}$ wegfallen müsse, so entscheidet hierüber die Natur der Sache und zwar dahin, dass nur die Grenzwerthe, d. h. zwei Tangenten an jenem Doppelpunkte zulässig sind. Der Factor $\frac{x}{x}$ rührt daher, dass vor der Bestimmung von y' die Gleichung nicht in Bezug auf y aufgelöst wurde.

Dasselbe Resultat müssen alle Kurven mit Doppelpunkten geben, weil sie, wenn man ihre Gleichungen in Bezug auf y oder x auflöst, stets Wurzelausdrücke geben müssen. So findet es auch bei dem einfachen Beispiele

$$(y-x)(y+x-2)=0 \quad \text{oder} \quad y=1\pm(x-1)$$

statt, welche Gleichung zwei Geraden darstellt, für deren Tangenten in ihrem Durchnittspunkte $x_0=1$, $y_0=1$

$$y'_0=\pm 1$$

gefunden wird.

XXIX.

Ergänzung des zweiten Jacobi'schen Theorems über die elliptischen Functionen, Fortsetzung einer früher veröffentlichten Ergänzung des ersten Theorems*).

Von
Herrn *Essen*,
Lehrer am Gymnasium zu Stargard.

Es wurde gefunden

$$1)\ \sin\psi=\frac{\frac{1}{\lambda}\sin\varphi.\cos\varphi\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\ldots}{(1-c^2\sin\alpha_1^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_3^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_5^2\sin\varphi^2)\ldots}$$

$$2)\ z=\cos\psi=\frac{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_5^2}\right)}{(1-c^2\sin\alpha_1^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_3^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_5^2\sin\varphi^2)\ldots}$$

Durch gleichzeitige Substitution von $\frac{1}{kz}$ für z und von $\frac{1}{c\sin\varphi}$ für $\sin\varphi$ erhielt man aus der 1):

$$3)\ \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{kz}=\frac{\Delta\varphi}{\beta.\lambda}\cdot\frac{(1-c^2\sin\alpha_2^2\sin\varphi^2).(1-c^2\sin\alpha_4^2\sin\varphi^2)\ldots}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_5^2}\right)\ldots}.$$

Diese Gleichung kann zur Bestimmung des constanten Factors λ benutzt werden. Für $\varphi=0$ wird $z=1$; dies giebt

---

*) Den frühern Aufsatz s. m. in diesem Theile Heft III. Nr. XX. S. 24

$$\sqrt{1-k^2}=h=\frac{k}{\beta.\lambda}=\frac{\mu}{\lambda},$$

folglich

$$\lambda=\frac{\mu}{h}.$$

Nun aber ist gezeigt worden, dass man habe

$$4)\quad \int_0^\vartheta \frac{\partial\vartheta}{\Delta(k\vartheta)}=\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}},$$

wofern gegeben ist

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\operatorname{tg}\psi}{h},$$

oder, was dasselbe ist:

$$5)\quad \cos\vartheta=\frac{h\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}},$$

$$6)\quad \sin\vartheta=\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}},$$

$$7)\quad \Delta\vartheta=\frac{h}{\sqrt{1-k^2\cos\psi^2}}.$$

Vermittelst der Gleichung 5) geht die 3) über in

$$8)\quad \cos\vartheta=\frac{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1{}^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3{}^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_5{}^2}\right)\ldots\ldots}{\Delta\varphi(1-c^2\sin\alpha_2{}^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_4{}^2\sin\varphi^2)\ldots};$$

sodann erhält man leicht

$$9)\quad \sin\vartheta=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\sin\varphi.\cos\varphi\cdot\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2{}^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4{}^2}\right)\ldots\ldots}{\Delta\varphi(1-c^2\sin\alpha_2{}^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_4{}^2\sin\varphi^2)\ldots\ldots},$$

nachdem man vorher gefunden hat

$$10)\quad \Delta(k\vartheta)=\frac{(1-c^2\sin\alpha_1{}^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_3{}^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_5{}^2\sin\varphi^2)\ldots}{\Delta\varphi(1-c^2\sin\alpha_2{}^2\sin\varphi^2)(1-c^2\sin\alpha_4{}^2\sin\varphi^2)\ldots};$$

endlich ist

$$11)\ \operatorname{tg}\vartheta=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\sin\varphi.\cos\varphi\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_4^2}\right)\ldots.}{\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_3^2}\right)\left(1-\frac{\sin\varphi^2}{\sin\alpha_5^2}\right)\ldots.}$$

Sind die vier letzten Gleichungen erfüllt, so ist also

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta(c\varphi)}=\mu\int_0^\vartheta\frac{\partial\varphi}{\Delta(k\vartheta)}.$$

Hieraus ist es nun leicht, das nachstehende Theorem abzuleiten, welches dem zweiten Jacobi'schen entspricht:

Für $p=2m$ hat man, wenn $b=\sqrt{1-c^2}$ und $h=\sqrt{1-k^2}$ gesetzt wird:

$$\int_0^\sigma\frac{\partial\sigma}{\Delta(b\sigma)}=\mu\int_0^\tau\frac{\partial\tau}{\Delta(h\tau)},$$

wenn gegeben ist:

$$\sin\tau=\frac{\frac{\sin\sigma}{\mu}(1+\operatorname{cotg}\alpha_2{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_4{}^2\sin\sigma^2)\ldots.}{(1+\operatorname{cotg}\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_5{}^2\sin\sigma^2)\ldots.},$$

$$\cos\tau=\frac{\cos\sigma.\Delta(b\sigma).\left(1-\frac{\cos\alpha_2{}^2\sin\sigma^2}{\sin\alpha_{p-2}^2}\right)\left(1-\frac{\cos\alpha_4{}^2\sin\sigma^2}{\sin\alpha_{p-4}^2}\right)\ldots.}{(1+\operatorname{cotg}\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_5{}^2\sin\sigma^2)\ldots.},$$

$$\Delta(h\tau)=\frac{\left(1-\frac{\cos\alpha_1{}^2\sin\sigma^2}{\sin\alpha_{p-1}^2}\right)\left(1-\frac{\cos\alpha_3{}^2\sin\sigma^2}{\sin\alpha_{p-3}^2}\right)\ldots.}{(1+\operatorname{cotg}\alpha_1{}^2\sin\sigma^2)(1+\operatorname{cotg}\alpha_3{}^2\sin\sigma^2)\ldots.}.$$

In Bezug auf das Weitere verweise ich auf Grunert's Supplemente zu Klügel's Wörterbuch, zweite Abtheilung S. 205 f.

Setzt man jetzt $p=2$, so kommt:

$$\sin\vartheta=\frac{(1+b)\sin\varphi.\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2.\sin\varphi^2}},$$

$$\cos\vartheta=\frac{1-(1+b)\sin\varphi^2}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta=\frac{(1+b)\sin\varphi.\cos\varphi}{1-(1+b)\sin\varphi^2}=\frac{(1+b)\sin2\varphi}{(1-b)+(1+b)\cos2\varphi};$$

woraus man leicht ableitet

$$\sin(2\varphi-\vartheta)=\frac{1-b}{1+b}.\sin\vartheta=k\sin\vartheta,$$

und es ist alsdann

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\frac{1}{1+b}\int_0^\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{1-\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\sin\vartheta^2}}.$$

Zur Bestimmung von τ erhält man:

$$\sin\tau=\frac{(1+b)\sin\sigma}{1+b.\sin\sigma^2},$$

$$\cos\tau=\frac{\cos\sigma\sqrt{1-b^2\sin\sigma^2}}{1+b.\sin\sigma^2},$$

$$\Delta(h\tau)=\frac{1-b.\sin\sigma^2}{1+b.\sin\sigma^2};$$

und es wird jetzt

$$\int_0^\sigma\frac{\partial\sigma}{\sqrt{1-b^2\sin\sigma^2}}=\frac{1}{1+b}\int_0^\tau\frac{\partial\tau}{\sqrt{1-\frac{4b}{(1+b)^2}\sin\tau^2}}.$$

Nun findet man leicht

$$\sin\sigma^2=\frac{1}{b}\cdot\frac{1-\Delta(h\tau)}{1+\Delta(h\tau)},$$

folglich

$$\sin\sigma=\frac{(1+k)\sin\tau}{1+\Delta(h\tau)}.$$

Setzt man

$$\int_0^\tau\frac{\partial\tau}{\Delta(h\tau)}=2\int_0^\mu\frac{\partial\mu}{\Delta(h\mu)},$$

so ist

$$\frac{\sin\tau}{1+\Delta(h\tau)}=\frac{\sin\mu.\cos\mu}{\Delta(h\mu)},$$

wodurch man erhält

$$\operatorname{tang}\sigma=\frac{(1+k)\sin\mu.\cos\mu}{1-(1+k)\sin\mu^2},$$

$$\sin(2\mu-\sigma)=b\sin\sigma.$$

Mit diesen Gleichungen findet also die folgende statt:

$$\int_0^\sigma\frac{\partial\sigma}{\sqrt{1-b^2\sin\sigma^2}}=\frac{2}{1+b}\int_0^\mu\frac{\partial\mu}{\sqrt{1-\frac{4b}{(1+b)^2}\sin\mu^2}}.$$

Ich bemerke übrigens noch, dass sich der so eben erört Fall auch rein geometrisch behandeln lässt, und dass das ga Verfahren, welches ich für $p=2m$ angewendet habe, sich a mit geringer Modification auf den Fall ausdehnen lässt, wo p gerade ist; ja es will mir scheinen, als ob dasselbe viel kür zum Ziele führte, als das bisher angewandte.

Man beginnt alsdann damit, dass man setzt

$$\operatorname{tang}\varphi_m=\operatorname{tang}\varphi.\Delta\alpha_m,$$

und nimmt darauf

$$\psi=\varphi+2\varphi_2+2\varphi_4\ldots+2\varphi_{p-1}.$$

XXX.

Ueber die unabhängige Bestimmung der Aenderungsgesetze höherer Ordnungen einer doppelten Function.

Von
Herrn Professor *G. Decher*
in Augsburg.

Ohngeachtet der Arbeiten, welche über diesen Gegenstand bereits erschienen sind, dürfte es für Manchen von Interesse sein, das einfache natürliche Gesetz kennen zu lernen, welches die höheren Aenderungsgesetze doppelter Functionen in ihrer Bildung befolgen, und welches ich auf dem Wege der Induction gefunden habe.

Setzt man

$$y = f(u),\quad u = \varphi(x),$$

so dass man die doppelte Function:

$$y = f(\varphi(x))$$

erhält, und bezeichnet die Aenderungsgesetze von y in Bezug auf u durch $\overset{u}{y}_1, \overset{u}{y}_2, \overset{u}{y}_3, \ldots \overset{u}{y}_n$; diejenigen von y in Bezug auf x durch $\overset{x}{y}_1, \overset{x}{y}_2, \overset{x}{y}_3, \ldots \overset{x}{y}_n$; endlich die von u in Bezug auf x einfach durch $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$; so findet man auf dem gewöhnlichen Wege:

$$\overset{x}{y}_5 = \overset{u}{y}_5 u_1^5 + 10\overset{u}{y}_4 u_1^3 u_2 + 10\overset{u}{y}_3 u_1^2 u_3 + 5\overset{u}{y}_2 u_1 u_4 + \overset{u}{y}_1 u_5$$
$$+ 15\overset{u}{y}_3 u_1 u_2^2 + 10\overset{u}{y}_2 u_2 u_3,$$

$$\overset{x}{y}_6 = \overset{u}{y}_6 u_1^6 + 15\overset{u}{y}_5 u_1^4 u_2 + 20\overset{u}{y}_4 u_1^3 u_3 + 15\overset{u}{y}_3 u_1^2 u_4 + 6\overset{u}{y}_2 u_1 u_5 + \overset{u}{y}_1 u_6$$
$$+ 45\overset{u}{y}_4 u_1^2 u_2^2 + 60\overset{u}{y}_3 u_1 u_2 u_3 + 15\overset{u}{y}_2 u_2 u_4$$
$$+ 15\overset{u}{y}_3 u_2^3 \quad + 10\overset{u}{y}_2 u_3^2,$$

u. s. f.

Diese Entwickelungen zeigen sogleich, dass die Summe der Exponenten der u-Factoren dem Index von $\overset{u}{y}$ gleich ist, und dass die Summe der Producte aus diesen Exponenten in die darunter stehenden Indexe der u-Factoren dem Index von $\overset{x}{y}$ gleich wird. In der Entwickelung von $\overset{x}{y}_n$ wird demnach das allgemeine Glied die Form haben:

$$N\overset{u}{y}_k u_1^p u_2^q u_3^r u_4^s \ldots.$$

und die Exponenten p, q, r, s werden solche sein, dass sie den beiden Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} k = p + q + r + s + \text{ etc.} \\ n = p + 2q + 3r + 4s + \text{ etc.} \end{array}\right\} \qquad \text{a)}$$

in ganzen Zahlen Genüge leisten.

Setzt man z. B. $k = n$, so folgt

$$p = n, \; q = 0, \; r = 0, \text{ etc.};$$

und das erste Glied der Entwickelung ist $\overset{u}{y}_n u_1^n$.

Für $k = n - 1$ wird

$$p = n - 2, \; q = 1, \; r = 0, \; s = 0, \text{ etc.}$$

es gibt also nur ein Glied mit $\overset{u}{y}_{n-1}$ und zwar von der Form:

$$N\overset{u}{y}_{n-1} u_1^{n-2} u_2.$$

Für $k = n - 2$ dagegen findet man

$p = n - 3$, $q = 0$, $r = 1$, $s = 0$, etc., $p = n - 4$, $q = 2$, $r = 0$, etc.; also die beiden Glieder:

$$\overset{u}{y}_{n-2}(N_1 u_1^{n-3} u_3 + N_2 u_1^{n-4} u_2^2).$$

Der Werth $k = n - 3$ gibt die Bedingungen

$p=n-4,\ q=0,\ r=0,\ s=1,$ etc.
$p=n-5,\ q=1,\ r=1,\ s=0,$ etc.
$p=n-6,\ q=3,\ r=0,\ s=0,$ etc.

und damit die drei Glieder:

$$\overset{u}{y}_{n-3}(N_1u_1^{n-4}u_4+N_2u_1^{n-5}u_2u_3+N_3u_1^{n-6}u_2^3)$$

u. s. f.

Weniger leicht ist das Gesetz der Coefficienten N zu entdecken. Beachtet man aber, dass die Coefficienten der Glieder in der obern Reihe der Entwickelungen von $\overset{x}{y}_5$ und $\overset{x}{y}_6$ die Binominal-Coefficienten sind, und dass die Indexe der u-Factoren bald als blosse Indexe, bald aber auch wie Exponenten fungiren, so findet man, dass die Coefficienten N mit den Polynominal-Coefficienten übereinkommen, wenn man sich ein Glied $u_k{}^p$ sowohl unter dieser Form, als unter der Form $u^k u'^k u''^k$.... so, dass es gleichsam aus p verschiedenen Gruppen gleicher Factoren von der Zahl k besteht, vorstellt. Bezeichnet man daher die Factoriellen

$$1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ 1.2.3....p,\ 1.2.3....q$$

einfach durch $\overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{p},\ \overline{q}$, so erhält man für den Coefficienten des allgemeinen Gliedes:

$$y_k u_1^p u_2^q u_3^r u_4^s \ldots.$$

die Form:

$$N=\frac{\overline{n}}{\overline{p}.\overline{q}.\overline{2}^q.\overline{r}.\overline{3}^r.\overline{s}.\overline{4}^s\ldots.}.$$

Nach dieser Form findet man z. B.

$$\overset{x}{y}_3=\overset{u}{y}_3\frac{\overline{3}u_1^3}{\overline{3}}+\overset{u}{y}_2\frac{\overline{3}u_1u_2}{1.\overline{2}}+\overset{u}{y}_1\frac{\overline{3}u_3}{\overline{3}},$$

$$\overset{x}{y}_4=\overset{u}{y}_4\frac{\overline{4}u_1^4}{\overline{4}}+\overset{u}{y}_3\frac{\overline{4}u_1^2u_2}{\overline{2}.\overline{2}}+\overset{u}{y}_2\frac{\overline{4}u_1u_3}{1.\overline{3}}+\overset{u}{y}_1\frac{\overline{4}u_4}{\overline{4}}$$

$$+\overset{u}{y}_2\frac{\overline{4}u_2^2}{\overline{2}.\overline{2}^2}\ ^{*)}.$$

*) Bei dieser Gelegenheit will ich auch bemerken, dass in Sohncke's Aufgaben-Sammlung $\overset{x}{y}_4$ oder $\frac{d^4f(z)}{dx^4}$ falsch angegeben ist.

$$\overset{x}{y}_5 = \overset{u}{y}_5 \frac{\overline{5}\, u_1^{5}}{\overline{5}} + \overset{u}{y}_4 \frac{\overline{5}\, u_1^{3} u_2}{\overline{3}.\overline{2}} + \overset{u}{y}_3 \frac{\overline{5}\, u_1^{2} u_3}{\overline{2}.\overline{3}} + \overset{u}{y}_2 \frac{\overline{5}\, u_1 u_4}{\overline{1}.\overline{4}} + \overset{u}{y}_1 \frac{\overline{5}\, u_5}{\overline{5}}$$

$$+ \overset{u}{y}_3 \frac{\overline{5}\, u_1 u_2^{2}}{\overline{1}.\overline{2}.\overline{2}^{2}} + \overset{u}{y}_2 \frac{\overline{5}\, u_2 u_3}{\overline{2}.\overline{3}},$$

$$\overset{x}{y}_6 = \overset{u}{y}_6 \frac{\overline{6}\, u_1^{6}}{\overline{6}} + \overset{u}{y}_5 \frac{\overline{6}\, u_1^{4} u_2}{\overline{4}.\overline{2}} + \overset{u}{y}_4 \frac{\overline{6}\, u_1^{3} u_3}{\overline{3}.\overline{3}} + \overset{u}{y}_3 \frac{\overline{6}\, u_1^{2} u_4}{\overline{2}.\overline{4}} + \overset{u}{y}_2 \frac{\overline{6}\, u_1 u_5}{\overline{1}.\overline{5}}$$

$$+ \overset{u}{y}_1 \frac{\overline{6}\, u_6}{\overline{6}}$$

$$+ \overset{u}{y}_4 \frac{\overline{6}\, u_1^{2} u_2^{2}}{\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}^{2}} + \overset{u}{y}_3 \frac{\overline{6}\, u_1 u_2 u_3}{\overline{1}.\overline{2}.\overline{3}} + \overset{u}{y}_2 \frac{\overline{6}\, u_2 u_4}{\overline{2}.\overline{4}}$$

$$+ \overset{u}{y}_3 \frac{\overline{6}\, u_2^{3}}{\overline{3}.\overline{2}^{3}} + \overset{u}{y}_2 \frac{\overline{6}\, u_3^{2}}{\overline{2}.\overline{3}^{2}}.$$

Die Entwickelung von $\overset{x}{y}_n$ wird demnach folgende Form erhalten:

$$\overset{x}{y}_n = \overset{u}{y}_n u_1^{n} + \overset{u}{y}_{n-1} \frac{\overline{n}\, u_1^{n-2} u_2}{\overline{n-2}.\overline{2}}$$

$$+ \overset{u}{y}_{n-2} \left(\frac{\overline{n}\, u_1^{n-3} u_3}{\overline{n-3}.\overline{3}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-4} u_2^{2}}{\overline{n-4}.\overline{2}.\overline{2}^{2}} \right)$$

$$+ \overset{u}{y}_{n-3} \left(\frac{\overline{n}\, u_1^{n-4} u_4}{\overline{n-4}.\overline{4}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-5} u_2 u_3}{\overline{n-5}.\overline{2}.\overline{3}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-6} u_2^{3}}{\overline{n-6}.\overline{3}.\overline{2}^{3}} \right)$$

$+ \text{etc.} \ldots\ldots$

$$+ \overset{u}{y}_{n-k} \left(\frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-1} u_{k+1}}{\overline{n-k-1}.\overline{k+1}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-2} u_2 u_k}{\overline{n-k-2}.\overline{2}.\overline{k}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-3} u_2^{2} u_{k-1}}{\overline{n-k-3}.\overline{2}.\overline{2}^{2}.\overline{k-1}} + \text{etc.} \right.$$

$$+ \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-2} u_3 u_{k-1}}{\overline{n-k-2}.\overline{3}.\overline{k-1}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-3} u_2 u_3 u_{k-2}}{\overline{n-k-3}.\overline{2}.\overline{3}.\overline{k-2}} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-2} u_4 u_{k-2}}{\overline{n-k-2}.\overline{4}.\overline{k-2}} + \frac{\overline{n}\, u_1^{n-k-3} u_3^{2} u_{k-3}}{\overline{n-k-3}.\overline{2}.\overline{3}^{2}.\overline{k-3}} + \text{etc.}$$

$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

$$+\overset{x}{y_2}\left(\frac{\overline{n}\,u_1 u_{n-1}}{1.\overline{n-1}}+\frac{\overline{n}\,u_2 u_{n-2}}{2.\overline{n-2}}+\text{etc.}+\frac{\overline{n}\,u_m u_{n-m}}{\overline{m}.\overline{n-m}}+\text{etc.}\right)$$

$$+\overset{x}{y_1}\,u_n.$$

Mittelst des allgemeinen Gliedes und mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen (a) kann man dem Factor von $\overset{x}{y_k}$ die übersichtliche Form geben:

$$\sum_{k=p+q+r+s+\text{etc.}}^{n=p+2q+3r+4s+\text{etc.}} \overline{n}.\frac{u_1^p u_2^q u_3^r u_4^s \ldots}{\overline{p}.\overline{q}.\overline{2}^q.\overline{r}.\overline{3}^r.\overline{s}.\overline{4}^s\ldots}$$

und damit auch die ganze Entwickelung von $\overset{x}{y_n}$ in dem einzigen Ausdrucke:

$$\text{A)}\quad \overset{x}{y_n}=\sum_{k=1}^{k=n}\overset{u}{y_k}\sum_{k=p+q+r+s+\text{etc.}}^{n=p+2q+3r+4s+\text{etc.}} \overline{n}.\frac{u_1^p.u_2^q.u_3^r.u_4^s\ldots}{\overline{p}.\overline{q}.\overline{2}^q.\overline{r}.\overline{3}^r.\overline{s}.\overline{4}^s\ldots}$$

übersichtlich darstellen.

Um eine Anwendung des letztern Ausdrucks zu geben, sei

$$u=x^\lambda,\ y=f(x^\lambda)=f(u).$$

Gibt man den Aenderungsgesetzen von u die Form

$$u_1=\overline{\lambda}\frac{x^{\lambda-1}}{\overline{\lambda-1}},\quad u_2=\overline{\lambda}\frac{x^{\lambda-2}}{\overline{\lambda-2}},\quad u_3=\overline{\lambda}\frac{x^{\lambda-3}}{\overline{\lambda-3}},$$

u. s. f.

so hat man

$$u_1^p u_2^q u_3^r u_4^s=\overline{\lambda}^{p+q+r+s+\text{etc.}}\frac{x^{\lambda(p+q+r+s+\text{etc.})-(p+2q+3r+4s+\text{etc.})}}{\overline{\lambda-1}^p\,\overline{\lambda-2}^q\,\overline{\lambda-3}^r\,\overline{\lambda-4}^s}$$

$$=\overline{\lambda}^k\frac{(x^\lambda)^k x^{-n}}{\overline{\lambda-1}^p\,\overline{\lambda-2}^q\,\overline{\lambda-3}^r\,\overline{\lambda-4}^s\ldots}$$

und darnach wird

$$\overset{x}{y_n}=D_x{}^n f(x^\lambda)$$

$$=\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}u^k.D_u{}^k f(u)\sum_{k=p+q+\text{etc.}}^{n=p+2q+\text{etc.}}\frac{\overline{n}\,\overline{\lambda}^k}{\overline{p}.\overline{\lambda-1}^p.\overline{q}.\overline{2}^q.\overline{\lambda-2}^q.\overline{r}.\overline{3}^r\ldots}$$

der allgemeine Ausdruck für das Bildungsgesetz des $n$ten Aenderungsgesetzes von $f(x^\lambda)$ in Bezug auf x. Die innere Summe nimmt indessen eine für die Rechnung zweckmässigere Form an, wenn man die Binominal-Coefficienten einführt. Setzt man dazu wie gewöhnlich

$$\frac{\lambda}{1} = \overset{1}{[\lambda]}, \quad \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} = \overset{2}{[\lambda]}, \quad \text{etc.},$$

so wird die genannte Summe:

$$\overset{n=p+2q+3r+4s+\text{etc.}}{\underset{k=p+q+r+s+\text{etc.}}{\Sigma}} . \overline{n} . \frac{\overset{1}{[\lambda]}^p . \overset{2}{[\lambda]}^q . \overset{3}{[\lambda]}^r \ldots}{\overline{p} \,.\, \overline{q} \,.\, \overline{r} \ldots}$$

und demnach erhält das Bildungsgesetz die elegante Form:

$$D_x{}^n f(x^\lambda) = \frac{\overline{n}}{x^n} \overset{k=n}{\underset{k=1}{\Sigma}} . u^k D_u{}^k f(u) \overset{n=p+2q+3r+4s+\text{etc.}}{\underset{k=p+q+r+s+\text{etc.}}{\Sigma}} . \frac{\overset{1}{[\lambda]}^p . \overset{2}{[\lambda]}^q . \overset{3}{[\lambda]}^r \ldots}{\overline{p} \,.\, \overline{q} \,.\, \overline{r} \ldots},$$

welche, wie man sieht, sehr einfach aus unserm allgemeinen Ausdrucke A) hervorgeht.

XXXI.

Ueber die Grundformeln der Theorie der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes.

Von

dem Herausgeber.

In meinen Vorlesungen über analytische oder sogenannte höhere Mechanik pflege ich die Grundformeln der Theorie der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes auf einen, so viel ich weiss, bis jetzt nicht bekannten analytischen Ausdruck zu bringen, welcher diese Formeln, wie es mir immer geschienen hat, zur Anwendung vorzüglich geschickt macht. Weil es mir zur Herausgabe eines ausführlichen Werks über die mir durch langjährige eifrige Beschäftigung mit derselben und in kurzen Zwischenräumen immer wiederkehrenden öffentlichen Vortrag überaus lieb gewordene analytische Mechanik jetzt an Zeit gebricht, und, wie ich leider mit ziemlicher Bestimmtheit voraussehen muss, auch wohl künftig immer an Zeit gebrechen wird: so will ich die in Rede stehenden Formeln im Folgenden mir mitzutheilen erlauben, was aber in zweckmässiger und lehrreicher Weise nicht gut anders möglich sein wird, als durch eine vollständige Entwickelung derselben. Zugleich nehme ich mir vor, mit dieser ähnlichen Mittheilungen späterhin öfters fortzufahren, wenn dabei vielleicht auch manches zum Theil Bekannte mit vorkommen mag. Ich thue dies aber um so lieber, je mehr ich überzeugt bin, dass die Vervollkommnung der Mechanik bei dem gegenwärtigen Zustande dieser herrlichen Wissenschaft weit weniger in materieller als in formeller Richtung zu versuchen ist, und je mehr ich zu finden glaube, dass viele jetzt erscheinende und zum Theil sehr angepriesene mechanische Lehrbücher in keiner der beiden angedeuteten Be-

ziehungen etwas wesentlich Neues leisten und nur Bekanntes in wenig veränderter Weise reproduciren, wobei ich aber nochmals wiederhole, dass ich auch für die von mir beabsichtigten Mittheilungen durchaus nicht überall absolute Neuheit zu beanspruchen im Sinne habe. Von meinen vielen, nun bereits fast sämmtlich schon in höchst ehrenwerthen Lehrämtern der Mathematik und Physik stehenden Schülern bin ich vielfach zur Herausgabe eines ausführlichen Werks, wie ich es oben bezeichnete, aufgefordert worden; meinen Dank für diese mich ehrende Aufforderung spreche ich hier allen und namentlich auch den in theilweise sehr weiter Ferne von mir Wohnenden dadurch aus, dass ich sie bitte, die folgenden Mittheilungen und ähnliche, die sie späterhin im Archive noch finden werden, als Erinnerungsblätter an jene Stunden zu betrachten, in welchen wir uns durch die Beschäftigung mit einer der edelsten Wissenschaften gemeinschaftlich erhoben fühlten.

I.

Wir nehmen an, dass ein Punkt A von einem in Bezug auf das zu Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem der xyz durch die Coordinaten a, b, c bestimmten Punkte (abc) an durch eine Momentankraft F, die immer als positiv betrachtet wird und nach ihrer Richtung, welche mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (abc) gelegter, den Axen der x, y, z paralleler Axen die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst, für sich eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der ebenfalls immer als positiv betrachteten Geschwindigkeit V hervorbringt, in Bewegung gesetzt werde, und dass am Ende einer jeden beliebigen, von dem Zeitpunkte des Anfangs der Bewegung an gerechneten, stets als positiv betrachteten Zeit t auf denselben eine stets als positiv betrachtete Kraft F_t wirke, welche zugleich mit der sich stetig verändernden Zeit (im Allgemeinen) sowohl ihre Richtung, als auch ihre Grösse stetig verändert. Die von der Richtung der Kraft F_t, die also von der Zeit t abhängig zu denken ist, mit den positiven Theilen dreier durch den Ort des Punktes A am Ende der Zeit t, dessen Coordinaten wir durch x_t, y_t, z_t bezeichnen wollen, gelegter, den Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel wollen wir durch φ_t, ψ_t, χ_t bezeichnen.

Wenn wir die Kraft F in dem Anfangspunkte (abc) der Bewegung nach den drei, durch den Punkt (abc) gelegten, den Axen der x, y, z parallelen Axen in drei Kräfte zerlegen und diese Kräfte als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem ihre

Richtungen den positiven oder negativen Theilen der drei in Rede stehenden Axen entsprechen, so sind diese drei Seitenkräfte bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$F\cos\alpha,\ F\cos\beta,\ F\cos\gamma;$$

nd die Geschwindigkeiten der von diesen Seitenkräften nach ıren Richtungen hervorgebrachten geradlinigen gleichförmigen Be'egungen, welche wir immer mit denselben Vorzeichen wie die ntsprechenden Kräfte nehmen wollen, sind respective:

$$V\cos\alpha,\ V\cos\beta,\ V\cos\gamma.$$

Zerlegen wir ferner die Kraft F_t in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ nach en drei, durch diesen Punkt gelegten, den Axen der x, y, z paıllelen Axen in drei Kräfte, und betrachten dieselben als positiv der negativ, jenachdem ihre Richtungen den positiven oder negaven Theilen der drei in Rede stehenden Axen entsprechen; so ind diese drei Seitenkräfte in völliger Allgemeinheit:

$$F_t\cos\varphi_t,\ F_t\cos\psi_t,\ F_t\cos\chi_t.$$

Denken wir uns nun durch den Punkt A in jedem Punkte iner Bahn drei starre, auf den Axen der x, y, z senkrecht ehende gerade Linien gelegt, deren Durchschnittspunkte mit iesen drei Axen wir die dem in Rede stehenden Punkte der Bahn ıtsprechenden Projectionen des Punktes A auf den Axen der , y, z nennen wollen, und stellen uns vor, dass die drei starren eraden Linien, und mit denselben also auch die drei Projectionen af den Axen der x, y, z, in diesen Axen sich zugleich mit dem unkte A bewegen, so legen die drei Projectionen in den entırechenden Axen der x, y, z während des Zeitintervalls oder in er Zeit t nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ffenbar die drei natürlich gehörig als positiv oder als negativ beachteten Wege

$$x_t-a,\ y_t-b,\ z_t-c$$

ırück.

Am Anfange der Bewegung wirken auf die drei durch den unkt A gelegten starren geraden Linien, und also auch auf die ei Projectionen die drei Momentankräfte

$$F\cos\alpha,\ F\cos\beta,\ F\cos\gamma;$$

ırmöge welcher nach dem Obigen die drei Projectionen in der eit t die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Wege

$$Vt\cos\alpha,\ Vt\cos\beta,\ Vt\cos\gamma$$

zurücklegen, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, mittelst einer leicht anzustellenden Betrachtung auf der Stelle ergiebt, dass die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Wege, welche die Projectionen in der Zeit t bloss vermöge der auf sie wirkenden Kräfte *)

$$F_t \cos\varphi_t,\quad F_t \cos\psi_t,\quad F_t \cos\chi_t$$

zurücklegen, in völliger Allgemeinheit

$$x_t - a - Vt\cos\alpha,\quad y_t - b - Vt\cos\beta,\quad z_t - c - Vt\cos\gamma$$

sind. Also hat man nach der Lehre von der geradlinigen Bewegung die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} F_t\cos\varphi_t = \dfrac{\partial^2(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t^2}, \\[2ex] F_t\cos\psi_t = \dfrac{\partial^2(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t^2}, \\[2ex] F_t\cos\chi_t = \dfrac{\partial^2(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t^2}; \end{array}\right.$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\quad X_t = F_t\cos\varphi_t,\quad Y_t = F_t\cos\psi_t,\quad Z_t = F_t\cos\chi_t$$

setzen, d. h. wenn wir die drei, nach dem Obigen gehörig als positiv oder negativ betrachteten Kräfte, in welche sich die Kraft F_t nach den drei durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegten, den Axen der x, y, z parallelen Axen zerlegen lässt, durch X_t, Y_t, Z_t bezeichnen:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} X_t = \dfrac{\partial^2(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t^2}, \\[2ex] Y_t = \dfrac{\partial^2(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t^2}, \\[2ex] Z_t = \dfrac{\partial^2(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t^2}. \end{array}\right.$$

Nun ist aber, weil a, b, c; α, β, γ und V constante Grössen sind:

---

*) Solche als Functionen der Zeit gedachte Kräfte, welche gewöhnlich beschleunigende Kräfte (forces accélératrices) genannt werden, pflege ich mit dem mir passender scheinenden Namen **Zeitkräfte**, im Gegensatze zu den **Momentankräften**, zu belegen.

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(x_t-a-Vt\cos\alpha)}{\partial t}=\dfrac{\partial x_t}{\partial t}-V\cos\alpha, \\ \dfrac{\partial(y_t-b-Vt\cos\beta)}{\partial t}=\dfrac{\partial y_t}{\partial t}-V\cos\beta, \\ \dfrac{\partial(z_t-c-Vt\cos\gamma)}{\partial t}=\dfrac{\partial z_t}{\partial t}-V\cos\gamma; \end{cases}$$

also, wenn man von Neuem differentiirt:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(x_t-a-Vt\cos\alpha)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2(y_t-b-Vt\cos\beta)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2(z_t-c-Vt\cos\gamma)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}; \end{cases}$$

folglich nach 3):

$$6)\quad X_t=\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2},\quad Y_t=\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2},\quad Z_t=\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}.$$

Wenn die Grössen φ_t, ψ_t, χ_t, F_t als Functionen der Zeit t gegeben sind, so sind natürlich auch die Grössen

$$X_t=F_t\cos\varphi_t,\quad Y_t=F_t\cos\psi_t,\quad Z_t=F_t\cos\chi_t$$

als Functionen der Zeit gegeben; und weil nun nach 6)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)}{\partial t}=X_t,\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)}{\partial t}=Y_t,\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)}{\partial t}=Z_t$$

oder

$$\partial\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)=X_t\partial t,\quad \partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)=Y_t\partial t,\quad \partial\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)=Z_t\partial t$$

ist, so ist, wenn

$$C,\ C_1',\ C_2$$

Constanten bezeichnen:

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_t}{\partial t}=C'+\int X_t\partial t, \\ \dfrac{\partial y_t}{\partial t}=C_1'+\int Y_t\partial t, \\ \dfrac{\partial z_t}{\partial t}=C_2'+\int Z_t\partial t; \end{cases}$$

oder

$$8)\quad \begin{cases} \partial x_t = C'\partial t + \partial t\int X_t\partial t, \\ \partial y_t = C'_1\partial t + \partial t\int Y_t\partial t, \\ \partial z_t = C'_2\partial t + \partial t\int Z_t\partial t; \end{cases}$$

also, wenn wieder

$$C,\ C_1,\ C_2$$

Constanten bezeichnen:

$$9)\quad \begin{cases} x_t = C + C't + \int\partial t\int X_t\partial t, \\ y_t = C_1 + C'_1 t + \int\partial t\int Y_t\partial t, \\ z_t = C_2 + C'_2 t + \int\partial t\int Z_t\partial t. \end{cases}$$

Weil nun nach 4)

$$\frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial x_t}{\partial t} - V\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t} = \frac{\partial y_t}{\partial t} - V\cos\beta,$$

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t} = \frac{\partial z_t}{\partial t} - V\cos\gamma$$

ist, so ist nach 7):

$$\frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t} = C' - V\cos\alpha + \int X_t\partial t,$$

$$\frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t} = C'_1 - V\cos\beta + \int Y_t\partial t,$$

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t} = C'_2 - V\cos\gamma + \int Z_t\partial t;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$10)\quad \mathfrak{X}_t = \int X_t\partial_t,\quad \mathfrak{Y}_t = \int Y_t\partial t,\quad \mathfrak{Z}_t = \int Z_t\partial t$$

setzen:

$$\frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t} = C' - V\cos\alpha + \mathfrak{X}_t,$$

$$\frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t} = C'_1 - V\cos\beta + \mathfrak{Y}_t,$$

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t} = C'_2 - V\cos\gamma + \mathfrak{Z}_t.$$

Nach dem Obigen und nach der Lehre von der geradlinigen Bewegung sind aber

$$\frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t}$$

die von den Projectionen des Punktes A auf den Axen der x, y, z vermöge der auf sie wirkenden Zeitkräfte *) X_t, Y_t, Z_t am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeiten, und da diese erlangten Geschwindigkeiten am Anfange der Bewegung, d. h. nach dem Obigen für $t=0$, natürlich als verschwindend zu betrachten sind, so erhält man nach dem Vorhergehenden die drei folgenden Gleichungen:

$$C - V\cos\alpha + \mathfrak{X}_0 = 0,$$
$$C_1 - V\cos\beta + \mathfrak{Y}_0 = 0,$$
$$C_2 - V\cos\gamma + \mathfrak{Z}_0 = 0;$$

aus denen sich

$$11)\quad \begin{cases} C = V\cos\alpha - \mathfrak{X}_0, \\ C_1 = V\cos\beta - \mathfrak{Y}_0, \\ C_2 = V\cos\gamma - \mathfrak{Z}_0; \end{cases}$$

also nach 9) und 10):

$$12)\quad \begin{cases} x_t = C + (V\cos\alpha - \mathfrak{X}_0)t + \int\mathfrak{X}_t\partial t, \\ y_t = C_1 + (V\cos\beta - \mathfrak{Y}_0)t + \int\mathfrak{Y}_t\partial t, \\ z_t = C_2 + (V\cos\gamma - \mathfrak{Z}_0)t + \int\mathfrak{Z}_t\partial t; \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$13)\quad \mathfrak{X}_t' = \int\mathfrak{X}_t\partial t,\quad \mathfrak{Y}_t' = \int\mathfrak{Y}_t\partial t,\quad \mathfrak{Z}_t' = \int\mathfrak{Z}_t\partial t$$

setzen:

$$14)\quad \begin{cases} x_t = C + (V\cos\alpha - \mathfrak{X}_0)t + \mathfrak{X}_t', \\ y_t = C_1 + (V\cos\beta - \mathfrak{Y}_0)t + \mathfrak{Y}_t', \\ z_t = C_2 + (V\cos\gamma - \mathfrak{Z}_0)t + \mathfrak{Z}_t' \end{cases}$$

ergiebt. Für $t=0$ ist nach dem Obigen bekanntlich

*) Siehe oben die Note.

$$x_0=a,\quad y_0=b,\quad z_0=c;$$

und wir erhalten also aus 14) die Gleichungen:

$$a=C+\mathfrak{X}_0',\quad b=C_1+\mathfrak{Y}_0',\quad c=C_2+\mathfrak{Z}_0';$$

aus denen sich

$$C=a-\mathfrak{X}'_0,\quad C_1=b-\mathfrak{Y}'_0,\quad C_2=c-\mathfrak{Z}'_0;$$

folglich nach 14):

$$15)\quad \begin{cases} x_t=a-\mathfrak{X}'_0+(V\cos\alpha-\mathfrak{X}_0)t+\mathfrak{X}'_t,\\ y_t=b-\mathfrak{Y}'_0+(V\cos\beta-\mathfrak{Y}_0)t+\mathfrak{Y}'_t,\\ z_t=c-\mathfrak{Z}'_0+(V\cos\gamma-\mathfrak{Z}_0)t+\mathfrak{Z}'_t \end{cases}$$

ergiebt. Bekanntlich ist aber:

$$\mathfrak{X}'_t-\mathfrak{X}'_0=\int_0^t \mathfrak{X}_t\partial t,$$

$$\mathfrak{Y}'_t-\mathfrak{Y}'_0=\int_0^t \mathfrak{Y}_t\partial t,$$

$$\mathfrak{Z}'_t-\mathfrak{Z}'_0=\int_0^t \mathfrak{Z}_t\partial t.$$

Daher können die Gleichungen 15) auch auf folgende Art a
drückt werden:

$$16)\quad \begin{cases} x_t=a+(V\cos\alpha-\mathfrak{X}_0)t+\int_0^t \mathfrak{X}_t\partial t,\\ y_t=b+(V\cos\beta-\mathfrak{Y}_0)t+\int_0^t \mathfrak{Y}_t\partial t,\\ z_t=c+(V\cos\gamma-\mathfrak{Z}_0)t+\int_0^t \mathfrak{Z}_t\partial t. \end{cases}$$

Nach der bekannten allgemeinsten Reductionsformel der
gralrechnung ist aber:

$$\int\mathfrak{X}_t\partial t=\mathfrak{X}_t\int\partial t-\int\partial\mathfrak{X}_t\int\partial t,$$

$$\int\mathfrak{Y}_t\partial t=\mathfrak{Y}_t\int\partial t-\int\partial\mathfrak{Y}_t\int\partial t,$$

$$\int\mathfrak{Z}_t\partial t=\mathfrak{Z}_t\int\partial t-\int\partial\mathfrak{Z}_t\int\partial t;$$

also, weil nach 10)

$$\partial\mathfrak{X}_t=X_t\partial t,\quad \partial\mathfrak{Y}_t=Y_t\partial t,\quad \partial\mathfrak{Z}_t=Z_t\partial t$$

ist:

$$\int \mathfrak{X}_t \partial t = t\mathfrak{X}_t - \int t X_t \partial t,$$
$$\int \mathfrak{Y}_t \partial t = t\mathfrak{Y}_t - \int t Y_t \partial t,$$
$$\int \mathfrak{Z}_t \partial t = t\mathfrak{Z}_t - \int t Z_t \partial t;$$

lich:

$$\int_0^t \mathfrak{X}_t \partial t = t\mathfrak{X}_t - \int_0^t t X_t \partial t,$$
$$\int_0^t \mathfrak{Y}_t \partial t = t\mathfrak{Y}_t - \int_0^t t Y_t \partial t,$$
$$\int_0^t \mathfrak{Z}_t \partial t = t\mathfrak{Z}_t - \int_0^t t Z_t \partial t;$$

daher nach 16):

$$x_t = a + (V\cos\alpha + \mathfrak{X}_t - \mathfrak{X}_0)t - \int_0^t t X_t \partial t,$$
$$y_t = b + (V\cos\beta + \mathfrak{Y}_t - \mathfrak{Y}_0)t - \int_0^t t Y_t \partial t,$$
$$z_t = c + (V\cos\gamma + \mathfrak{Z}_t - \mathfrak{Z}_0)t - \int_0^t t Z_t \partial t.$$

10) ist aber:

$$\mathfrak{X}_t - \mathfrak{X}_0 = \int_0^t X_t \partial t,$$
$$\mathfrak{Y}_t - \mathfrak{Y}_0 = \int_0^t Y_t \partial t,$$
$$\mathfrak{Z}_t - \mathfrak{Z}_0 = \int_0^t \mathfrak{Z}_t \partial t;$$

nach dem Vorhergehenden:

$$17)\quad \begin{cases} x_t = a + \left(V\cos\alpha + \int_0^t X_t \partial t\right)t - \int_0^t t X_t \partial t, \\ y_t = b + \left(V\cos\beta + \int_0^t Y_t \partial t\right)t - \int_0^t t Y_t \partial t, \\ z_t = c + \left(V\cos\gamma + \int_0^t Z_t \partial t\right)t - \int_0^t t Z_t \partial t; \end{cases}$$

$$18)\quad \begin{cases} x_t = a + (V\cos\alpha + \int_0^t F_t \cos\varphi_t \partial t)t - \int_0^t tF_t\cos\varphi_t\partial t, \\ y_t = b + (V\cos\beta + \int_0^t F_t \cos\psi_t \partial t)t - \int_0^t tF_t\cos\psi_t\partial t, \\ z_t = c + (V\cos\gamma + \int_0^t F_t \cos\chi_t \partial t)t - \int_0^t tF_t\cos\chi_t\partial t; \end{cases}$$

wobei man zu bemerken hat, dass, weil nach dem Obigen die Momentankraft F als gegeben angesehen wird, natürlich auch immer die Geschwindigkeit V der von derselben hervorgebrachten geradlinigen gleichförmigen Bewegung als gegeben zu betrachten ist.

Vorstehende Gleichungen sind die Gleichungen, welche ich in diesem Aufsatze hauptsächlich entwickeln wollte, natürlich nichts absolut Neues, sondern nur weitere Entwickelungen der längst bekannten Gleichungen 6). Bei Anwendungen auf besondere Fälle bieten aber die Gleichungen 18) wesentliche Erleichterungen dar, indem sie eine unmittelbare Einführung der gegebenen Grössen gestatten, wie ich nachher an ein Paar Beispielen zeigen werde. Vorher will ich indessen noch die folgenden weiteren Betrachtungen beifügen, die keinesweges neu sind, und hier nur zur Abschliessung der so wichtigen Theorie der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes dienen sollen, was vielleicht manchen Lesern nicht unangenehm sein wird.

Wenn man aus den drei Gleichungen 17) oder 18), nachdem dieselben durch Ausführung der erforderlichen Integrationen gehörig entwickelt worden sind, die Zeit t eliminirt, so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x_t, y_t, z_t, welche die Gleichungen der Bahn oder Trajectoria des Punktes A sind, so dass dieselbe also auf die so eben angegebene Weise, wenn man nur die sich etwa entgegen stellenden analytischen Schwierigkeiten vollständig zu überwinden im Stande ist, immer bestimmt werden kann.

Die ganzen von den Projectionen des Punktes A am Ende der Zeit t erlangten Geschwindigkeiten sind nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$V\cos\alpha + \frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial x_t}{\partial t},$$
$$V\cos\beta + \frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t} = \frac{\partial y_t}{\partial t},$$
$$V\cos\gamma + \frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t} = \frac{\partial z_t}{\partial t}.$$

Bezeichnen wir nun die vom Punkte A in seiner Bahn am Ende der Zeit t erlangte, immer als positiv zu betrachtende Geschwindigkeit durch $\mathfrak{v}_t$, und die von deren Richtung mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegter, den Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch ξ_t, η_t, ζ_t; so ist offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δt der Null kommt:

$$\mathfrak{v}_t \Delta t . \cos \xi_t = \Delta x_t,$$

$$\mathfrak{v}_t \Delta t . \cos \eta_t = \Delta y_t,$$

$$\mathfrak{v}_t \Delta t . \cos \zeta_t = \Delta z_t;$$

oder

$$\mathfrak{v}_t \cos \xi_t = \frac{\Delta x_t}{\Delta t},\quad \mathfrak{v}_t \cos \eta_t = \frac{\Delta y_t}{\Delta t},\quad \mathfrak{v}_t \cos \zeta_t = \frac{\Delta z_t}{\Delta t};$$

also, wenn man Δt sich der Null nähern lässt und zu den Gränzen übergeht, mit völliger Genauigkeit:

$$19)\quad \mathfrak{v}_t \cos \xi_t = \frac{\partial x_t}{\partial t},\quad \mathfrak{v}_t \cos \eta_t = \frac{\partial y_t}{\partial t},\quad \mathfrak{v}_t \cos \zeta_t = \frac{\partial z_t}{\partial t}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man mit Berücksichtigung der bekannten Gleichung

$$\cos \xi_t^2 + \cos \eta_t^2 + \cos \zeta_t^2 = 1$$

sogleich:

$$20)\quad \mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2},$$

und daher ferner nach 19):

$$21)\quad \left\{\begin{aligned} \cos \xi_t &= \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}},\\ \cos \eta_t &= \frac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}},\\ \cos \zeta_t &= \frac{\frac{\partial z_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Wenn die Richtungen der Kräfte F und F_t unausgesetzt in einer und derselben Ebene liegen, so kann man diese Ebene als Ebene der xy annehmen, und es ist dann offenbar allgemein $\chi_t = 90^\circ$, also nach dem Obigen allgemein

$$Z_t = F_t \cos \chi_t = 0.$$

Folglich ist nach 6) allgemein:

$$\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2} = 0,$$

woraus sich, wenn c' eine Constante bezeichnet,

$$\frac{\partial z_t}{\partial t} = c'$$

ergiebt. Nun ist aber nach dem Obigen und nach der Theorie der geradlinigen Bewegung die von der Projection des Punktes A auf der Axe der z vermöge der auf dieselbe wirkenden Zeitkraft Z_t am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t},$$

also, weil im vorliegenden Falle $\gamma = 90^\circ$, $\cos\gamma = 0$ ist,

$$\frac{\partial(z_t - c)}{\partial t} = \frac{\partial z_t}{\partial t},$$

und da, weil in diesem Falle $Z_t = 0$ ist, offenbar auch die in Rede stehende Geschwindigkeit verschwinden muss, so ist

$$\frac{\partial z_t}{\partial t} = c' = 0,$$

folglich, wenn c'' wieder eine Constante bezeichnet,

$$z_t = c''.$$

Am Anfange der Bewegung, d. h. für $t = 0$, befindet sich aber der Punkt A offenbar jedenfalls in der Ebene der xy, und es ist also $z_0 = 0$, folglich, weil nach dem Vorhergehenden z_t constant ist, allgemein $z_t = 0$. Demnach befindet sich unter den gemachten Voraussetzungen der Punkt A zu jeder Zeit in der Ebene der xy, oder seine ganze Bahn ist eine Curve von einfacher Krümmung. In diesem Falle reduciren sich also, wenn man die Ebene, in welcher die ganze Bahn liegt, als Ebene der xy annimmt, die obigen Systeme dreier die Bahn charakterisirender Gleichungen auf die beiden ersten Gleichungen dieser Systeme, weil schon durch diese beiden Gleichungen die Bahn vollständig charakterisirt

wird. Also hat man in diesem Falle, wenn, wie gesagt, die Ebene, in welcher die ganze Bahn nothwendig liegen muss, als Ebene der xy angenommen wird, nach 6) die beiden Gleichungen:

$$22)\quad X_t = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad Y_t = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};$$

ferner nach 17) und 18):

$$23)\quad \begin{cases} x_t = a + (V\cos\alpha + \int_0^t X_t\partial t)t - \int_0^t tX_t\partial t, \\ y_t = b + (V\cos\beta + \int_0^t Y_t\partial t)t - \int_0^t tY_t\partial t; \end{cases}$$

oder

$$24)\quad \begin{cases} x_t = a + (V\cos\alpha + \int_0^t F_t\cos\varphi_t\partial t)t - \int_0^t tF_t\cos\varphi_t\partial t, \\ y_t = b + (V\cos\beta + \int_0^t F_t\cos\psi_t\partial t)t - \int_0^t tF_t\cos\psi_t\partial t; \end{cases}$$

endlich nach 20) und 21):

$$25)\quad \mathfrak{v}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} \cos\xi_t = \dfrac{\dfrac{\partial x_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}, \\ \cos\eta_t = \dfrac{\dfrac{\partial y_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnet man aber in diesem Falle den von der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählt, durch ξ_t, so muss man im Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird, für $\cos\xi_t$, $\cos\eta_t$ respective $\cos\xi_t$, $\sin\xi_t$ setzen, und erhält also aus 26):

$$27)\quad \begin{cases} \cos\xi_t = \dfrac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}, \\ \sin\xi_t = \dfrac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}}; \end{cases}$$

woraus auch

$$28)\quad \tang\xi_t = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$$

folgt.

Wenn wir, indem wir wieder zu dem obigen allgemeinen Falle zurückkehren, die Wirkung der Kraft F_t in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ nach der geraden Linie, in welcher die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_t$ liegt, die offenbar mit der Berührenden der Trajectoria in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ zusammenfällt, indem wir zugleich diese Wirkung als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem ihre Richtung mit der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_t$ zusammenfällt oder derselben entgegengesetzt ist, durch $\mathfrak{F}_t$ bezeichnen; so erhellet mittelst einer einfachen, auf die Lehre von der Zerlegung der Kräfte gegründeten Betrachtung auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit

$$29)\quad \mathfrak{F}_t = X_t\cos\xi_t + Y_t\cos\eta_t + Z_t\cos\zeta_t,$$

und folglich nach 6) und 21):

$$30)\quad \mathfrak{F}_t = \frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} + \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} + \frac{\partial z_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}}$$

ist. Bezeichnet aber S_t den von dem Punkte A während des ganzen Verlaufs der Zeit t vom Anfange der Bewegung an stetig durchlaufenen Weg oder Bogen der Trajectoria, so ist, da augenscheinlich S_t mit t immer gleichzeitig zunimmt und abnimmt, der Differentialquotient $\frac{\partial S_t}{\partial t}$ jederzeit positiv, und folglich nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$31)\quad \frac{\partial S_t}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}.$$

Daher ist nach den beiden vorhergehenden Formeln:

$$32)\quad \mathfrak{G}_t=\frac{\partial x_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}+\frac{\partial y_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}+\frac{\partial z_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\partial S_t{}^2=\partial x_t{}^2+\partial y_t{}^2+\partial z_t{}^2$$

folgt aber durch Differentiation:

$$\partial S_t\partial^2 S_t=\partial x_t\partial^2 x_t+\partial y_t\partial^2 y_t+\partial z_t\partial^2 z_t,$$

also nach 32):

$$33)\quad \mathfrak{G}_t=\frac{\partial^2 S_t}{\partial t^2},$$

eine Gleichung, welche zu der entsprechenden Gleichung in der Theorie der geradlinigen Bewegung eine merkwürdige Analogie hat.

Aus der Vergleichung von 32) und 33) mit einander ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}+\frac{\partial y_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}+\frac{\partial z_t}{\partial S_t}\cdot\frac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 S_t}{\partial t^2},$$

also nach 6):

$$X_t\frac{\partial x_t}{\partial S_t}+Y_t\frac{\partial y_t}{\partial S_t}+Z_t\frac{\partial z_t}{\partial S_t}=\frac{\partial^2 S_t}{\partial t^2}$$

oder

$$X_t\partial x_t+Y_t\partial y_t+Z_t\partial z_t=\frac{\partial S_t\partial^2 S_t}{\partial t^2},$$

und folglich, weil

$$\partial.(\partial S_t)^2=2\partial S_t\partial^2 S_t$$

ist:

$$2(X_t\partial x_t+Y_t\partial y_t+Z_t\partial z_t)=\partial.\left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2,$$

also, wenn K eine Constante bezeichnet:

$$\left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2=K+2\int(X_t\partial x_t+Y_t\partial y_t+Z_t\partial z_t),$$

d. i., weil nach 20) und 31)

$$34)\quad \mathfrak{V}_t=\frac{\partial S_t}{\partial t}$$

ist, — eine Formel, deren Analogie mit der entsprechenden Formel in der Theorie der geradlinigen Bewegung nicht zu verkennen ist, —

$$35)\quad \mathfrak{V}_t^2 = K + 2\int(X_t\partial x_t + Y_t\partial y_t + Z_t\partial z_t).$$

Wenn nun

$$X_t\partial x_t + Y_t\partial y_t + Z_t\partial z_t$$

ein vollständiges Differential einer Function der drei veränderlichen Grössen x_t, y_t, z_t ist, so kann man

$$\int(X_t\partial x_t + Y_t\partial y_t + Z_t\partial z_t) = f(x_t, y_t, z_t)$$

setzen, und hat dann nach 35):

$$36)\quad \mathfrak{V}_t^2 = K + 2f(x_t, y_t, z_t).$$

Wenn für $x_t = m$, $y_t = n$, $z_t = k$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_t$ den Werth $\mathfrak{A}$ erhält, so ist

$$\mathfrak{A}^2 = K + 2f(m, n, k),$$

also

$$\mathfrak{V}_t^2 - \mathfrak{A}^2 = 2\{f(x_t, y_t, z_t) - f(m, n, k)\},$$

oder

$$\mathfrak{V}_t^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\{f(x_t, y_t, z_t) - f(m, n, k)\},$$

folglich

$$37)\quad \mathfrak{V}_t = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + 2\{f(x_t, y_t, z_t) - f(m, n, k)\}}.$$

II.

Wir wollen nun die Gleichungen 18), um ihren leichten Gebrauch zu zeigen, auf ein Paar Beispiele anwenden, und wählen dazu die Wurfbewegung im leeren Raume und im widerstehenden Mittel, wobei wir natürlich bloss die Fundamentalgleichungen dieser Bewegungen mittelst der in Rede stehenden Gleichungen entwickeln werden, da es uns auf die weitere Entwickelung der Theorieen dieser Bewegungen, wie sich von selbst versteht, hier nicht ankommen kann, wenn wir auch vielleicht späterhin wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen werden.

Wir wollen zuerst annehmen, dass F_t constant sei und stets nach unter einander parallelen Richtungen nach derselben Seite hin wirke. Nehmen wir dann die durch die Richtungen der Kräfte F und F_0 bestimmte Ebene als Ebene der xy und den positiven Theil der Axe der x der Richtung der Kraft F_0 parallel und von dem Anfange der Coordinaten an nach derselben Seite hin lie-

gend wie diese Richtung, so ist offenbar $c=0$, $\gamma=90^0$, und wegen der gemachten Voraussetzung allgemein $\varphi_t=0$, $\psi_t=90^0$, $\chi_t=90^0$. Setzen wir nun $F_t=2G$, so ist

$$\int_0^t F_t \cos\varphi_t \partial t = \int_0^t 2G\partial t = 2Gt,$$
$$\int_0^t F_t \cos\psi_t \partial t = 0,$$
$$\int_0^t F_t \cos\chi_t \partial t = 0$$

und

$$\int_0^t tF_t \cos\varphi_t \partial t = \int_0^t 2Gt\partial t = Gt^2,$$
$$\int_0^t tF_t \cos\psi_t \partial t = 0,$$
$$\int_0^t tF_t \cos\chi_t \partial t = 0.$$

Also ist nach 18), mit Rücksicht darauf, dass $c=0$ und $\gamma=90^0$ ist:

$$x_t = a + (V\cos\alpha + 2Gt)t - Gt^2,$$
$$y_t = b + Vt\cos\beta,$$
$$z_t = 0;$$

oder kürzer:

$$x_t = a + (V\cos\alpha + Gt)t,$$
$$y_t = b + Vt\cos\beta,$$
$$z_t = 0.$$

Weil hiernach allgemein, d. h. für jedes t, $z_t=0$ ist, so erhellet, dass die Trajectoria eine Curve von einfacher Krümmung ist, weil sie ganz in der Ebene der xy liegt, weshalb wir fernerhin bloss die beiden Gleichungen

$$1) \begin{cases} x_t = a + (V\cos\alpha + Gt)t, \\ y_t = b + Vt\cos\beta \end{cases}$$

oder

$$2) \begin{cases} x_t - a = (V\cos\alpha + Gt)t, \\ y_t - b = Vt\cos\beta \end{cases}$$

zu betrachten brauchen.

Lässt man den positiven Theil der Axe der x' eines neuen Coordinatensystems der $x'y'$ mit dem positiven Theile der Axe

der y, den positiven Theil der Axe der y' mit dem negativen Theile der Axe der x zusammenfallen, und bezeichnet die Coordinaten des Anfangspunktes der Bewegung in diesem neuen Systeme durch a', b'; so ist

$$a=-b',\ b=a';\ x_t=-y_t',\ y_t=x_t';$$

also nach dem Obigen:

$$3)\ \begin{cases} x_t'-a'=Vt\cos\beta, \\ y_t'-b'=-(V\cos\alpha+Gt)t. \end{cases}$$

Bezeichnen wir aber den von der Richtung der Kraft F mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Anfangspunkt der Bewegung gelegten, dem Systeme der $x'y'$ parallelen Coordinatensystems eingeschlossenen, von dem positiven Theile der in Rede stehenden ersten Axe an durch den entsprechenden Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch i; so ist, wie mittelst einer leichten Betrachtung sogleich erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$\cos\alpha=-\sin i,\ \cos\beta=\cos i;$$

also nach 3):

$$4)\ \begin{cases} x_t'-a=Vt\cos i, \\ y_t'-b=(V\sin i-Gt)t; \end{cases}$$

oder, wenn wir jetzt der Kürze wegen für a', b'; x_t', y_t' wieder respective a, b; x_t, y_t schreiben, und nur bemerken, dass der positive Theil der Axe der y der constanten Richtung der Kraft $2G$ parallel, aber entgegengesetzt ist:

$$5)\ \begin{cases} x_t-a=Vt\cos i, \\ y_t-b=(V\sin i-Gt)t. \end{cases}$$

Um nun die Gleichung der Trajectoria zu finden, müssen wir aus diesen beiden Gleichungen t eliminiren. Aus der ersten Gleichung ergiebt sich aber:

$$t=\frac{x_t-a}{V\cos i},$$

also, wenn man dies in die zweite Gleichung substituirt:

$$6)\ y_t-b=(x_t-a)\operatorname{tang} i-\frac{G(x_t-a)^2}{V^2\cos i^2},$$

welches die gesuchte Gleichung der Trajectoria ist.

Durch Differentiation der Gleichungen 5) nach t erhält man:

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}=V\cos i,\quad \frac{\partial y_t}{\partial t}=V\sin i-2Gt;$$

also

$$\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2=V^2-4GVt\sin i+4G^2t^2,$$

und folglich nach 25):

$$7)\quad \mathfrak{v}_t=\sqrt{V^2-4GVt\sin i+4G^2t^2}.$$

Endlich ist nach 26):

$$8)\quad \begin{cases} \cos\xi_t=\dfrac{V\cos i}{\sqrt{V^2-4GVt\sin i+4G^2t^2}}, \\ \sin\xi_t=\dfrac{V\sin i-2Gt}{\sqrt{V^2-4GVt\sin i+4G^2t^2}}; \end{cases}$$

und

$$9)\quad \operatorname{tang}\xi_t=\operatorname{tang} i-\frac{2Gt}{V\cos i}.$$

In diesen Formeln ist die ganze Theorie der Wurfbewegung im leeren Raume enthalten; die weitere Entwickelung gehört nicht hierher, weshalb wir jetzt zur Theorie der Wurfbewegung im widerstehenden Mittel übergehen wollen.

Wir wollen annehmen, dass ausser der Momentankraft F, die für sich eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit V erzeugt und deren Richtung mit den positiven Theilen dreier durch den Anfangspunkt (abc) der Bewegung gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst, auf den Punkt A in jedem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn eine constante Zeitkraft $F_t'=2G$ wirke, deren Richtungen sich stets parallel bleiben sollen und die auch immer nach derselben Seite hin wirken soll, wobei wir die von der Richtung der Kraft F_t' mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ_t', ψ_t', χ_t' bezeichnen wollen; endlich soll auf den Punkt A in jedem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn eine Kraft F_t'' wirken, welche dem Quadrate der von dem Punkte A in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ erlangten Geschwindigkeit proportional, und deren Richtung überall der Richtung dieser Geschwindigkeit

direct entgegengesetzt ist, wobei wir die von der Richtung der Kraft F_t'' mit den positiven Theilen dreier, durch den Punkt $(x_t y_t z_t)$ gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ_t'', ψ_t'', χ_t'' bezeichnen wollen.

In dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ lassen sich nach drei durch denselben gelegten, den Axen der x, y, z parallelen Axen die Kräfte F_t' und F_t'' respective in die Kräfte

$$F_t' \cos\varphi_t',\quad F_t' \cos\psi_t',\quad F' \cos\chi_t'$$

und

$$F_t'' \cos\varphi_t'',\quad F_t'' \cos\psi_t'',\quad F_t'' \cos\chi_t''$$

zerlegen, und die Kräfte, in welche sich nach denselben drei Axen die Resultirende der Kräfte F_t' und F_t'' zerlegen lässt, sind also:

$$F_t' \cos\varphi_t' + F_t'' \cos\varphi_t'',$$

$$F_t' \cos\psi_t' + F_t'' \cos\psi_t'',$$

$$F_t' \cos\chi_t' + F_t'' \cos\chi_t''.$$

Folglich muss man in den allgemeinen Gleichungen der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes offenbar

$$F_t \cos\varphi_t = F_t' \cos\varphi_t' + F_t'' \cos\varphi_t'',$$

$$F_t \cos\psi_t = F_t' \cos\psi_t' + F_t'' \cos\psi_t'',$$

$$F_t \cos\chi_t = F_t' \cos\chi_t' + F_t'' \cos\chi_t''$$

setzen. Um nun aber die Untersuchung möglichst zu vereinfachen, nehmen wir die durch die Richtungen der Kräfte F und F_0' bestimmte Ebene als Ebene der xy und den positiven Theil der Axe der x der Richtung der Kraft F_0' parallel und von dem Anfange der Coordinaten aus nach der entgegengesetzten Richtung hin liegend, wie die Richtung dieser Kraft; dann ist offenbar $c=0$, $\gamma=90°$, und wegen der gemachten Voraussetzungen allgemein $\varphi_t'=180°$, $\psi_t'=90°$, $\chi_t'=90°$. Also ist

$$F_t' \cos\varphi_t' = -2G,\quad F_t' \cos\psi_t' = 0,\quad F_t' \cos\chi_t' = 0.$$

Weil ferner nach der Voraussetzung F_t'' dem Quadrate der von dem Punkte A in dem Punkte $(x_t y_t z_t)$ seiner Bahn erlangten Geschwindigkeit proportional ist, so ist, wenn μ eine gewisse constante Grösse bezeichnet,

$$F_t'' = \mu \mathfrak{V}_t^2.$$

Auch ist nach der Voraussetzung die Richtung der Kraft F_t'' der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_t$ direct entgegengesetzt, und folglich, wenn ξ_t, η_t, ζ_t ihre aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben:

$$\varphi_t'' = 180^0 - \xi_t, \quad \psi_t'' = 180^0 - \eta_t, \quad \chi_t'' = 180^0 - \zeta_t;$$

also

$$F_t'' \cos\varphi_t'' = -\mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\xi_t, \quad F_t'' \cos\psi_t'' = -\mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\eta_t,$$
$$F_t'' \cos\chi_t'' = -\mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\zeta_t.$$

Nimmt man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich:

$$F_t \cos\varphi_t = -2G - \mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\xi_t,$$
$$F_t \cos\psi_t = -\mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\eta_t,$$
$$F_t \cos\chi_t = -\mu\mathfrak{V}_t^2 \cos\zeta_t.$$

Nach 20) und 21) erhält man aber sogleich:

$$F_t \cos\varphi_t = -2G - \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2},$$
$$F_t \cos\psi_t = -\mu\frac{\partial y_t}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2},$$
$$F_t \cos\chi_t = -\mu\frac{\partial z_t}{\partial t}\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}.$$

Diese Ausdrücke müsste man in die Gleichungen 18) einführen, um die Gleichungen der Bewegung des Punktes A unter den gemachten Voraussetzungen zu erhalten. Um indess diese Gleichungen etwas einfacher schreiben zu können, wollen wir wie gewöhnlich den ganzen in der Zeit t vom Anfange der Bewegung an von dem Punkte A zurückgelegten Weg, welcher immer als positiv betrachtet wird, durch S_t bezeichnen, wo dann bekanntlich

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$F_t \cos\varphi_t = X_t = -2G - \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t},$$
$$F_t \cos\psi_t = Y_t = -\mu\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t},$$
$$F_t \cos\chi_t = Z_t = -\mu\frac{\partial z_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}$$

ist. Führen wir nun diese Ausdrücke in die Gleichungen 18) ein, so erhalten wir als Gleichungen der Bewegung des Punktes A die folgenden:

$$10)\quad \begin{cases} x_t = a + \{V\cos\alpha - \int_0^t (2G + \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t})\,\partial t\}\,t + \int_0^t t(2G + \mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t})\,\partial t, \\ y_t = b + \{V\cos\beta - \mu\int_0^t \frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}\,\partial t\}\,t + \mu\int_0^t t\,\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}\,\partial t, \\ z_t = c + \{V\cos\gamma - \mu\int_0^t \frac{\partial z_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}\,\partial t\}\,t + \mu\int_0^t t\,\frac{\partial z_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}\,\partial t; \end{cases}$$

wo bekanntlich der Kürze wegen

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2}$$

gesetzt worden ist.

Die vollständige Entwickelung der vorstehenden Gleichungen auf dem Wege der Integration ist bekanntlich Schwierigkeiten unterworfen, die man bis jetzt auch noch nicht zu überwinden im Stande gewesen ist; der Grund dieser Schwierigkeiten erhellet aus ler Form dieser Gleichungen zu deutlich, und so ganz von selbst, lass darüber hier mehr zu bemerken ganz unnöthig ist. Eben iber deshalb, weil man bei der Entwickelung dieser Gleichungen, io weit dieselbe möglich ist, besondere Kunstgriffe anwenden muss, scheint es in diesem Falle vortheilhafter zu sein, nicht die ibige Form derselben zu benutzen, sondern auf die gewöhnliche Form 6), unter welcher sie sich in den bisherigen Lehrbüchern ler Mechanik dargestellt finden, zurückzugehen, nämlich auf die us dem Obigen sich unmittelbar ergebende Form:

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = -2G - \mu\dfrac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\mu\dfrac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\mu\dfrac{\partial z_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen weiter zu entwickeln, ist jetzt hier nicht nein Zweck. Der strengen Theorie wegen will ich jedoch für etzt nur zu bemerken nicht unterlassen, dass gewöhnlich ohne veiteren Beweis bei dieser Aufgabe angenommen wird, dass die Trajectoria eine Curve von einfacher Krümmung sei, wie z. B. uch Poisson thut, wenigstens in der mir nur zur Hand seienen Ausgabe (1811) seines Lehrbuchs, pag. 340; da dies mir nicht er Strenge gemäss zu sein scheint, so will ich hier streng beweisen, dass die Trajectoria ganz in einer Ebene liegen muss. Nach der dritten der Gleichungen 11) ist:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z_t}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial z_t}{\partial t}} = -\mu\frac{\partial S_t}{\partial t},\quad \text{also}\quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z_t}{\partial t}\right)}{\dfrac{\partial z_t}{\partial t}} = -\mu\partial S_t;$$

lglich durch Integration, wenn C_1'' eine Constante bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{l}.\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = C_1'' - \mu S_t,\quad \text{oder}\quad \mathrm{l}.\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = 2C_1'' - 2\mu S_t;$$

nd folglich, wenn e seine bekannte Bedeutung hat:

$$\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = e^{2C_1'' - 2\mu S_t} = e^{2C_1''}.e^{-2\mu S_t},$$

lso, wenn wir $C'' = e^{2C_1''}$ setzen:

$$\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = C''e^{-2\mu S_t}.$$

Die von der Projection des Punktes A auf der Axe der z ver[n] der Zeitkraft Z_t am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigke[it] nach I. bekanntlich

$$\frac{\partial(z_t - c - Vt\cos\gamma)}{\partial t},$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\gamma =$ $\cos\gamma = 0$ ist:

$$\frac{\partial z_t}{\partial t}.$$

Weil nun diese Geschwindigkeit für $t=0$ offenbar versc[hwin]det, so verschwindet

$$\frac{\partial z_t}{\partial t}$$

für $t=0$, und nach dem Vorhergehenden ist also

$$C''e^{-2\mu S_0} = 0,$$

folglich, indem man beachtet, dass $S_0=0$, also nicht etwa endlich ist, $C''=0$. Wegen der Formel

$$\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}\right)^2 = C''e^{-2\mu S_t}$$

ist daher allgemein, d. h. für jedes t,

$$\frac{\partial z_t}{\partial t} = 0,$$

also z_t eine Constante. Weil nun unter den gemachten Vo[rau]setzungen $z_0=c=0$ ist, so ist allgemein $z_t=0$, und die Tr[aject]toria liegt also ganz in der Ebene der xy, ist folglich eine C[urve] von einfacher Krümmung. Daher reichen zu ihrer Bestim[mung] die beiden Gleichungen

$$12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_t}{\partial t^2} = -2G - \mu\dfrac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2} = -\mu\dfrac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}; \end{cases}$$

oder auch die beiden ersten Gleichungen des Systems 10)

Ich werde vielleicht späterhin wieder auf diesen Gegen[stand] zurückkommen.

XXXII.

Elementare Betrachtungen über die Bildung der Bedingungsgleichungen aus gegebenen Beobachtungen.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

In der Academie der Wissenschaften zu Paris haben neuer-ichst verschiedene Verhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate vorzüglich zwischen den Herren Cauchy und Bien-ymé Statt gefunden. Es ist jedenfalls im höchsten Grade er-eulich, dass namentlich der zuerst genannte grosse Mathemati-er, der fast die ganze Analysis mit seinem überall, wo er sich inwendet, tief eindringenden kritischen Geiste durchforscht, viele chwache Seiten derselben aufgedeckt, aber auch vielen Partieen it grossem Glücke die erforderliche Strenge und Evidenz gege-en hat, jetzt seinen ungemeinen Scharfsinn der genannten wich-gen Methode zuwendet. Ausser mehreren anderen Aufsätzen idet sich insbesondere in den Comptes rendus des séan-es de l'Académie des sciences. Tome XXXVII. No. 5. er Août 1853.) pag. 150. ein

„Mémoire sur les coefficients limitateurs ou re-tricteurs par A. Cauchy", welches sein berühmter Verfasser it den folgenden Worten schliesst:

„De ce qu'on vient de dire, il résulte que la méthode des oindres carrés, appliquée à la résolution d'équations linéaires ont le nombre surpasse celui des inconnues, fournira toujours les ésultats les plus probables, si, la loi de facilité étant la même our les diverses erreurs que comportent les quantités fournies

par les experiences ou les observations, l'on ne peut assigner à ces erreurs aucune limite inférieure ni supérieure, et si d'ailleurs la probabilité d'une erreur comprise entre deux limites infiniment voisines est proportionelle à une exponentielle népérienne dont l'exposant soit le produit d'un coéfficient négatif par le carré de cette même erreur. Lorsque ces conclusions ne sont pas remplies, la méthode des moindres carrés peut fournir pour les inconnues $x, y, z, \ldots. v, w$ des valeurs qui diffèrent sensiblement des valeurs les plus probables. C'est effectivement ce que l'on peut conclure des formules établies dans ce Mémoire et ce que j'expliquerai plus en détail dans un prochain article *)."

Auch in einem späteren Aufsatze (Comptes rendus. No. 7. 16. Août 1853. p. 272.) gelangt Cauchy zu dem Schlusse:

„Donc la valeur la plus probable x de l'inconnue x peut différer sensiblement de celle que fournit la méthode des moindres carrés."

Dass die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate noch Manches zu wünschen übrig lässt, ist wohl schon vielfach gefühlt worden, wie die verschiedenen, namentlich in neuerer Zeit erschienenen Versuche, dieser Methode eine andere Begründung zu geben **), hinreichend beweisen. Mir scheint aber, dass die meisten dieser Versuche, bei aller ihrer sonstigen Verdienstlichkeit, sich im Wesentlichen nur sehr wenig von der ursprünglichen Begründung unterscheiden, welche der genannten Methode durch ihren berühmten deutschen Erfinder mittelst der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben worden ist; und dass eine im eigentlichen Sinne kritische neue Bearbeitung und Untersuchung dieser Methode bis jetzt noch Niemand hat zu Theil werden lassen. Desto erfreulicher ist es, wie schon gesagt, dass Cauchy sein ungemeines kritisches Talent der Methode der kleinsten Quadrate zuzuwenden jetzt angefangen hat und künftig noch mehr zuwenden zu wollen scheint, wobei man freilich, da die Sache noch zu neu ist, und die betreffenden analytischen Arbeiten bis jetzt eigentlich nur im Auszuge vorliegen, die weitere Vorlegung derselben und die weitere Entwickelung der betreffenden Verhandlungen erst noch wird ab-

---

*) M. s. Comptes rendus. No. 6. (8. Août 1853.) pag. 198.

**) Der neueste Versuch dieser Art ist von Herrn P. E. Biver, Lieutenant au corps d'État-Major belge gemacht worden in der Abhandlung: Théorie analytique des moindres carrés (Journal de Mathématiques par Liouville. Mai. 1853. p. 169.), wo auch der neue Begriff des risque d'erreur eingeführt wird.

warten müssen. Jedenfalls aber scheint schon jetzt so viel zu erhellen, dass die mehr erwähnte wichtige Methode nur mit Vorsicht angewandt werden darf, eine Ansicht, die auch ich selbst stets gehabt und bei verschiedenen Gelegenheiten, wo mir manche geradezu unsinnige Anwendungen dieser Methode auf Fälle, wo sie gar nicht hin gehörte, entgegen traten, auszusprechen nicht Anstand genommen habe, so dass ich mich jetzt um so mehr freue, in dieser Ansicht, wie es mir wenigstens scheint, mit einem der grössten Mathematiker unserer Zeit zusammenzutreffen, wobei ich zugleich noch bemerke, dass Cauchy ausdrücklich für viele Fälle seiner bekannten trefflichen Interpolationsmethode *) als einem geeignetern Hülfsmittel den Vorzug zuspricht **). Weitere Mittheilungen, namentlich in analytischer Beziehung, zu machen, ist, aus den oben angegebenen Gründen, jetzt noch nicht an der Zeit, und dieselben müssen einer späteren Gelegenheit aufbehalten bleiben. Auch habe ich in der vorliegenden Abhandlung, wenn deren Mittheilung auch durch die obigen Betrachtungen theilweise veranlasst worden ist, für jetzt einen anderen Zweck.

Wegen der grossen Wichtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate, weil dieselbe in allen empirischen Wissenschaften so häufig vortheilhafte Anwendung finden kann, ist schon öfters eine elementare Begründung derselben gewünscht und versucht worden, z. B., um nur eines Versuches dieser Art zu erwähnen, von dem berühmten Ivory, den man u. A. aus der „Astronomie pratique. Par Francoeur. Paris. 1830. 8. p. 426." kennen lernen kann. Ich halte alle diese Versuche für verfehlt und verunglückt, und bin der Meinung, dass gerade in diesem Falle die tiefsten Anschauungsweisen der höheren Mathematik an ihrem Orte sind, und dass hier ohne Anwendung der höheren Analysis, namentlich wo es sich um eine kritische Untersuchung handelt, die immer auf die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird zurückkommen müssen, ein glücklicher Fortschritt nicht gemacht werden kann. Dagegen ist es für den weniger Geübten immer von Wichtigkeit, eine allgemeine theoretisch begründete Ansicht von der genannten Methode zu haben. Aus diesem Grunde bin ich schon früher zu verschiedenen elementaren Betrachtungen über

---

*) M. s. Archiv. Thl. II. Nr. II. S. 41.

**) Bei den, den wahren Kenner zuweilen mit Schrecken erfüllenden Anwendungen, welche jetzt auf Gott weiss was alles für Dinge von der Methode der kleinsten Quadrate in der Naturwissenschaft, ja auch in der Landwirthschaft, gemacht werden, ist vorzüglich die Verwechslung dieser Methode mit einer Interpolationsmethode zu rügen. In dieser Beziehung ist recht eigentlich jetzt auf Cauchy zu verweisen.

diesen Gegenstand geführt worden, welche bloss die gewöhnlichen arithmetischen Elementarkenntnisse, insbesondere die in vielen Beziehungen so wichtige und interessante Lehre von den Bedingungen der Ungleichheit, in Anspruch nehmen, erkläre aber auf das Bestimmteste, dass ich durchaus nicht in der Meinung befangen bin, im Folgenden eine Begründung der Methode der kleinsten Quadrate im eigentlichen Sinne geliefert zu haben, was gerade meiner Grundansicht über diesen Gegenstand entgegen sein würde, da ich überzeugt bin, dass eine kritische Begründung, welche das Wahre von dem Falschen, das Genaue von dem Ungenauen sondert, nur mittelst der höheren Analysis etwa auf dem Wege, wie ihn jetzt Cauchy anbahnen zu wollen scheint, möglich ist. Ich habe hier nur „Elementare Betrachtungen über die Bildung der Bedingungsgleichungen aus gegebenen Beobachtungen" im Allgemeinen anstellen wollen, wobei man freilich auch auf die Grundformeln der Methode der kleinsten Quadrate geführt werden wird, und würde mich freuen, wenn ich durch diese Betrachtungen die, welche Anwendungen der genannten oder ähnlicher Methoden zu machen die Absicht, aber weder die Zeit, noch vielleicht auch die Kraft haben, in grössere Tiefen hinabzusteigen, in ihren Bestrebungen einigermassen gefördert haben sollte; noch mehr aber, wenn es mir vielleicht gelingen sollte, durch diese Betrachtungen die Ansicht über die in Rede stehende und ähnliche Methoden hin und wieder etwas fester zu stellen, wozu mir dieselben, ungeachtet ihrer mehr elementaren Natur, allerdings nicht ganz ungeeignet zu sein scheinen, wenn ich mir auch durchaus keine Illusionen über eine besondere Wichtigkeit derselben mache, worüber ich das Urtheil ganz und gar Anderen anheim stelle; ich habe bloss die Absicht gehabt, nach der angedeuteten Richtung hin der Sache einigermassen zu nützen. Zugleich wird das Folgende, wie ich hoffe, eine lehrreiche Anwendung der so vielfach wichtigen Lehre von den Mittelgrössen und von den Bedingungen der Ungleichheit darbieten, wobei ich bemerke, dass man alle hier zur Anwendung kommenden Sätze in der dem genannten Gegenstande gewidmeten Abhandlung im Archiv. Thl. I. Nr. XL., auf die ich mich daher hier im Allgemeinen beziehe, bewiesen findet.

Wir wollen annehmen, dass x eine in der Natur vorkommende völlig bestimmte und insofern also als constant oder unveränderlich zu betrachtende Grösse sei, und dass zwischen dieser Grösse

und zwei anderen Grössen A, B eine durch ein bekanntes und als theoretisch demonstrirt zu betrachtendes Naturgesetz bedingte, durch die Gleichung

$$A-Bx=0$$

ausgedrückte analytische Verbindung oder Beziehung Statt finde. Was die Grössen A und B betrifft, so wird zwischen denselben im Allgemeinen eine gewisse gegenseitige Abhängigkeit vorausgesetzt, so dass, wenn man für B gewisse willkührlich zu wählende verschiedene Werthe setzt, A gewisse verschiedene entsprechende Werthe erhält, welche letzteren, indem man für B gewisse verschiedene, nach Willkühr gewählte bestimmte Werthe gesetzt hat, durch Versuche oder Beobachtungen bestimmt werden müssen. Eben weil die Werthe von B als nach Willkühr gewählt oder gesetzt gedacht werden, sind dieselben als völlig fehlerfrei zu betrachten, wogegen die entsprechenden, durch Versuche oder Beobachtungen bestimmten Werthe von A im Allgemeinen jederzeit als mit Fehlern behaftet anzusehen sind. Wir haben oben gesagt, dass im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Grössen A und B vorausgesetzt werde, so dass zu bestimmten verschiedenen willkührlich gewählten Werthen von B gewisse verschiedene, durch Versuche oder Beobachtungen zu bestimmende Werthe von A gehören, bemerken nun aber noch nachträglich, dass dadurch keineswegs der Fall ausgeschlossen wird, dass B seiner Natur nach eine constante, eine willkührliche Annahme also nicht zulassende Grösse ist.

Um mich möglichst deutlich zu machen, wähle ich zuvörderst das folgende, übrigens durchaus bloss fingirte und in der Natur selbst wohl kaum irgend wie vorkommende Beispiel, was aber hier nichts zur Sache thut. Es sei x eine für die ganze Erde völlig bestimmte oder constante und unveränderliche Grösse, welche also auf der ganzen Erde oder vielmehr für die ganze Erde ein und denselben bestimmten Werth hat, die aber zu der Breite B und der Pendellänge A eines jeden Orts auf der Erde in der durch die Gleichung

$$A-Bx=0$$

ausgedrückten analytischen Beziehung steht, welche Gleichung als ein Naturgesetz oder als theoretisch unzweifelhaft demonstrirt zu betrachten ist. Um nun x zu bestimmen, werden wir uns an einen willkührlich zu wählenden Ort auf der Erde begeben, dessen Breite B bekannt ist, und an diesem Orte durch Versuche die Pendellänge A bestimmen, worauf wir aus der Gleichung

$$A-Bx=0$$

für x den Werth

$$x=\frac{A}{B}$$

erhalten. Wäre die Breite B, welche wir als Breite des Orts, wo wir die Pendellänge A durch Versuche bestimmten, annehmen, selbst mit einem Fehler behaftet, so würde dessenungeachtet B als fehlerfrei zu betrachten sein, indem sich der Fehler mit auf die durch Versuche an dem in Rede stehenden Orte bestimmte Pendellänge A übertragen würde, insofern wir diese Pendellänge als der bestimmten, durch B ausgedrückten Breite, unter welcher sie nicht wirklich bestimmt worden ist, entsprechend annehmen.

Bedeutete, um ein anderes Beispiel zu betrachten, x die Polhöhe eines bestimmten Orts auf der Erde und A die an diesem Orte durch Beobachtungen zu bestimmende Polhöhe desselben, so hätte man zwischen A und x die Gleichung $A=x$ oder

$$A-x=0,$$

und es würde also in diesem Falle im Obigen B den constanten Werth 1 haben.

Indem wir nun die Betrachtung wieder im Allgemeinen aufnehmen, wollen wir uns denken, dass man in der theoretisch demonstrirten Gleichung

$$A-Bx=0$$

für B die willkührlich gewählten bestimmten Werthe

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ldots.\ b_n$$

gesetzt, und die entsprechenden Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots.\ a_n$$

von A durch Versuche oder Beobachtungen ermittelt habe. Alle diese Werthe von A werden, als Resultate von Versuchen oder Beobachtungen, im Allgemeinen mit Fehlern behaftet sein, die wir respective durch

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ldots.\ \varphi_n$$

bezeichnen wollen, so dass also die wahren oder richtigen Werthe von A respective

$$a_1+\varphi_1,\ a_2+\varphi_2,\ a_3+\varphi_3,\ldots,\ a_n+\varphi_n$$

sind, und wir zur Bestimmung von x die folgenden Gleichungen erhalten:

$$a_1 + \varphi_1 - b_1 x = 0,$$
$$a_2 + \varphi_2 - b_2 x = 0,$$
$$a_3 + \varphi_3 - b_3 x = 0,$$
u. s. w.
$$a_n + \varphi_n - b_n x = 0;$$

enen sich

$$x = \frac{a_1 + \varphi_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{\varphi_1}{b_1},$$
$$x = \frac{a_2 + \varphi_2}{b_2} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{\varphi_2}{b_2},$$
$$x = \frac{a_3 + \varphi_3}{b_3} = \frac{a_3}{b_3} + \frac{\varphi_3}{b_3},$$
u. s. w.
$$x = \frac{a_n + \varphi_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{\varphi_n}{b_n}$$

ıt. Weil es nun aber in der Natur aller Versuche und Be-
ıtungen liegt, dass man die Fehler

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \varphi_n$$

: gar nicht kennt, bei in jeder Beziehung mit aller nur mög-
ı Sorgfalt und Genauigkeit angestellten Versuchen und Be-
.tungen aber jederzeit zu der Annahme berechtigt sein wird,
die Fehler

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots \varphi_n$$

[ull sehr nahe kommen, d. h. ihren absoluten Werthen nach
klein sind: so bleibt nichts Anderes übrig, als die Brüche

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$$

äherungswerthe von x zu betrachten, welche mit den (un-
nten) Fehlern

$$\frac{\varphi_1}{b_1}, \frac{\varphi_2}{b_2}, \frac{\varphi_3}{b_3}, \frac{\varphi_4}{b_4}, \ldots \frac{\varphi_n}{b_n},$$

ir respective durch

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots f_n$$

:hnen wollen, behaftet sind, so dass die richtigen oder wah-
Verthe von x nach dem Obigen

$$x=\frac{a_1}{b_1}+f_1,$$

$$x=\frac{a_2}{b_2}+f_2,$$

$$x=\frac{a_3}{b_3}+f_3,$$

u. s. w.

$$x=\frac{a_n}{b_n}+f_n$$

sind.

Ganz von selbst drängt sich nun die Frage auf:

Welchen der Näherungswerthe

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ldots\frac{a_n}{b_n}$$

von x soll man als definitiven Werth von x annehmen? worauf natürlich geantwortet werden muss:

Denjenigen, welchem unter den Fehlern

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ldots f_n$$

der dem absoluten Werthe nach kleinste Fehler entspricht.

Da man aber die Fehler

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ldots f_n$$

gar nicht kennt, so ist diese Antwort nur eine theoretische und hat einen praktischen Werth gar nicht. Wir müssen uns deshalb auf eine andere Art zu helfen suchen. In der That aber lässt sich für jetzt kaum eine andere praktisch fruchtbare Regel geben als folgende:

Wir müsssen für x nicht unbedingt einen von den Werthen

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4}\ldots\frac{a_n}{b_n}$$

setzen, sondern als Werth von x überhaupt eine Grösse annehmen, von welcher man versichert ist, dass, wenn man dieselbe für x setzt, der Fehler, welchen man begeht, eine Mittelgrösse zwischen den Fehlern

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots f_n$$

st.

Diesem Princip folgend, wollen wir nun die in Rede stehende rösse durch u und den entsprechenden Fehler durch Φ bezeichen, so dass also

$$x = u + \Phi$$

nd folglich nach der Voraussetzung in der gewöhnlichen Bezeichung der Mittelgrössen

$$\Phi = M(f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots f_n)$$

st. Aus dieser letzteren Gleichung folgt nach einem bekannten atze von den Mittelgrössen: *)

$$\Phi - x = M(f_1 - x,\ f_2 - x,\ f_3 - x, \ldots, f_n - x),$$

lso, weil nach dem Obigen

$$\Phi - x = -u$$

nd

$$f_1 - x = -\frac{a_1}{b_1},$$

$$f_2 - x = -\frac{a_2}{b_2},$$

$$f_3 - x = -\frac{a_3}{b_3},$$

u. s. w.

$$f_n - x = -\frac{a_n}{b_n}$$

:

$$-u = M\left(-\frac{a_1}{b_1},\ -\frac{a_2}{b_2},\ -\frac{a_3}{b_3}, \ldots, -\frac{a_n}{b_n}\right),$$

glich, wenn man die Grössen $-u$ und $-\frac{a_1}{b_1}, -\frac{a_2}{b_2}, -\frac{a_3}{b_3}, \ldots, -\frac{a_n}{b_n}$ mmtlich mit -1 multiplicirt: **)

$$u = M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right),$$

oraus sich ergiebt:

---

*) Archiv. Thl. I. Nr. XL. §. 38.

**) A. a. O. §. 37.

dass, wenn der Fehler Φ eine Mittelgrösse zwis(chen)
den Fehlern

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$$

ist, der Werth u von x jederzeit eine Mittelgr(össe)
zwischen den Werthen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

ist.

Dies lässt sich aber auch umkehren, d. h. es lässt sic(h)
weisen:

dass, wenn der Werth u von x eine Mittelgr(össe)
zwischen den Werthen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

ist, der Fehler Φ jederzeit eine Mittelgrösse zwisc(hen)
den Fehlern

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots f_n$$

ist.

Wenn nämlich

$$u = M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ist, so ist: *)

$$u - x = M\left(\frac{a_1}{b_1} - x, \frac{a_2}{b_2} - x, \frac{a_3}{b_3} - x, \ldots, \frac{a_n}{b_n} - x\right);$$

aber nach dem Obigen

$$u - x = -\Phi$$

und

$$\frac{a_1}{b_1} - x = -f_1,$$

$$\frac{a_2}{b_2} - x = -f_2,$$

$$\frac{a_3}{b_3} - x = -f_3,$$

u. s. w.

$$\frac{a_n}{b_n} - x = -f_n;$$

---

*) A. a. O. §. 38.

also

$$-\Phi = M(-f_1, -f_2, -f_3, \ldots, -f_n),$$

folglich, wenn man die Grössen

$$-\Phi \text{ und } -f_1, -f_2, -f_3, \ldots, -f_n$$

sämmtlich mit -1 multiplicirt: *)

$$\Phi = M(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n).$$

Hieraus geht also hervor, dass, wenn man für x einen dem obigen Princip entsprechenden Werth u setzen will, dieser Werth nothwendig eine Mittelgrösse zwischen den Werthen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

sein muss, und dass auch jede Mittelgrösse zwischen diesen Werthen dem in Rede stehenden Princip Genüge leistet.

Welche Mittelgrösse zwischen den in Rede stehenden Grössen man für u setzen will, ist an sich ganz gleichgültig, weil jede dem oben angegebenen Princip in gleicher Weise entspricht, und es bietet sich hier offenbar eine grosse Mannigfaltigkeit dar; jedoch wird sich nachher zeigen, ob sich nicht vielleicht eine oder die andere Mittelgrösse vorzugsweise empfiehlt.

Nach einem bekannten Satze von den Mittelgrössen **) ist, wenn

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \frac{\alpha_4}{\beta_4}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

beliebige Brüche, deren Nenner jedoch sämmtlich gleiche Vorzeichen haben, und

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots, \varrho_n$$

beliebige Grössen mit gleichen Vorzeichen sind, jederzeit

$$\frac{\alpha_1\varrho_1 + \alpha_2\varrho_2 + \alpha_3\varrho_3 + \ldots + \alpha_n\varrho_n}{\beta_1\varrho_1 + \beta_2\varrho_2 + \beta_3\varrho_3 + \ldots + \beta_n\varrho_n}$$

eine Mittelgrösse zwischen den Brüchen

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \frac{\alpha_4}{\beta_4}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

oder in der bekannten Bezeichnung der Mittelgrössen:

---

*) A. a. O. §. 37.

**) A. a. O. §. 45.

$$\frac{\alpha_1\varrho_1+\alpha_2\varrho_2+\alpha_3\varrho_3+\ldots+\alpha_n\varrho_n}{\beta_1\varrho_1+\beta_2\varrho_2+\beta_3\varrho_3+\ldots+\beta_n\varrho_n}=M\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \frac{\alpha_2}{\beta_2},\ \frac{\alpha_3}{\beta_3},\ldots,\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

Wollen wir nun diesen Satz, der wohl das allgemeinste Kriterium einer Mittelgrösse, was man bis jetzt besitzt, ausspricht, auf unseren Fall anwenden, so müssen wir unsere Brüche

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ldots,\frac{a_n}{b_n}$$

zuerst unbedingt so ausdrücken, dass, ohne ihre Werthe zu ändern, ihre Nenner sämmtlich einerlei Vorzeichen erhalten, weil die Erfüllung dieser Bedingung von unserm obigen Satze nothwendig vorausgesetzt wird. Da wir nun aber von den Vorzeichen der Nenner

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ldots,b_n$$

bei dieser ganz allgemein gehaltenen Betrachtung gar keine Kenntniss besitzen, so lässt sich die in Rede stehende Bedingung auf keine andere, wenigstens auf keine einfachere Weise erfüllen, als dadurch, dass wir Zähler und Nenner eines jeden unserer Brüche mit seinem Nenner multipliciren, wodurch wir statt der Brüche

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ldots,\frac{a_n}{b_n}$$

die denselben der Reihe nach gleichen Brüche

$$\frac{a_1b_1}{b_1b_1},\ \frac{a_2b_2}{b_2b_2},\ \frac{a_3b_3}{b_3b_3},\ \frac{a_4b_4}{b_4b_4},\ldots,\frac{a_nb_n}{b_nb_n}$$

oder

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2},\ \frac{a_2b_2}{b_2^2},\ \frac{a_3b_3}{b_3^2},\ \frac{a_4b_4}{b_4^2},\ldots,\frac{a_nb_n}{b_n^2}$$

erhalten, deren Nenner alle positiv sind; und bezeichnen nun

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ldots,\varrho_n$$

ganz beliebige Grössen von gleichen Vorzeichen, so ist

$$\frac{a_1b_1\varrho_1+a_2b_2\varrho_2+a_3b_3\varrho_3+\ldots+a_nb_n\varrho_n}{b_1^2\varrho_1+b_2^2\varrho_2+b_3^2\varrho_3+\ldots+b_n^2\varrho_n}$$

eine Mittelgrösse zwischen den Brüchen

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2},\ \frac{a_2b_2}{b_2^2},\ \frac{a_3b_3}{b_3^2},\ \frac{a_4b_4}{b_4^2},\ldots,\frac{a_nb_n}{b_n^2}$$

d. h. zwischen den Brüchen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \ldots, \frac{a_n}{b_n};$$

also

$$\frac{a_1b_1\varrho_1 + a_2b_2\varrho_2 + a_3b_3\varrho_3 + \ldots + a_nb_n\varrho_n}{b_1^2\varrho_1 + b_2^2\varrho_2 + b_3^2\varrho_3 + \ldots + b_n^2\varrho_n}$$
$$= M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right).$$

Rücksichtlich der Annahme der Grössen

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots, \varrho_n,$$

ie nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie sämmtlich gleiche 'orzeichen haben sollen, bietet sich nun wieder eine grosse Manigfaltigkeit dar. Am Einfachsten ist es offenbar, diese Grössen ämmtlich einander gleich anzunehmen, oder, was im Grunde auf asselbe hinauskommt, sie sämmtlich der Einheit gleich zu setzen, 'odurch man zu der Gleichung

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2} = M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

;elangt. Man könnte aber auch für

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots, \varrho_n$$

ler Reihe nach die Brüche

$$\frac{1}{b_1^2}, \frac{1}{b_2^2}, \frac{1}{b_3^2}, \frac{1}{b_4^2}, \ldots, \frac{1}{b_n^2}$$

etzen, welche Annahme zu der Gleichung

$$\frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}}{n} = M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ihren würde. Man könnte also, um dem obigen Princip zu geigen, sowohl

$$u = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2},$$

s auch

$$u = \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}}{n}$$

tzen. Für diese beiden Werthe von u, die sich besonders leicht rbieten, wollen wir nun einmal, indem wir wie oben

$$x = u + \Phi$$

setzen, den Fehler Φ zu bestimmen, d. h. durch die oben durch

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$$

bezeichneten Fehler, indem wir nämlich bekanntlich

$$x = \frac{a_1}{b_1} + f_1,$$

$$x = \frac{a_2}{b_2} + f_2,$$

$$x = \frac{a_3}{b_3} + f_3,$$

u. s. w.

$$x = \frac{a_n}{b_n} + f_n$$

gesetzt haben, auszudrücken suchen.

Setzen wir zuerst

$$u = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2}$$

und bezeichnen der besseren Unterscheidung wegen in diesem Falle den Werth des Fehlers Φ durch F, so haben wir wegen der Gleichungen

$$x = u + F$$

und

$$x = \frac{a_1}{b_1} + f_1,$$

$$x = \frac{a_2}{b_2} + f_2,$$

$$x = \frac{a_3}{b_3} + f_3,$$

u. s. w.

$$x = \frac{a_n}{b_n} + f_n$$

die folgenden Gleichungen:

$$\left(u - \frac{a_1}{b_1}\right) + (F - f_1) = 0,$$

$$\left(u - \frac{a_2}{b_2}\right) + (F - f_2) = 0,$$

$$\left(u-\frac{a_3}{b_3}\right)+(F-f_3)=0,$$

u. s. w.

$$\left(u-\frac{a_n}{b_n}\right)+(F-f_n)=0.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$b_1^2,\ b_2^2,\ b_3^2,\ \ldots.,\ b_n^2;$$

so erhalten wir:

$$(b_1^2u-a_1b_1)+b_1^2(F-f_1)=0,$$

$$(b_2^2u-a_2b_2)+b_2^2(F-f_2)=0,$$

$$(b_3^2u-a_3b_3)+b_3^2(F-f_3)=0,$$

u. s. w.

$$(b_n^2u-a_nb_n)+b_n^2(F-f_n)=0.$$

Addiren wir nun diese Gleichungen zu einander, und bemerken, dass wegen

$$u=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots.+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.+b_n^2}$$

offenbar

$$b_1^2u+b_2^2u+b_3^2u+\ldots.+b_n^2u=(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.+b_n^2)u$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots.+a_nb_n,$$

so

$$(b_1^2u-a_1b_1)+(b_2^2u-a_2b_2)+\ldots.+(b_n^2u-a_nb_n)=0$$

t, so erhalten wir:

$$b_1^2(F-f_1)+b_2^2(F-f_2)+b_3^2(F-f_3)+\ldots.+b_n^2(F-f_n)=0,$$

so

$$F=\frac{b_1^2f_1+b_2^2f_2+b_3^2f_3+\ldots.+b_n^2f_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots.+b_n^2}.$$

Aus diesem bemerkenswerthen Ausdrucke von F, in welchem e Zähler

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots.,\ a_n$$

ir nicht vorkommen, lässt sich Folgendes ableiten.

Unter der Voraussetzung, dass $n > 1$ ist, ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Bedingungen der Ungleichheit: *)

$$(b_1^2f_1+b_2^2f_2+b_3^2f_3+\ldots+b_n^2f_n)^2$$
$$\overline{\overline{<}}\,(b_1^4+b_2^4+b_3^4+\ldots+b_n^4)(f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Brüche

$$\frac{f_1}{b_1^2},\ \frac{f_2}{b_2^2},\ \frac{f_3}{b_3^2},\ldots,\frac{f_n}{b_n^2}$$

sämmtlich unter einander gleich oder nicht sämmtlich unter einander gleich sind. Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{aligned}(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)^2=b_1^4+b_2^4+b_3^4+b_4^4+\ldots+b_n^4\\+2b_1^2b_2^2+2b_1^2b_3^2+2b_1^2b_4^2+\ldots+2b_1^2b_n^2\\+2b_2^2b_3^2+2b_2^2b_4^2+\ldots+2b_2^2b_n^2\\+2b_3^2b_4^2+\ldots+2b_3^2b_n^2\\ \text{u. s. w.}\\+2b_{n-1}^2b_n^2,\end{aligned}$$

also, wenn nur die Nenner

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ldots b_n$$

nicht sämmtlich verschwinden:

$$(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)^2>b_1^4+b_2^4+b_3^4+\ldots+b_n^4.$$

Aus dieser und der obigen Ungleichung ergiebt sich durch Division

$$\left(\frac{b_1^2f_1+b_2^2f_2+b_3^2f_3+\ldots+b_n^2f_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2}\right)^2<f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2,$$

also nach dem Obigen

$$F^2<f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2,$$

folglich

$$\text{val. abs. } F<\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2}.$$

Setzen wir ferner

$$u=\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}}{n},$$

*) A. a. O. S. 77.

so wollen wir auch den Werth des Fehlers Φ, den wir hier besserer Unterscheidung wegen durch $\mathfrak{F}$ bezeichnen, folglich jetzt $x=u+\mathfrak{F}$ setzen wollen, zu bestimmen suchen, was hier sehr leicht ist. Denn aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$x=\frac{a_1}{b_1}+f_1,$$

$$x=\frac{a_2}{b_2}+f_2,$$

$$x=\frac{a_3}{b_3}+f_3,$$

u. s. w.

$$x=\frac{a_n}{b_n}+f_n$$

erhalten wir durch Addition:

$$nx=\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right)+(f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n),$$

also

$$nx=nu+(f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n)$$

oder

$$n(x-u)=f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n,$$

und weil nun

$$x=u+\mathfrak{F},\text{ also } x-u=\mathfrak{F}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{F}=\frac{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}{n}.$$

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Bedingungen der Ungleichheit *) ist, wenn nur $n>1$ ist:

$$\text{val. abs. }\frac{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}{n}\overset{=}{<}\sqrt{\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots f_n^2}{n}},$$

also

$$\text{val. abs. }\mathfrak{F}\overset{=}{<}\sqrt{\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2}{n}},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Fehler

---

*) A. a. O. §. 26.

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4, \ldots, f_n$$

sämmtlich unter einander gleich oder nicht sämmtlich unter e
der gleich sind.

Die beiden Ungleichungen

$$\text{val. abs. } F < \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2},$$

$$\text{val. abs. } \mathfrak{F} \overset{=}{<} \sqrt{\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2}{n}},$$

wenn sie auch natürlich keineswegs zu einem derartigen str
Schlusse berechtigen, führen jedoch zu der Vermuthung, d
vielen Fällen $\mathfrak{F} < F$ sein werde. Wir wollen einmal, um uns
Beispiels zu bedienen, annehmen, dass man wisse, dass d
naue Werth der Grösse x die Zahl 7 sei; auf dem Weg
Versuchs oder der Beobachtung habe man aber für x die W
$\frac{9}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{14}{3}$ gefunden, so dass also im Obigen

$$\frac{a_1}{b_1}=\tfrac{9}{1}=9,$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\tfrac{11}{2}=5\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{a_3}{b_3}=\tfrac{14}{3}=4\tfrac{2}{3}$$

ist; und weil nun

$$\begin{aligned} x=7&=9-2\\ &=5\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{2}\\ &=4\tfrac{2}{3}+2\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

ist, so ist

$$f_1=-2,\quad f_2=+\tfrac{3}{2},\quad f_3=+\tfrac{7}{3}.$$

Also ist nach der Formel

$$F=\frac{b_1^2f_1+b_2^2f_2+b_3^2f_3+\ldots+b_n^2f_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2},$$

wenn man in dieselben die obigen Werthe einführt:

$$F=\frac{1^2.-2+2^2.+\frac{3}{2}+3^2.+\frac{7}{3}}{1^2+2^2+3^2}=\frac{-2+6+21}{1+4+9}=\frac{25}{14}=1{,}78$$

Ferner ist nach der Formel

$$\mathfrak{F}=\frac{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}{n},$$

wenn man in dieselbe die obigen Werthe einführt:

$$\mathfrak{S}=\frac{-2+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}}{3}=\frac{12+9+14}{18}=\frac{11}{18}=0{,}611;$$

folglich in diesem Falle wirklich

$$\mathfrak{S}<F.$$

Hiervon aber jetzt ganz abgesehen, finden wir im Vorhergehenden durchaus keinen festen Anhaltepunkt, welcher uns veranlassen könnte, der ersten oder der zweiten Bestimmungsweise von u den Vorzug zu geben.

In Bezug auf die erste Bestimmungsweise

$$u=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2}$$

ist jedoch zu bemerken, dass dieselbe durch eine sehr merkwürdige Eigenthümlichkeit ausgezeichnet ist, welche wir jetzt beweisen wollen *). Zu dem Ende stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Wenn Alles wie im Vorhergehenden bleibt, wenn namentlich unter den im Vorhergehenden festgestellten Bedingungen zwischen den Grössen x und A, B die strenge, theoretisch demonstrirte Gleichung

$$A-Bx=0$$

Statt findet, und durch Versuche oder Beobachtungen für A, B die zusammenstimmenden oder einander entsprechenden Werthe

---

*) Beiläufig bemerken wir noch, dass, wenn

$$b_1=b_2=b_3=\ldots=b_n=1$$

ist, beide Bestimmungsweisen

$$u=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

$$u=\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}}{n}$$

zu demselben Resultat

$$u=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

führen.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n;$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots,\ b_n$$

ermittelt worden sind; so soll man die Grösse x so bestimmen oder für dieselbe einen solchen Werth angeben, dass, wenn man denselben für x in die Functionen

$$a_1-b_1x,\ a_2-b_2x,\ a_3-b_3x,\ \ldots,\ a_n-b_nx$$

einführt, die dadurch hervorgehenden Werthe dieser Functionen zwar nicht, wie es eigentlich sein müsste, völlig verschwinden, dass aber die von Null abweichenden Werthe dieser Functionen, welche man die übrig bleibenden Fehler zu nennen pflegt, so beschaffen sind, dass die Summe ihrer Quadrate ein Minimum ist, so dass also, wenn man den gesuchten Werth von x der Kürze wegen durch x selbst und die übrig bleibenden Fehler durch

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ \ldots\ F_n$$

bezeichnet, also

$$a_1-b_1x=F_1,$$
$$a_2-b_2x=F_2,$$
$$a_3-b_3x=F_3,$$
u. s. w.
$$a_n-b_nx=F_n,$$

setzt, die Summe der Fehlerquadrate

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_n^2$$

ein Minimum, oder dass, was Dasselbe ist,

$$(a_1-b_1x)^2+(a_2-b_2x)^2+(a_3-b_3x)^2+\ldots+(a_n-b_nx)^2=\text{Min.}$$

ist.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist sehr leicht. Denn differentiirt man die zu einem Minimum zu machende Function

$$(a_1-b_1x)^2+(a_2-b_2x)^2+(a_3-b_3x)^2+\ldots+(a_n-b_nx)^2$$

nach x, so erhält man als ersten Differentialquotienten die Grösse

$$-2\{b_1(a_1-b_1x)+b_2(a_2-b_2x)+b_3(a_3-b_3x)+\ldots+b_n(a_n-b_nx)\},$$

und folglich nach den ersten Elementarlehren der Theorie der Maxima und Minima zur Bestimmung der gesuchten Grösse x die Gleichung:

$$b_1(a_1-b_1x)+b_2(a_2-b_2x)+b_3(a_3-b_3x)+....+b_n(a_n-b_nx)=0,$$

woraus sich

$$x=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+....+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+....+b_n^2}$$

ergiebt. Um uns zu überzeugen, dass wirklich ein Minimum Statt findet, müssen wir den zweiten Differentialquotienten unserer obigen Function entwickeln, welcher ist:

$$2(b_1^2+b_2^2+b_3^2+....+b_n^2).$$

Da dieser constante Differentialquotient für jedes x positiv ist, so findet bekanntlich wirklich ein Minimum Statt.

Auch ist zu bemerken, dass, weil die Gleichung

$$b_1(a_1-b_1x)+b_2(a_2-b_2x)+b_3(a_3-b_3x)+....+b_n(a_n-b_nx)=0$$

nur die eine reelle Wurzel

$$x=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+....+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+....+b_n^2},$$

hat, es nur ein Minimum, auch kein Maximum unserer stets positiven Function

$$(a_1-b_1x)^2+(a_2-b_2x)^2+(a_3-b_3x)^2+....+(a_n-b_nx)^2$$

giebt, woraus hervorgeht, dass der Werth dieser Function, welcher dem Werthe

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+....+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+....+b_n^2}$$

von x entspricht, ein wirkliches Kleinstes, d. h. in der That der absolut genommen kleinste unter allen Werthen ist, welche die Function

$$(a_1-b_1x)^2+(a_2-b_2x)^2+(a_3-b_3x)^2+....+(a_n-b_nx)^2$$

überhaupt erhalten kann, indem diese Function offenbar nur durch eine Curve, etwa von der aus Taf. V. Fig. I. ersichtlichen Gestalt, dargestellt werden kann, weil jede andere Gestalt dieser Curve wenigstens noch ein Maximum bedingen würde, wie etwa bei der in Taf. V. Fig. II. dargestellten Curve; vielleicht auch mehrere Maxima und Minima, wozu man sich erläuternde Zeichnungen leicht selbst wird entwerfen können.

Aus dem Vorhergehenden sehen wir nun, dass die erste unserer beiden obigen Bestimmungen von u, nämlich

$$u = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2},$$

die jedenfalls sehr merkwürdige Eigenthümlichkeit besitzt, wenn man diesen Werth von u für x in die Functionen

$$a_1 - b_1 x,\ a_2 - b_2 x,\ a_3 - b_3 x, \ldots, a_n - b_n x$$

einführt, die Summe der Quadrate der Abweichungen dieser tionen von Null, d. h. die Summe der Quadrate der sogena übrig bleibenden Fehler oder, wie man wohl auch kurz zu pflegt, die Summe der Fehlerquadrate, ein Minimum wird.

Bestimmen wir also die Grösse x dadurch, dass wir

$$u = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2}$$

setzen, und diesen Werth dann als Werth der gesuchten G x annehmen, so können wir als Princip dieser Bestimmun x folgendes aufstellen:

Man muss x so bestimmen, dass sein Werth, i Functionen

$$a_1 - b_1 x,\ a_2 - b_2 x,\ a_3 - b_3 x, \ldots, a_n - b_n x$$

eingeführt, die Summe der Quadrate der dadurch vorgehenden Werthe dieser Functionen, nämlich Summe der Quadrate der sogenannten übrig blei den Fehler, insofern nämlich der Werth von x eig lich alle diese Functionen zum Verschwinden bri oder auf Null reduciren sollte, zu einem Mini macht.

Es kommen nun aber in den Naturwissenschaften häufig vor, wo zwischen mehreren in der Natur existirenden, völli stimmten und insofern als constant zu betrachtenden Grösse

$$x,\ y,\ z,\ v, \ldots$$

und gewissen anderen Grössen

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots$$

ein theoretisch demonstrirtes, durch die Gleichung

$$A - Bx - Cy - Dz - Ev - \ldots = 0$$

analytisch ausgedrücktes Naturgesetz Statt findet. Denken uns dann wieder, dass für

$$B,\ C,\ D,\ E, \ldots$$

die willkührlich gewählten bestimmten Werthe

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4, \ldots, b_n;$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \ldots, c_n;$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4, \ldots, d_n;$$
$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4, \ldots, e_n;$$

u. s. w.

gesetzt, und die entsprechenden Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_n$$

von A durch Versuche oder Beobachtungen bestimmt worden sind, wobei immer angenommen wird, dass n grösser sei als die Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Grössen $x,\ y,\ z,\ v, \ldots$; so kann in ähnlicher Weise wie vorher, da $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_n$ natürlich mit Fehlern behaftet sein werden, wieder nach einer Methode, die unbekannten Grössen $x,\ y,\ z,\ v, \ldots$ auf die vortheilhafteste oder wenigstens auf eine möglichst vortheilhafte Weise zu bestimmen, gefragt werden.

Denken wir uns nun einmal, dass die genauen Werthe von $y,\ z,\ v, \ldots$ bekannt wären und nur x unbekannt wäre, so würde man, wenn man das vorher ausgesprochene Princip festhalten wollte, x so bestimmen müssen, dass sein Werth, in die Functionen

$$(a_1 - c_1y - d_1z - e_1v - \ldots) - b_1x,$$
$$(a_2 - c_2y - d_2z - e_2v - \ldots) - b_2x,$$
$$(a_3 - c_3y - d_3z - e_3v - \ldots) - b_3x,$$

u. s. w.

$$(a_n - c_ny - d_nz - e_nv - \ldots) - b_nx$$

oder

$$a_1 - b_1x - c_1y - d_1z - e_1v - \ldots,$$
$$a_2 - b_2x - c_2y - d_2z - e_2v - \ldots,$$
$$a_3 - b_3x - c_3y - d_3z - e_3v - \ldots,$$

u. s. w.

$$a_n - b_nx - c_ny - d_nz - e_nv - \ldots$$

eingeführt, die Summe der Quadrate der dadurch hervorgehenden Werthe dieser Functionen zu einem Minimum machte.

Wären ferner die genauen Werthe von $x,\ z,\ v, \ldots$ bekannt und

nur y unbekannt, so würde man y dem obigen Princip gen bestimmen müssen, dass sein Werth, in die Functionen

$$(a_1-b_1x-d_1z-e_1v-....)-c_1y,$$
$$(a_2-b_2x-d_2z-e_2v-....)-c_2y,$$
$$(a_3-b_3x-d_3z-e_3v-....)-c_3y,$$
u. s. w.
$$(a_n-b_nx-d_nz-e_nv-....)-c_ny$$

oder

$$a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-....,$$
$$a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-....,$$
$$a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-....,$$
u. s. w.
$$a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-....$$

eingeführt, die Summe der Quadrate der dadurch hervorg Werthe dieser Functionen zu einem Minimum machte.

Ein ganz ähnliches Raisonnement würde sich in Be jede der übrigen unbekannten Grössen, überhaupt also ir auf alle unbekannten Grössen, anstellen lassen.

Nun aber befindet man sich keineswegs in der Lage, eine der Grössen $x, y, z, v, ...$ zu kennen, vielmehr s diese Grössen völlig unbekannt; und will man also das ob gesprochene Princip auf den hier vorliegenden Fall mehr bekannten Grössen, so viel als es unter den gegebenen gungen irgend möglich ist, anwenden, so bleibt nichts übrig, als auf folgende Art zu verfahren oder das obige auf folgende Art zu erweitern:

Man muss sämmtliche unbekannte Grössen

$$x, y, z, v, ...$$

so bestimmen, dass, wenn man *irgend eine* kannte Grösse aus vorstehender Reihe ausläs die bestimmten Werthe der übrigen unbek Grössen in die Functionen

$$a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-....,$$
$$a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-....,$$
$$a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-....,$$
u. s. w.
$$a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-....$$

einführt, dann die ausgelassene Grösse jederzeit als so bestimmt anzusehen ist, dass, ihr bestimmter Werth, in die obigen Functionen eingeführt, die Summe der Quadrate der dadurch hervorgehenden Werthe dieser Functionen, indem man sich natürlich nur die ausgelassene Grösse als variabel, alle übrigen als constant denkt, zu einem Minimum macht.

Allen in diesem erweiterten Princip ausgesprochenen Bedingungen wird aber offenbar vollständig Genüge geleistet werden, wenn man die unbekannten Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots.$$

so bestimmt, dass die Summe

$$\begin{aligned}
&(a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots.)^2\\
+&(a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots.)^2\\
+&(a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots.)^2\\
&\text{u. s. w.}\\
+&(a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots.)^2
\end{aligned}$$

jederzeit ein Minimum wird, wenn man sich nur eine, d. h. irgend eine der Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots.$$

als veränderlich, alle übrigen als constant denkt; d. h., nach den elementarsten Sätzen der Lehre von den Maximis und Minimis, die Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots.$$

müssen so bestimmt werden, dass der Differentialquotient der obigen Summe von Quadraten, wenn man sich irgend eine der Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots.$$

als variabel, alle übrigen als constant denkt, allemal verschwindet oder gleich Null wird. Differentiiren wir nun die obige Summe von Quadraten nach der Reihe

nach x, indem wir $y,\ z,\ v,\ldots.$ als constant betrachten;
" y, " " $x,\ z,\ v,\ldots.$ " " ",
" z, " " $x,\ y,\ v,\ldots.$ " " "
" v, " " $x,\ y,\ z,\ldots.$ " " "

u. s. w.

und setzen die dadurch hervorgehenden Differentialquotienten gleich Null, so erhalten wir nach einigen ganz leichten Verwandlungen zur Bestimmung der Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots$$

die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} b_1(a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots) \\ +\,b_2(a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots) \\ +\,b_3(a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots) \\ \text{u. s. w.} \\ +\,b_n(a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots) \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1(a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots) \\ +\,c_2(a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots) \\ +\,c_3(a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots) \\ \text{u. s. w.} \\ +\,c_n(a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots) \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} d_1(a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots) \\ +\,d_2(a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots) \\ +\,d_3(a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots) \\ \text{u. s. w.} \\ +\,d_n(a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots) \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} +\,e_1(a_1-b_1x-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots) \\ +\,e_2(a_2-b_2x-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots) \\ +\,e_3(a_3-b_3x-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots) \\ \text{u. s. w.} \\ +\,e_n(a_n-b_nx-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots) \end{array}\right\}=0,$$

u. s. w.

Dass dies gerade eben so viel Gleichungen des ersten Grades wie unbekannte Grössen x, y, z, v,...., und dass also durch diese Gleichungen die unbekannten Grössen im Allgemeinen vollkommen bestimmt sind, ist klar.

Bezeichnet man jetzt der Kürze wegen eine Summe von der allgemeinen Form

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+\ldots+p_nq_n$$

durch $\int pq$, so kann man die obigen Gleichungen auf folgende Art ausdrücken:

$$\int ab - x\int bb - y\int bc - z\int bd - v\int be - \ldots = 0,$$
$$\int ac - x\int bc - y\int cc - z\int cd - v\int ce - \ldots = 0,$$
$$\int ad - x\int bd - y\int cd - z\int dd - v\int de - \ldots = 0,$$
$$\int ae - x\int be - y\int ce - z\int de - v\int ee - \ldots = 0,$$

u. s. w.

Dem Vorhergehenden lässt sich noch eine etwas andere Fas-
g auf folgende Art geben:

Man kann nämlich annehmen, dass X eine in der Natur vor-
nmende Grösse sei, welche von den bestimmten, als constant
betrachtenden Grössen x, y, z, v,.... auf folgende Art:

$$X = \mathfrak{A} - Bx - Cy - Dz - Ev - \ldots$$

längt, und dass man für die für $\mathfrak{A}$, B, C, D, E,.... will-
rlich angenommenen Werthe

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots, \alpha_n;$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4, \ldots, b_n;$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \ldots, c_n;$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4, \ldots, d_n;$$
$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4, \ldots, e_n;$$

u. s. w.

ch Versuche oder Beobachtungen für X die entsprechenden Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots, A_n$$

nden habe. Weil man nun die Gleichung

$$X - \mathfrak{A} + Bx + Cy + Dz + Ev + \ldots = 0$$

, so ist, wenn man der Kürze wegen

$$A_1 - \alpha_1 = a_1,\ A_2 - \alpha_2 = a_2,\ A_3 - \alpha_3 = a_3, \ldots, A_n - \alpha_n = a_n$$

t, indem man vorstehende Gleichung mit der im Obigen be-
hteten Gleichung

$$A - Bx - Cy - Dz - Ev - \ldots = 0$$

leicht, klar, dass man im Obigen für

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_n;$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4, \ldots, b_n;$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \ldots, c_n;$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4, \ldots, d_n;$$

u. s. w.

respective

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_n;$$
$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ -b_4, \ldots, -b_n;$$
$$-c_1,\ -c_2,\ -c_3,\ -c_4, \ldots, -c_n;$$
$$-d_1,\ -d_2,\ -d_3,\ -d_4, \ldots, -d_n;$$
u. s. w.

setzen muss, wenn man sich für den jetzt supponirten Fall die Gleichungen bilden will, aus denen die unbekannten Grössen x, y, z, v,.... bestimmt werden müssen. Dadurch ergeben sich aus dem Obigen unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\int ab + x\int bb + y\int bc + z\int bd + v\int be + \ldots = 0,$$
$$\int ac + x\int bc + y\int cc + z\int cd + v\int ce + \ldots = 0,$$
$$\int ad + x\int bd + y\int cd + z\int dd + v\int de + \ldots = 0,$$
$$\int ae + x\int be + y\int ce + z\int de + v\int ee + \ldots = 0,$$
u. s. w.

Um ein Beispiel zu geben, so ist als ein demonstrirtes Naturgesetz bekannt, dass die Länge des Secundenpendels, welche wir durch L bezeichnen wollen, durch die entsprechende geographische Breite φ durch die Formel

$$L = x + y \sin\varphi^2,$$

wo x und y zwei Constanten sind, ausgedrückt wird. Bringen wir nun diese Gleichung auf die Form

$$L - x - y \sin\varphi^2 = 0,$$

und wenden aus dem Vorhergehenden die ersten Formeln an, so ist

$$A = L,\quad B = 1,\quad C = \sin\varphi^2;$$
$$x = x,\quad y = y$$

zu setzen. Hat man nun durch geeignete Messungen für A, B, C die folgenden zusammenstimmenden oder einander entsprechenden Werthe gefunden:

A	B	C	(φ)
0.7412517	1,0000000	0,3903417	(38°.39′.46″)
0,7416243	1,0000000	0,4932370	(44 .36 .45)
0,7416151	1,0000000	0,4972122	(44 .50 .25)
0,7417157	1,0000000	0,5136117	(46 .48 . 4)
0,7419262	1,0000000	0,5667721	(48 .50 .15)
0,7420865	1,0000000	0,6045628	(51 . 2 . 8)

so ist im Obigen

$$a_1 = 0{,}7412517 \quad b_1 = 1{,}0000000 \quad c_1 = 0{,}3903417$$
$$a_2 = 0{,}7416243 \quad b_2 = 1{,}0000000 \quad c_2 = 0{,}4932370$$
$$a_3 = 0{,}7416151 \quad b_3 = 1{,}0000000 \quad c_3 = 0{,}4972122$$
$$a_4 = 0{,}7417157 \quad b_4 = 1{,}0000000 \quad c_4 = 0{,}5136117$$
$$a_5 = 0{,}7419262 \quad b_5 = 1{,}0000000 \quad c_5 = 0{,}5667721$$
$$a_6 = 0{,}7420865 \quad b_6 = 1{,}0000000 \quad c_6 = 0{,}6045628$$

zu setzen, und bildet man sich nun nach dem Obigen die zur Bestimmung der Constanten x, y erforderlichen Gleichungen, so erhält man:

$$4{,}4502195 - 6x - 3{,}0657375 \, . \, y = 0,$$
$$2{,}2739729 - 3{,}0657375 \, . \, x - 1{,}5933931 \, . \, y = 0;$$

die man nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra auflösen muss.

Kehren wir nun noch auf einen Augenblick zu der zweiten der beiden obigen Bestimmungsweisen von x, indem man für x den folgenden Werth von u setzt:

$$u = \frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}}{n},$$

zurück, was man die Bestimmungsweise nach dem Princip des arithmetischen Mittels nennen könnte, so lässt sich diese Bestimmungsart durch ganz ähnliche Betrachtungsweisen wie vorher auch auf die Bestimmung mehrerer unbekannter Grössen ausdehnen, was wir jetzt noch kurz erläutern wollen.

Haben wir nämlich wie früher die Gleichung

$$A - Bx - Cy - Dz - Ev - \ldots = 0$$

und bleibt auch alles Uebrige wie vorher, so können wir uns wieder denken, dass die genauen Werthe von y, z, v,.... bekannt wären und nur x unbekannt wäre; dann müsste, indem man die Functionen

$$(a_1 - c_1 y - d_1 z - e_1 v - \ldots) - b_1 x,$$
$$(a_2 - c_2 y - d_2 z - e_2 v - \ldots) - b_2 x,$$
$$(a_3 - c_3 y - d_3 z - e_3 v - \ldots) - b_3 x,$$
u. s. w.
$$(a_n - c_n y - d_n z - e_n v - \ldots) - b_n x$$

in Betrachtung zieht, für x das arithmetische Mittel zwischen den n Grössen

$$\frac{a_1-c_1y-d_1z-e_1v-....}{b_1},$$
$$\frac{a_2-c_2y-d_2z-e_2v-....}{b_2},$$
$$\frac{a_3-c_3y-d_3z-e_3v-....}{b_3},$$
u. s. w.
$$\frac{a_n-c_ny-d_nz-e_nv-....}{b_n}$$

gesetzt werden.

Wären ferner die genauen Werthe von $x, z, v, ...$ bekannt und nur y wäre unbekannt, so müsste, indem man die Functionen

$$(a_1-b_1x-d_1z-e_1v-....)-c_1y,$$
$$(a_2-b_2x-d_2z-e_2v-....)-c_2y,$$
$$(a_3-b_3x-d_3z-e_3v-....)-c_3y,$$
u. s. w.
$$(a_n-b_nx-d_nz-e_nv-....)-c_ny$$

in Betrachtung zieht, für y das arithmetische Mittel zwischen den n Grössen

$$\frac{a_1-b_1x-d_1z-e_1v-....}{c_1},$$
$$\frac{a_2-b_2x-d_2z-e_2v-....}{c_2},$$
$$\frac{a_3-b_3x-d_3z-e_3v-....}{c_3},$$
u. s. w.
$$\frac{a_n-b_nx-d_nz-e_nv-....}{b_n}$$

gesetzt werden.

Wären ferner die genauen Werthe von $x, y, v, ...$ bekannt und nur z wäre unbekannt, so müsste, indem man die Functionen

$$(a_1-b_1x-c_1y-e_1v-....)-d_1z,$$
$$(a_2-b_2x-c_2y-e_2v-....)-d_2z,$$
$$(a_3-b_3x-c_3y-e_3v-....)-d_3z,$$
u. s. w.
$$(a_n-b_nx-c_ny-e_nv-....)-d_nz$$

Betrachtung zieht, für z das arithmetische Mittel zwischen den Grössen

$$\frac{a_1-b_1x-c_1y-e_1v-\ldots}{d_1},$$

$$\frac{a_2-b_2x-c_2y-e_2v-\ldots}{d_2},$$

$$\frac{a_3-b_3x-c_3y-e_3v-\ldots}{d_3},$$

u. s. w.

$$\frac{a_n-b_nx-c_ny-e_nv-\ldots}{d_n}$$

esetzt werden.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich für alle übrigen unbekannten Grössen anstellen, und in ganz gleicher Weise wie früher gelangt man zu dem Resultate, dass man die Grössen

$$x,\ y,\ z,\ v,\ldots$$

überhaupt aus den folgenden Gleichungen des ersten Grades, deren Anzahl der Zahl der unbekannten Grössen x, y, z, v,.... gleich ist, bestimmen muss:

$$nx=\frac{a_1-c_1y-d_1z-e_1v-\ldots}{b_1}$$
$$+\frac{a_2-c_2y-d_2z-e_2v-\ldots}{b_2}$$
$$+\frac{a_3-c_3y-d_3z-e_3v-\ldots}{b_3}$$
u. s. w.
$$+\frac{a_n-c_ny-d_nz-e_nv-\ldots}{b_n},$$

$$ny=\frac{a_1-b_1x-d_1z-e_1v-\ldots}{c_1}$$
$$+\frac{a_2-b_2x-d_2z-e_2v-\ldots}{c_2}$$
$$+\frac{a_3-b_3x-d_3z-e_3v-\ldots}{c_3}$$
u. s. w.
$$+\frac{a_n-b_nx-d_nz-e_nv-\ldots}{c_n},$$

$$nz = \frac{a_1-b_1x-c_1y-e_1v-....}{d_1}$$
$$+\frac{a_2-b_2x-c_2y-e_2v-....}{d_2}$$
$$+\frac{a_3-b_3x-c_3y-e_3v-....}{d_3}$$
u. s. w.
$$+\frac{a_n-b_nx-c_ny-e_nv-....}{d_n},$$
u. s. w.

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen überhaupt die Summe

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+....+\frac{p_n}{q_n}$$

durch

$$\int\frac{p}{q} \text{ oder } \int pq^{-1},$$

so wird man die vorhergehenden Gleichungen leicht auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\int ab^{-1}-x\int bb^{-1}-y\int b^{-1}c-z\int b^{-1}d-v\int b^{-1}e-....=0,$$
$$\int ac^{-1}-x\int bc^{-1}-y\int cc^{-1}-z\int c^{-1}d-v\int c^{-1}e-....=0,$$
$$\int ad^{-1}-x\int bd^{-1}-y\int cd^{-1}-z\int dd^{-1}-v\int d^{-1}e-....=0,$$
$$\int ae^{-1}-x\int be^{-1}-y\int ce^{-1}-z\int de^{-1}-v\int ee^{-1}-....=0$$
u. s. w.

oder

$$\int\frac{a}{b}-x\int\frac{b}{b}-y\int\frac{c}{b}-z\int\frac{d}{b}-v\int\frac{e}{b}-....=0,$$
$$\int\frac{a}{c}-x\int\frac{b}{c}-y\int\frac{c}{c}-z\int\frac{d}{c}-v\int\frac{e}{c}-....=0,$$
$$\int\frac{a}{d}-x\int\frac{b}{d}-y\int\frac{c}{d}-z\int\frac{d}{d}-v\int\frac{e}{d}-....=0,$$
$$\int\frac{a}{e}-x\int\frac{b}{e}-y\int\frac{c}{e}-z\int\frac{d}{e}-v\int\frac{e}{e}-....=0,$$
u. s. w.

wo natürlich

$$\int\frac{b}{b}=n,\ \int\frac{c}{c}=n,\ \int\frac{d}{d}=n,\ \int\frac{e}{e}=n,....$$

ist.

Für den Fall

$$X = \mathfrak{A} - Bx - Cy - Dz - Ev - \ldots,$$

indem man wie früher

$$A_1 - \alpha_1 = a_1, \quad A_2 - \alpha_2 = a_2, \quad A_3 - \alpha_3 = a_3, \quad A_4 - \alpha_4 = a_4, \ldots$$

setzt, übrigens alle obigen Bezeichnungen beibehält, erhält man ganz eben so:

$$\int ab^{-1} + x\int bb^{-1} + y\int b^{-1}c + z\int b^{-1}d + v\int b^{-1}e + \ldots = 0,$$

$$\int ac^{-1} + x\int bc^{-1} + y\int cc^{-1} + z\int c^{-1}d + v\int c^{-1}e + \ldots = 0,$$

$$\int ad^{-1} + x\int bd^{-1} + y\int cd^{-1} + z\int dd^{-1} + v\int d^{-1}e + \ldots = 0,$$

$$\int ae^{-1} + x\int be^{-1} + y\int ce^{-1} + z\int de^{-1} + v\int ee^{-1} + \ldots = 0$$

u. s. w.

oder

$$\int\frac{a}{b} + x\int\frac{b}{b} + y\int\frac{c}{b} + z\int\frac{d}{b} + v\int\frac{e}{b} + \ldots = 0,$$

$$\int\frac{a}{c} + x\int\frac{b}{c} + y\int\frac{c}{c} + z\int\frac{d}{c} + v\int\frac{e}{c} + \ldots = 0,$$

$$\int\frac{a}{d} + x\int\frac{b}{d} + y\int\frac{c}{d} + z\int\frac{d}{d} + v\int\frac{e}{d} + \ldots = 0,$$

$$\int\frac{a}{e} + x\int\frac{b}{e} + y\int\frac{c}{e} + z\int\frac{d}{e} + v\int\frac{e}{e} + \ldots = 0,$$

u. s. w.

Man wird leicht eine Analogie zwischen diesen und den früheren Gleichungen bemerken, indem offenbar, bei sonst ganz ähnlicher Bildung beider Systeme von Gleichungen, nur an die Stelle einer Multiplication in jenen ersteren Gleichungen in diesen letzteren eine Division getreten ist. Welches der beiden Systeme, die nach dem Bisherigen im Wesentlichen mit gleicher Berechtigung auftreten, wenn auch (m. s. die obigen Fehlerbestimmungen S. 470.) fast ein gewisser Vortheil auf der Seite des zweiten zu sein scheint, für den praktischen Gebrauch den Vorzug verdient, lässt sich auf dem im Obigen eingeschlagenen Wege nicht mit Sicherheit und Strenge entscheiden; dazu sind tiefer gehende analytische Untersuchungen erforderlich, die bei dem gegenwärtigen Stande der Sache zu dem ersten Systeme und bereits zu dessen vielfachster Anwendung in den Naturwissenschaften geführt haben. Freilich aber scheint diese Anwendung nach verschiedenen ganz neuerlichst erst angestellten Untersuchungen, wie wir in der Einleitung zu dieser Ab-

handlung näher besprochen haben, auch wieder gewisser E schränkungen zu bedürfen, worüber aber das Weitere erst nc abgewartet werden muss, weshalb wir uns hier mit diesen all meinen Andeutungen für jetzt begnügen.

Bei späteren Untersuchungen über diesen Gegenstand, uns vielleicht künftig beschäftigen werden, wollen wir zu unse Bequemlichkeit uns erlauben:

das dem ersten der beiden obigen Systeme von Bed gungsgleichungen zu Grunde liegende Princip das Prin des Minimums der Summe der Quadrate der üb bleibenden Fehler;

das dem zweiten der beiden obigen Systeme von Be gungsgleichungen zu Grunde liegende Princip das Prin des arithmetischen Mittels

zu nennen, natürlich und durchaus nur in Bezug auf unsere ob Darstellung dieses Gegenstandes, weil bei einer anderen Auff sung desselben, wenn man namentlich aus den Principien Wahrscheinlichkeitsrechnung in hergebrachter Weise die so nannte Methode der kleinsten Quadrate ableitet, die beiden c gen Benennungen, in ihrer Unterscheidung von einand wohl kaum gerechtfertigt erscheinen dürften, was aber jetzt ni hierher gehört, da ich hier jetzt durchaus nur die obige Darst lung im Auge habe.

Möge das Bisherige zu weiteren Untersuchungen über dies wichtigen Gegenstand anregen!

XXXIII.

Miscellen.

Das Klima von Athen beschreibt Herr **Bouris**, Director der Sternwarte und Professor an der Universität zu **Athen**, in den „**Astronomischen Nachrichten Nr. 874**“ auf folgende interessante Weise:

„Während meines siebzehnjährigen Aufenthaltes hier ist das Thermometer etwa ein Dutzendmal bis in die Nähe des Gefrierpunktes herabgesunken, zu diesem selbst höchstens jedes vierte Jahr und dies immer nur für einige Stunden. Schnee giebt es zwar fast jährlich auf den Gebirgen gegen Nord und Ost, aber in der Thalebene von Athen nur höchst selten. Was man da als herabfallenden Schnee zu sehen bekommt, ist weiter nichts als wässerige Flockenmasse, wie etwa der sogenannte Aprilschnee in Deutschland, nur sind die Flocken von viel kleinerer Dimension. Um ihn dann wirklich zu sehen zu bekommen, muss man dazu noch früh aufstehen, weil er bei Sonnenaufgang meistens sogleich wieder in sein ursprüngliches Nichts auseinanderfliesst. Vom eigentlichen Eise ist hierorts gar keine Rede; dafür aber giebt es Regen, Blitz und Donner nur im sogenannten Winter und Frühjahre. Die Hitze im Sommer ist wirklich unerträglich wegen ihrer Continuirlichkeit und der damit verbundenen Schwüle Tags und Nachts. Die mittlere Sonnenwärme wird etwa zu 22° R. und das Maximum zu 30° R. im Schatten sich herausstellen (die mittlere Jahrestemperatur beiläufig zu 14° R.). Das zu diesem Zwecke eigens für die Sternwarte besorgte Maximum-Thermometer, mit geschwärzter Kugel, zeigt in den Sommer-Sonnenstrahlen häufig 50 R. Der einzige frische Augenblick während der heissen Jahreszeit ist kurz vor Sonnenaufgang beim Stattfinden des Minimums der Tagestemperatur. Im Hochsommer während der cynischen Hitze, *κυνικὰ καύματα* genannt, ist auch schon die kleinste, leichteste Wolke eine höchst seltene — eine kometenartige Erscheinung; man lernt zu dieser Zeit ganz vergessen, wie Wolken

eigentlich aussehen. Damit ist gewöhnlich auch ein glühend heisser Nordwind verbunden. Diese auffallende Erscheinung erkläre ich mir daraus, dass dieser Wind über die kahlen, sonnenverbrannten Gebirge Albaniens hinfährt, woher wir ihn dann hier aus erster Hand bekommen. Während dieser Schreckenszeit, die beiläufig 40 Tage dauert, scheint die Menschheit und die ganze Natur wie ausgestorben; selbst alle Vögel und die wenigen Frösche verstummen; sogar die diversen Legionen der sonst so lästigen Insecten verschwinden dann — nur das monotone melancholische Gezirpe der Anakreontischen Cicade (nicht Grille oder gar Heuschrecke nach den Philologen und Lexikographen) erschallt weithin und zwar um so heller und anhaltender, je mehr die kochende Natur ihrem Siedepunkte sich nähert. Diese Lieblinge der alten Hellenen sind dann für diese Zeit die besten Thermo— oder vielmehr Pyrometer. Vorstehende Jeremiade gilt übrigens bloss für die neu aufgegrabene Stätte von Alt-Athen. Die sonstige Hellas erfreut sich grösstentheils eines wirklich paradiesischen Klimas und man wird auch nirgends so, wie hier zu Athen, in Versuchung geführt, an der factischen Existenz von vier Jahreszeiten in der gemässigten Zone zu zweifeln."

Druckfehler.

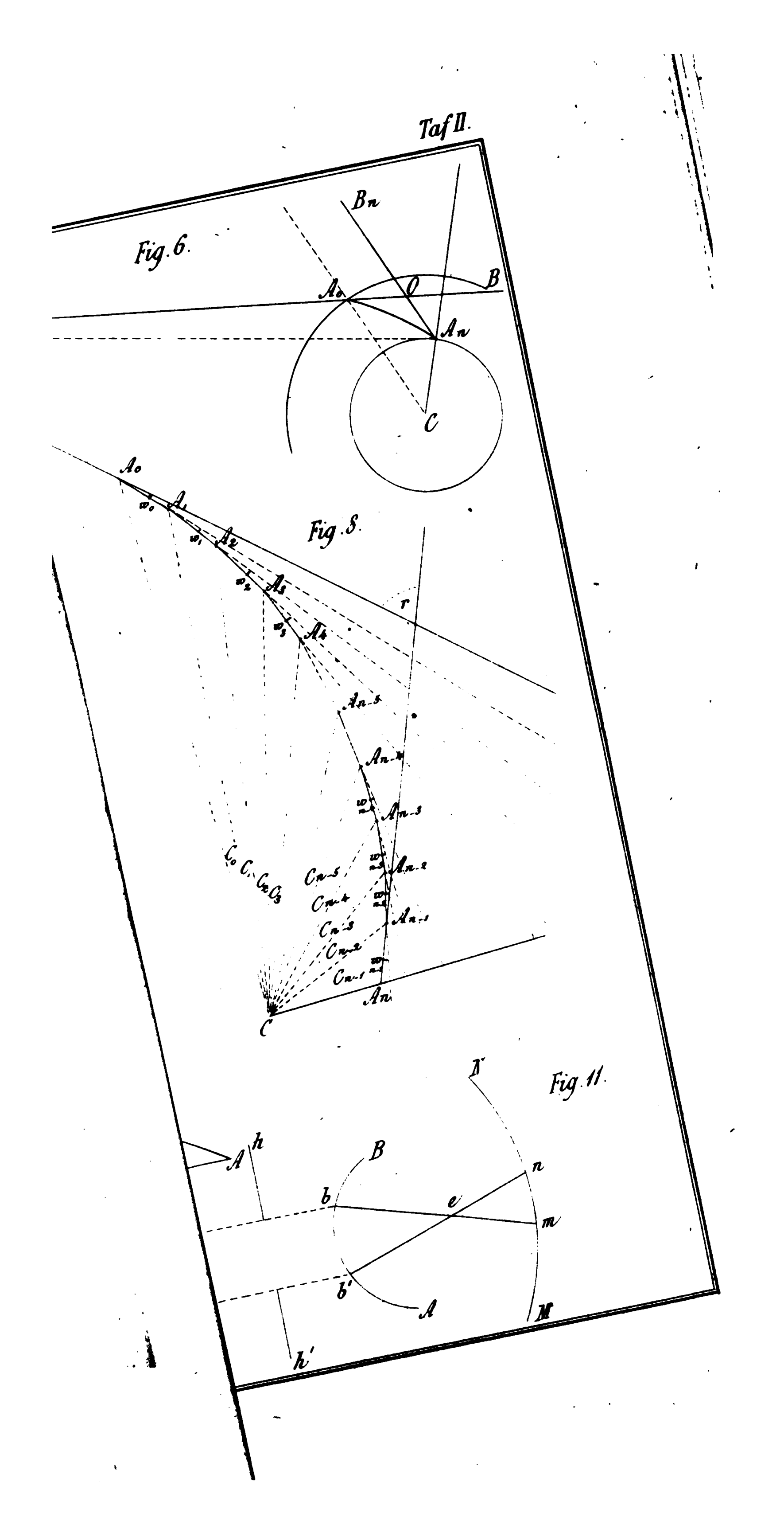
Thl. I. S. 281. Z. 2. statt „Werth" setze man „absolute Werth."
„ XX. S. 11. Z. 9. lese man „Ganzzahl."
„ „ „ 14. „ 6. lese man „scheiden."
„ „ „ 15. „ 19. für $\frac{du}{du}$ lese man $\frac{du}{dx}$.
„ „ „ 23. „ 3. fehlt (17).
„ „ „ 25. „ 3. nach Werthe fehlt „begrenzter Integrale."
„ „ „ 30. „ 16. und 18. statt du setze man $\frac{du}{u}$.
„ „ „ 30. „ 18. statt $+1-(+1)$ setze man $l(+1)-l(+1)$.

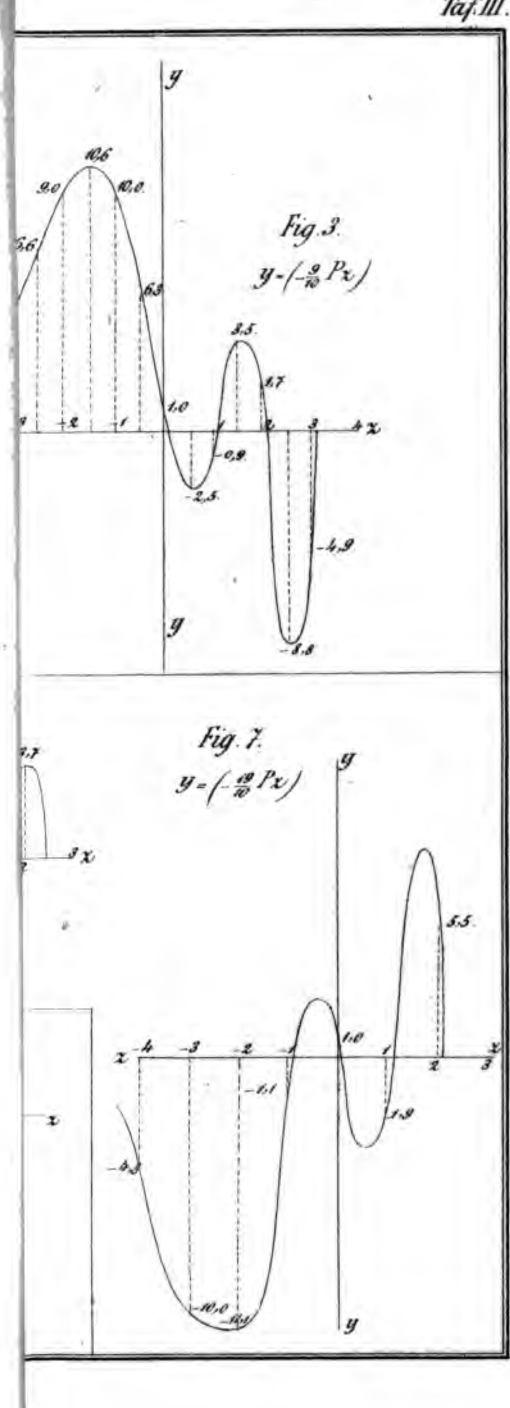
Im Literarischen Berichte Nr. LXXXI. S. 5. Z. 23. unter b) muss es statt „Messieurs des Directeurs" heissen: „Messieurs les Directeurs."

Thl. XXI. Heft III. S. 305. in der vorletzten Zeile lies $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ statt $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Taf. I.

Fig. 4.


Taf II.
Fig. 6.
Bn
B
O
An
C
Fig. 8.
A0
A1
A2
A3
A4
r
An-5
An-4
An-3
An-2
An-1
An
C0
C1
C2
C3
Cn-5
Cn-4
Cn-3
Cn-2
Cn-1
C
Fig. 11.
N
A
h
B
b
e
n
m
b'
A
M
h'



Taf. III.
Fig. 3.
y = (− 9/10 Px)
10,6
9,0
10,0
5,6
6,3
3,5.
1,7
1,0
−0,9
−2,5.
−4,9
−8,8
y
z
Fig. 7.
y = (− 19/10 Px)
5,5.
1,0
−1,1
1,9
−4,3
−10,0
y
z

Theil

Taf. IV.

Fig. 11.

$y = (-\frac{29}{10} P x.)$

y

2,5 5,2 5,8 1

x −6 −5 −4 −3 −2 −1 −0,52 +1 −1,58

y

Fig. 15.

B₁ E₁ D A₁ C

B A

Grund

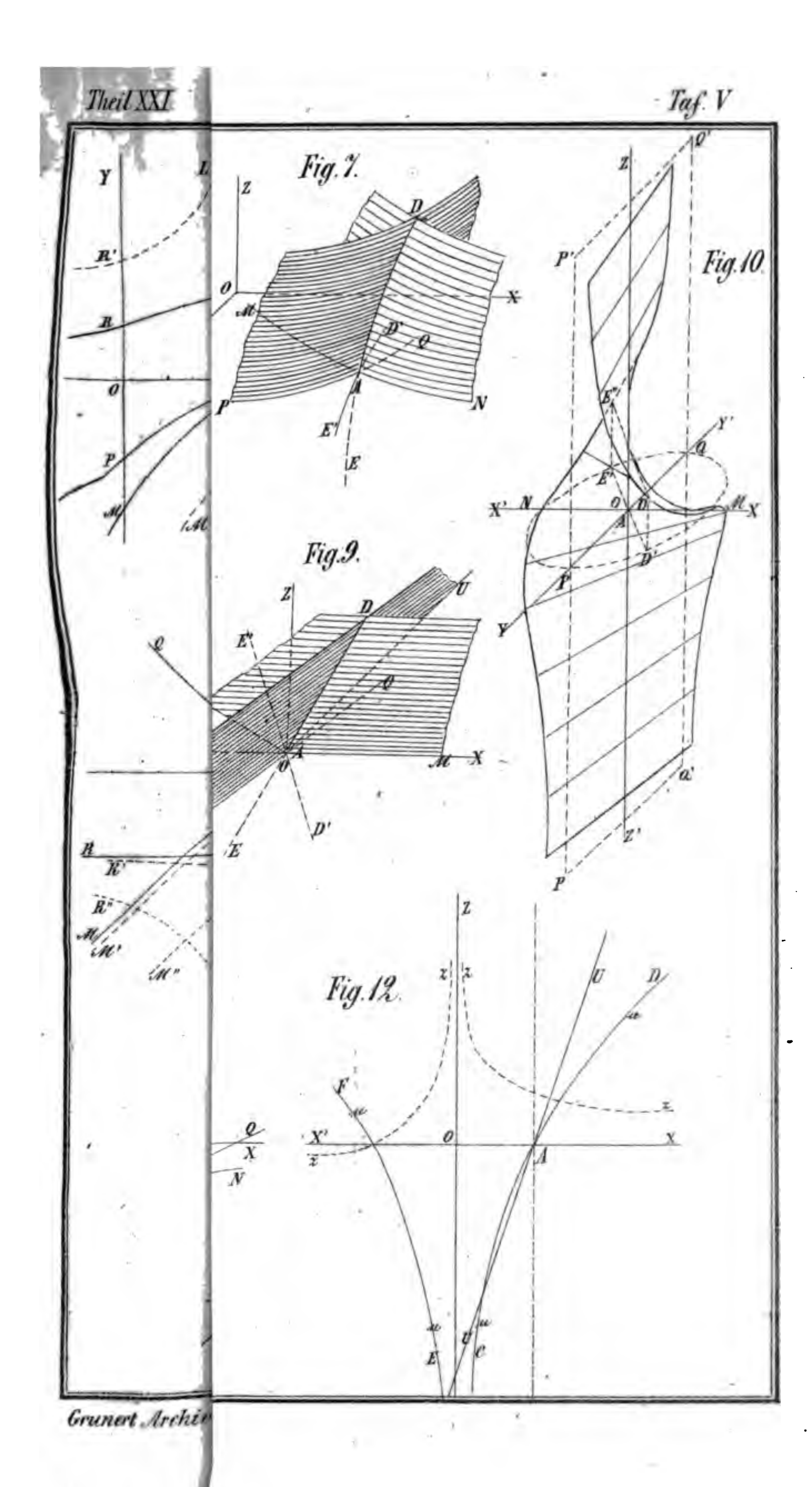

Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 12.

Fig. 19.
in 4 facher Grösse der Fig. 18.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 25.

Fig. 24.

Literarischer Bericht

LXXXI.

Geschichte der Mathematik.

Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Herausgegeben von Adolph Erman. In zwei Bänden. Leipzig, Avenarius und Mendelssohn. 1852. 8. 5 Thlr.

Wir haben es uns angelegen sein lassen, aus diesem interessanten Briefwechsel in den früheren Heften des Archivs unsern Lesern schon Einiges mitzutheilen, und können uns daher um so mehr hier auf eine bloss kurze Anzeige beschränken. Der Briefwechsel beginnt mit einem Briefe von Olbers, datirt Rehburg bei Bremen den 12. August 1804, und schliesst mit einem Briefe von Bessel, datirt Königsberg den 28. Juni 1839, umfasst also den langen Zeitraum von 35 Jahren. Im Ganzen sind 364 Briefe mitgetheilt. Von Bessel selbst aufgesetzte: „Kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens" sind dem Briefwechsel vorangestellt, die aber leider nur bis zum Jahre 1806 reichen; ferner Bessels früher in den Astronomischen Nachrichten Bd. XXII. erschienener Aufsatz: Ueber Olbers. Wenn auch dieser Briefwechsel natürlich vorzugsweise den Astronomen von Fach interessiren muss, so können wir doch den Lesern die Versicherung geben, dass auch der Mathematiker viele interessante und lehrreiche Notizen in demselben finden wird, und wünschen ihm daher eine möglichst weite Verbreitung und ausgedehnte Beachtung recht sehr. Jedenfalls hat sich Herr Professor A. Erman in Berlin durch die Herausgabe dieses Briefwechsels, zu welcher er schon als Bessel's Schwiegersohn vorzugsweise

berufen und besonders befähigt war, um die Geschichte der Astronomie und Mathematik überhaupt ein mit besonderem Danke anzuerkennendes Verdienst erworben.

Arithmetik.

Materialien zum Gebrauche bei und nach dem Unterrichte aus der höheren Analysis. Mit besonderer Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse von technischen Lehranstalten, als Hilfsbuch für Lehrer und Lernende bearbeitet von Johann Rogner, o. ö. Professor an der k. k. Oberrealschule u. s. w. zu Gratz. Grätz. 1853. Hesse. 8. 2 Thlr. 20 Ngr.

Dieses Buch enthält 3800 Uebungsaufgaben aus der sogenannten Analysis des Endlichen, aus der Differentialrechnung und Integralrechnung, und erstreckt sich ziemlich gleichförmig über alle Theile dieser Wissenschaften, wobei zweckmässig die Resultate (S. 277—S. 463.) von den Aufgaben (S. 1—S. 276.) getrennt worden sind. Der Gestaltung der neueren Analysis hat der Herr Verfasser insofern zweckmässig Rechnung getragen, dass er bei der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe (S. 186) die sogenannten Reste dieser Reihen nicht, wie dies in den meisten übrigen neueren derartigen Sammlungen in unverantwortlicher Weise geschehen ist, unberücksichtigt gelassen, ferner auch auf S. 11 eine ziemlich grosse Anzahl von Aufgaben über die Beurtheilung der Convergenz und Divergenz der Reihen aufgenommen hat. Wenn sich auch natürlich über den Werth und die Brauchbarkeit eines solchen Buchs erst nach längerer Anwendung bei'm Unterrichte vollständig urtheilen lässt, so scheint der Herr Verfasser doch bei den Aufgaben meistens eine gute Wahl getroffen zu haben, und manches Eigenthümliche oder weniger Bekannte scheint sich darunter zu finden. Wir glauben daher, diese Sammlung sowohl Lehrern zur Benutzung bei'm Unterrichte, als auch Schülern Behufs eigener Uebungen in der Analysis, mehr als manche andere Schriften dieser Art empfehlen zu können, ohne uns übrigens auf eine speciellere Beurtheilung einzulassen, und wünschen, dass das Buch nicht unbeachtet gelassen werden möge.

Geometrie.

Grundlinien der neueren ebenen Geometrie mit einer Sammlung von mehr als 1000 erläuterten Aufgaben, einem Anhang über die Anwendung der neueren Geometrie auf Optik und zehn Figurentafeln. Von Christoph Paulus, Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt auf dem Salon bei Ludwigsburg. Stuttgart. W. Paulus. 1853. 8.

Bei der Abfassung dieser Grundlinien der neueren ebenen Geometrie liess sich der Herr Verfasser durch die folgenden Rücksichten leiten. 1) Vor Allem schien ihm die Trennung der Geometrie der Ebene von der des Raumes wünschenswerth zu sein, weshalb denn auch hier für jetzt nur die erstere gegeben wird. 2) Bei der Frage, welches von den Hülfsmitteln der neueren Geometrie zum leitenden und durchgreifenden zu erheben sei, entschied er sich für die Collineation, ohne die übrigen Hülfsmittel, z. B. Reciprocität, Polarität, u. s. w. zu übergehen. 3) Hinsichtlich des grossen vorliegenden Materials wurde eine strenge Sichtung vorgenommen, um einerseits nichts Wesentliches zu übergehen, andererseits aber auch die Geduld des Lesers durch allzu reiches Material nicht auf die Probe zu stellen. 4) Um auch die praktische Seite der neueren Geometrie hervorzuheben, wurde eine reiche Aufgabensammlung beigegeben, in welcher die Kreisberührungen und die Construction der Kegelschnitte mit Recht eine besondere Berücksichtigung fanden, weil eben hierin die neuere Geometrie die glänzendsten Leistungen aufzuweisen hat; ferner wurde in einem Anhange die Anwendung der neueren Geometrie auf die Optik gezeigt. 5) Sein besonderes Augenmerk richtete der Herr Verfasser auch auf die Einführung einer zweckmässigen Terminologie.

Das vorliegende Werk macht durchaus den Eindruck einer ganz selbstständigen Arbeit, welche, die Arbeiten der Vorgänger, namentlich die Werke von Steiner und Staudt, zwar benutzend, doch hauptsächlich die bessere Darstellung und weitere Entwickelung seines Gegenstandes sich zur Aufgabe macht. Dass bei einem solchen höchst anerkennungswerthen Streben es nicht ausbleiben konnte, dass dem Herrn Verfasser sich öfters neue Wege aufthaten, die auch zu neuen Resultaten führten, versteht sich bei dem offenbaren Geschick, mit welchem derselbe seinen Gegenstand behandelt hat, so sehr von selbst, dass wir es fast für unnöthig halten, auf solche Dinge noch besonders hinzuweisen. Indess wollen wir doch nicht unterlassen, hierzu als Beispiele zu erwähnen: die Begriffe der imaginären Punkte und Richtungen,

denen das achte Buch gewidmet worden ist; ferner die Einführung des Begriffs der Conformität, wobei der Herr Verfasser die Bedeutung der Begriffe der imaginären Punkte und Richtungen hauptsächlich erkannte, als es ihm gelang, die Conformität der Kegelschnitte auch auf die imaginären Punkte und Richtungen auszudehnen und dadurch den Boden zu gewinnen, welcher der Erforschung der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier in einer Ebene liegenden Kegelschnitte und der Osculation der Kegelschnitte zur Basis dienen konnte; weiter gehören hierher die Einführung des Begriffs der gemeinschaftlichen Vielstrahlen zweier Kegelschnitte, die Einführung des Modulus des Theilpunktes, der harmonischen und anharmonischen Theilung, der Collineation, und manches Andere, was wir hier der Beschränktheit des Raumes wegen nicht alles namhaft machen können.

Wir halten dieses Werk jedenfalls für sehr beachtenswerth neben den bekannten deutschen Werken von Steiner und Staudt, auf die der Herr Verfasser sich selbst in der Vorrede öfters beruft, ohne des berühmten neuesten Werkes von Chasles zu gedenken, und haben bei dieser Anzeige für jetzt hauptsächlich und zunächst den Zweck, unsere Leser auf dasselbe aufmerksam zu machen und es ihnen zu sorgfältiger Berücksichtigung recht sehr zu empfehlen, indem wir zugleich noch bemerken, dass das nächste Heft des Archivs eine Abhandlung des geehrten Herrn Verfassers enthalten wird, welche diesen Zweck noch mehr zu erfüllen geeignet sein dürfte, als die vorliegende kurze Anzeige.

Trigonometrie.

Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie und deren Anwendung auf die Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen. Von P. Philipp Kramer, O. S. B., Professor der Mathematik u. s. w. am Gymnasium zu St. Stephan in Augsburg. Augsburg. Rieger. 1852. 8.

Ein deutliches, ganz elementar gehaltenes Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, mit numerischen Uebungsbeispielen, einer Formeltafel und mehrfachen zweckmässigen Anwendungen auf Geodäsie, Physik und mathematische Geographie.

Geodäsie.

Bericht über die in den Jahren 1847—1851 ausgeführte Verbindung der Oesterreichischen und Russischen Landesvermessung. Von Karl von Littrow. Mit 3 Tafeln. (Aus dem V. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt.) Wien. 1853. 4.

Am 24. August 1847 wurde zu Tarnogrod zwischen Sr. Excellenz Herrn General-Lieutenant v. Tenner, Chef der Triangulation des Königreichs Polen, und Herrn Oberst Marieni, Triangulirungs-Director in dem unter der obersten Leitung Sr. Excellenz des Herrn Feldmarschall-Lieutenants von Skribaneck stehenden k. k. geographischen Militair-Institute zu Wien, für die geodätische Verbindung von Oesterreich mit Russland eine Convention abgeschlossen. In dieser Convention lautet Article 7. a. und b. folgendermassen:

a) Le lieutenant-général Tenner et le colonel Marieni ne se communiqueront pas mutuellement les résultats géodésiques et astronomiques pour les jonctions, indiqués dans l'article 4. de cette convention; chacun d'eux enverra les siens cachetés aux Directeurs des observatoires de Poulkova et de Vienne.

b) Chacun des Messieurs des Directeurs décachètera sumultanément les résultats réciproques des jonctions, pour les comparer entre eux, et puis chacun communiquera de son coté au lieutenant-général Tenner et au colonel Marieni cette comparaison ainsi que son opinion sur l'accord de ces résultats.

Der in Folge dieser Convention von dem Director der Sternwarte zu Wien, Herrn K. v. Littrow, erstattete Bericht über die Verbindung der österreichischen und russischen Triangulation liegt uns hier vor, und ist in jeder Beziehung geeignet, das Interesse der Leser in hohem Grade in Anspruch zu nehmen, nicht bloss wegen der grossen Gründlichkeit und Sachkenntniss, mit welcher derselbe verfasst ist, wodurch derselbe für Jeden, wer ein Urtheil über ähnliche geodätische Operationen gewinnen will, überaus lehrreich wird, sondern auch wegen der trefflichen Operationen selbst, denen er gewidmet ist. Herr v. Littrow vergleicht zuerst die Bestimmungen einer grössern Anzahl gemeinschaftlicher Winkel, Seiten, Höhen, Azimuthe, Polhöhen und Längen bei Tarnogrod und Krakau mit einander und findet überall die schönste Uebereinstimmung; eine der längsten Seiten z. B. ist die Seite Krakus-Oycow, welche sich aus der einen

Veranlassung der Königlichen Sternwarte zu Bonn angestellt von dem Gehülfen derselben J. F. Julius Schmidt. Bonn, Marcus. 1852. 4. 1 Thlr. 10 Sgr.

Zweck und Veranlassung dieser Schrift giebt ihr Titel vollständig an. Der Inhalt ist folgender: Einleitung. — Beobachtete Zeitmomente während der Finsterniss. — I. Beobachtungen zwischen dem Anfange der Finsterniss und dem Beginne der Totalität. II. Beobachtung der Erscheinungen während der totalen Verfinsterung. A. Die Corona. B. Protuberanzen. C. Erscheinungen in den letzten Secunden der Totalität. D. Beobachtungen der Herren Thormann und Jänsch. — Bemerkungen über die Positionswinkel und Grössen der Protuberanzen. — Folgerungen, welche sich aus den Beobachtungen der Protuberanzen zu ergeben scheinen. Bemerkungen über die Intensität der Corona und der Protuberanzen. Mittheilung fremder Beobachtungen aus Ostpreussen. — Eigene und fremde Beobachtungen in und um Rastenburg während der Finsterniss (ohne Fernrohr). I. Undulirende Bewegungen des Lichtes am Anfang und Ende der Totalität. II. Ansehen und Dunkelheit des Himmels während der Totalität. III. Depression der Temperatur und Finsternisswind. IV. Verhalten der Menschen, Thiere und Pflanzen während der Finsterniss.

Wir gestehen, dass uns keine Schrift zu Gesicht gekommen ist, in welcher namentlich die physikalischen Erscheinungen bei der in Rede stehenden merkwürdigen und grossartigen Erscheinung mit so viel Umsicht, Sachkenntniss und Genauigkeit erörtert worden wären, als in der vorliegenden, durch die sich der Herr Verfasser überall als einen genauen und völlig vorurtheilsfreien Beobachter documentirt. Wir empfehlen daher diese sehr gute Schrift der Aufmerksamkeit aller unserer an der besprochenen merkwürdigen Erscheinung Interesse nehmenden Leser aus vollkommenster Ueberzeugung recht sehr zur sorgfältigsten Beachtung. Auf die Anführung vieler Einzelnheiten können wir uns hier natürlich nicht einlassen, können uns indess nicht versagen, anzuführen, wie auf S. 17. der geehrte Herr Verfasser über die schon vielfach discutirte Natur der Protuberanzen sich ausspricht, womit unsere Meinung über diesen Gegenstand auf das Vollständigste übereinstimmt. Er sagt a. a. O.:

„Wenn aber auch diesmal aus den oben angeführten Gründen die in Rastenburg und Danzig gemessenen, auf den wahren Nordpunkt der Sonnenscheibe bezogenen Positionswinkel nicht zusammenstimmen können, so zeigen doch beide Messungen das Zusammenfallen der Protuberanz ζ mit der westlichen Fleckengruppe *B*. Wäre die Protuberanz ein optisches, erst am Mond-

rande erzeugtes Phänomen, so lässt sich solche Coincidenz bei Messungen an so von einander entfernten Orten schwer begreifen, zwischen denen der Unterschied in den Parallaxen des Mondes schon von grossem Einflusse sein müsste und selbst die Wirkung der das Mondprofil verändernden parallaktischen Libration nicht zu übersehen ist, *wenn man die Protuberanzen durch ein Inflexionsphänomen an den Randgebirgen des Mondes erklären will.*"

Wir werden uns freuen, wenn das Vorstehende geeignet ist, die Aufmerksamkeit der Leser auf diese mehrfach interessante Schrift hinzulenken.

Literarische Nachricht aus Russland.

Herr M. Kobalsky, Adjunct der Kaiserlichen Universität zu Kasan und Observator an der dortigen Sternwarte, hat in einem im vorigen Jahre in russischer Sprache erschienenen Werke („Theorie der Bewegungen des Neptun. Von M. Kobalsky, Adjuncten der Kaiserlichen Universität zu Kasan") eine höchst sorgfältig ausgeführte Berechnung der Neptunsstörungen auf 100 Quartseiten geliefert und einen Anhang über das Kepler'sche Problem auf 27 Seiten beigefügt. Wir empfehlen dieses treffliche Werk allen Denen, welche sich für diesen Gegenstand interessiren, angelegentlichst, und machen hier um so lieber auf dasselbe aufmerksam, weil die russische Literatur sich bei uns noch nicht ganz der verdienten Verbreitung erfreut. Der Herr Verfasser, welcher früher bei der vor einigen Jahren unter Leitung des Obersten Professor Hoffmann ausgeführten Expedition nach dem nördlichen Ural für astronomische und magnetische Beobachtungen angestellt war, hat sich durch die Ausführung der obigen Rechnungen jedenfalls ein wesentliches Verdienst um die Astronomie erworben.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Realanstalten und Gymnasien, so wie zum Selbstunterricht von Dr. C. B. Greiss, Lehrer der Physik am Realgymnasium in Wiesbaden. Mit 179 in den Text eingedruckten Holzschnitten und Lithographien. Wiesbaden. Kreidel. 1853. 8.

Dieses Lehrbuch der Physik unterscheidet sich von ähnlichen Werken wesentlich durch die Anordnung des Stoffs, indem die mechanischen Kapitel vom Anfange ganz an das Ende verwiesen worden sind, was der Herr Verfasser damit rechtfertigt, dass die mathematische Behandlung dieser Lehren es wünschenswerth mache, sie nur in den obersten Klassen vorzutragen, und dass man in den übrigen Abschnitten fast ausschliesslich nur die Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte benutze, diese aber den Schülern für's Erste mit Leichtigkeit experimentell vorgeführt werden können. Wir glauben, dass diese Anordnung in methodischer Rücksicht wohl zu billigen ist. Sonst unterscheidet sich dieses Lehrbuch von anderen Werken nicht wesentlich, nimmt für seinen Zweck hinreichend auf die praktische Anwendung Rücksicht, verschmäht nirgends die Anwendung elementar-mathematischer Hülfsmittel, z. B. auch in der Optik, und ist in einer deutlichen Sprache verfasst, so dass wir dasselbe den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten wohl zur Beachtung empfehlen können.

Die Lehre von der Reibungselectricität. Von Peter Theophil Riess, Professor zu Berlin. Zwei Bände. Berlin. Hirschwald. 1853. 8. 8 Thlr.

Jedenfalls das wichtigste und vollständigste Werk über die Reibungselectricität, was die gesammte physikalische Literatur jetzt besitzt, eben so vollständig für die jetzige Zeit, wie etwa das bekannte Werk von Cavallo für die seinige war. Dass dasselbe zugleich viele eigene Untersuchungen des Herrn Verfassers enthält, versteht sich bei den allgemein bekannten Verdiensten desselben um diesen Theil der Naturlehre ganz von selbst. Wir freuen uns, das Erscheinen dieses Werkes hier anzeigen zu können, können und müssen uns aber auch damit hier begnügen, weil sein Inhalt zu reichhaltig ist, als dass wir näher auf denselben eingehen könnten. Die Ordnung ist, was hier von besonderer Wichtigkeit ist, übersichtlich, und die Darstellung deutlich und klar.

Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. Von M. W. Drobisch, Professor zu Leipzig. Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. Weidmann. 1852.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit den Fundamentallehren der theoretischen Musik oder Kanonik, wobei es dem Herrn Verfasser nicht um musikalische Neuerungen, sondern um wissenschaftliche Aufklärung des Bestehenden zu thun war. Der Haupt-

inhalt ist folgender: I. Bestimmung der Töne aus ihren einfachsten Schwingungsverhältnissen. II. Bestimmung der Tonintervalle. III. Von der Nothwendigkeit der Temperatur überhaupt, insbesondere der gleichschwebenden. I. Anhang: Ueber die bestmögliche akustische Bestimmung der erhöhten und erniedrigten Töne. II. Ueber die Newtonsche Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen.

Je weniger Genügendes man auch in den grösseren physikalischen Handbüchern über den obigen Gegenstand findet, über den die Verfasser dieser Bücher oft selbst nur unklare Vorstellungen gehabt zu haben scheinen, desto mehr muss man dem Herrn Verfasser für die in dieser Schrift gegebene äusserst klare und strenge Darstellung danken, die zugleich überall mit kritischem Scharfsinne die Leistungen der Vorgänger, wie Euler's, Marpurg's, Türk's, Herbart's u. s. w., beurtheilt, wobei sie deren Vorzüge keinesweges unbeachtet lässt und überall bei selbstständiger Verarbeitung sich aneignet. Wir glauben daher, diese Schrift unsern Lesern recht sehr zur Beachtung empfehlen zu müssen.

Rücksichtlich des Anhangs II.: „Ueber die Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen" müssen wir noch darauf aufmerksam machen, dass der Herr Verfasser in der öffentlichen Sitzung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1852 einen Nachtrag zu der obigen Abhandlung: „Ueber die Wellenlängen und Oscillationszahlen der farbigen Strahlen im Spectrum" vorgetragen hat, worin er einen Irrthum oder vielmehr eine Uebereilung bespricht und vollständig aufklärt, in die er bei Abfassung des in Rede stehenden zweiten Anhangs verfallen war und auf welche ihn zuerst Herr Dr. Baltzer in Dresden aufmerksam gemacht hatte. Ohne uns hier auf eine weitere Besprechung dieses Gegenstandes einlassen zu können, durften wir doch diese von dem Herrn Verfasser nachträglich gegebene Aufklärung im Interesse unserer Leser nicht unerwähnt lassen.

Die Physik der Erdrinde und der Atmosphäre populär dargestellt von Friedrich Zamminer, ausserordentlichem Professor zu Giessen. Mit drei Karten. Aus der „Neuen Encyklopädie für Wissenschaften und Künste" besonders abgedruckt. Stuttgart, Franckh. 1853. 8.

Diese Schrift soll, namentlich in ihrem ersten Theile, ein gedrängtes Bild geben von dem Walten der Kräfte, welche den Erdkörper aus einer glühenden Dunstmasse in einen Schauplatz

reichen organischen Lebens umgestalteten, in Zeiträumen, an deren Erfassung unser Geist nur an der Hand astronomischer und geologischer Studien sich gewöhnt. Der zweite Theil derselben ist ganz der die Erde umgebenden Dunsthülle gewidmet. Ueberhaupt ist der Inhalt nach seinen Hauptmomenten folgender: A. Die Erdrinde. I. Die Erde als Planet. II. Die Wirkungen des Wassers. III. Die innere Erdwärme. IV. Geschichte der Erde. B. Die Atmosphäre. I. Verhältniss der Atmosphäre zum Lichte. II. Das Gesetz der grossen Zahlen. III. Verhältniss der Atmosphäre zur Wärme. IV. Die Strömungen der Meere. V. Die Strömungen im Luftmeere. VI. Der Druck der Dämpfe und der trockenen Luft. VII. Die wässrigen Niederschläge und die Gewitter. VIII. Einfluss des Klimas und der Meteore auf die Vegetation.

Die Schrift ist in einer recht ansprechenden Sprache geschrieben, verbindet ziemliche Vollständigkeit mit angemessener Kürze und berücksichtigt überall sorgfältig die neuesten Forschungen, so weit dies der beschränkte Raum gestattete. Dieselbe scheint daher ihrem Zwecke recht gut zu entsprechen und verdient, einem Jeden, wer sich über ihren interessanten Gegenstand in kurzer Zeit eine ausreichende Uebersicht verschaffen will, empfohlen zu werden, so wie wir selbst dieselbe mit Vergnügen gelesen haben. Auch Lehrer der Naturwissenschaften werden manches für ihre Zwecke Dienliche aus ihr schöpfen können und dürfen sie daher nicht unbeachtet lassen, da sie uns nützlicher zu sein scheint, als viele andere dickleibige und weitschweifige Werke dieses Fachs, die ohne vielen Gehalt sich oft in hochtrabenden Redensarten zu ergehen belieben.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Literar. Bericht Nr. LXXIV. S. 940.)

Jahrgang 1852. VIII. Band. 4. Heft. S. 504. Stampfer: Ueber den scheinbaren Durchmesser der Fixsterne. Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung. — S. 511. Stampfer: Methode, den Durchmesser der Pupille sowohl bei Tage, als bei Nacht am eigenen Auge zu messen. (Auf beide sinnreiche Aufsätze machen wir besonders aufmerksam.)

Jahrgang 1852. VIII. Band. 5 Heft. S. 543. Schöbl: Vielfache Brechung eines Lichtstrahls in Kalkspath-Krystallen.

— S. 567. Petzval: Ueber die Unzukömmlichkeiten gewisser populärer Anschauungsweisen in der Undulations-Theorie und ihre Unfähigkeit, das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer zu ersetzen. — S. 587: Doppler: Bemerkungen zu dem Aufsatze: „Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre. Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer, von Professor Jos. Petzval" (Sitzungsberichte, Februarheft 1852, pag. 134). — S. 593. A. v. Ettingshausen: Bemerkung, denselben Gegenstand betreffend.

Jahrgang 1852. IX. Band. 1. Heft. S. 27. A. v. Ettingshausen: Weitere Bemerkungen zu dem Vortrage des Herrn Professor Petzval vom 15. Jänner 1852. — S. 31. Boué: Ueber die Karten der Gebirge und Thälerrichtungen. — S. 173. Puschl: Ueber das Entstehen progressiver Bewegungen durch Verbrauch lebendiger Kraft oscillatorischer Bewegungen.

Jahrgang 1852. IX. Band. 2. Heft. S. 217. Doppler: Bemerkungen über die von dem Herrn Professor Petzval gegen die Richtigkeit meiner Theorie vorgebrachten Einwendungen. — S. 240. Haidinger: Die Löwe'schen Ringe, eine Beugungs-Erscheinung. — S. 338. Haidinger: Niedrigste Höhen von Gewitterwolken. — S. 401. Schmidl: Ueber die Abfassung einer Chronik der Erdbeben in der österreichischen Monarchie. — S. 414. Schrötter: Ueber das Leuchten gewisser Körper beim Erwärmen.

Literarischer Bericht
LXXXII.

Geschichte der Mathematik.

In der Beilage zu Nr. 864 der „Astronomischen Nachrichten", welche bekanntlich jetzt die Herren Hansen in Gotha und A. C. Petersen in Altona trefflich redigiren, findet man sehr interessante: „Biographische Notizen über den verstorbenen Conferenzrath Schumacher. Vorgelesen in der Königl. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften am 19. December 1851, von Professor Olufsen", für deren Veröffentlichung man Herrn Professor Olufsen zu besonderem Danke verpflichtet ist und auf welche wir unsere Leser besonders aufmerksam machen.

Geometrie.

Neun verschiedene Coordinaten-Systeme, im Zusammenhang untersucht von J. G. H. Swellengrebel, Litt. et Phil. Dr. (zu Utrecht). Mit 6 lithographirten Tafeln. Bonn (Marcus). 1853. 4. 2 Thlr. 20 Sgr.

Jeder, wer mit den neueren Fortschritten der analytischen Geometrie vertraut ist, weiss, dass dieselben einem grossen Theile nach durch die Einführung neuer Coordinaten-Systeme bedingt worden sind, und dass die Untersuchungen der neueren Geometer

hauptsächlich als in diesem Princip wurzelnd betrachtet werden können. Auf diesem Wege weiter fortschreitend, hat nun der Herr Verfasser in diesem Werke neun verschiedene Coordinaten-Systeme, die grösstentheils neu sind oder wenigstens hier aus neuen Gesichtspunkten aufgefasst werden, einer ausführlichen und überaus gründlichen und sorgfältigen Betrachtung unterzogen. Es ist uns leider hier völlig unmöglich, diese verschiedenen Coordinaten-Systeme näher zu charakterisiren oder auch nur oberflächlich anzugeben; indess wollen wir doch einige Worte über das System der xy, mit welchem der Herr Verfasser sein Werk beginnt, sagen, wobei der Leser sich die Figur leicht selbst wird entwerfen können. „Man nehme“, sagt der Herr Verfasser, „zwei Punkte A und B, welche die Coordinaten-Punkte heissen mögen, deren Lage zwar beliebig ausgewählt werden darf, jedoch nach vollführter Wahl als fest und unveränderlich zu betrachten ist. Im Punkte O, welcher die Entfernung AB halbirt, errichte man eine Senkrechte YOY' zur Geraden XOX', welche die Coordinatenpunkte A und B vereinigt, wobei diese Geraden XOX' und YOY', um der üblichen Terminologie zu folgen, die Coordinaten-Axen unseres Coordinaten-Systems heissen sollen. Es ist alsdann die Lage irgend eines Punktes C bestimmt durch dessen Entfernungen CE und CD von den Geraden YOY' und XOX', und daher auch durch die beiden Zahlen, welche andeuten, wie oft die als Längeneinheit angenommene Länge $OA=OB$ in diesen Entfernungen CE und CD enthalten sei. Diese Zahlen sollen die Coordinaten unsers jetzigen Systems sein und respective durch x und y angedeutet werden, so dass man hat:

$$x=\frac{CE}{AO},\quad y=\frac{CD}{AO};$$

welche Coordinaten indess auch als Tangenten gewisser Winkel betrachtet werden können.“ — Diese neuen Coordinaten wären also eigentlich die gewöhnlichen rechtwinkligen oder Parallel-Coordinaten, durch eine gewisse constante Linie dividirt, oder die zwischen dieser Linie und jenen Coordinaten stattfindenden Verhältnisszahlen. — Der Zweck des Herrn Verfassers ist zunächst auf die Untersuchung seiner neuen Coordinatensysteme als solcher im Allgemeinen gerichtet gewesen, weniger auf die Auffindung neuer geometrischer Wahrheiten, wenn er auch die Fruchtbarkeit seiner Systeme überall, wo sich die Gelegenheit darbot, zu zeigen nicht unterlassen hat; auch hat er sich für jetzt auf die Ebene beschränkt und hat nur im letzten Paragraphen in der Kürze gezeigt, dass seine Systeme sich mit Leichtigkeit auch auf den Raum übertragen lassen; vorzüglich aber liess er es sich angele-

gen sein, überall die geometrische Bedeutung der analytischen Formeln recht deutlich hervortreten zu lassen, damit analytische und geometrische Untersuchung fortwährend Hand in Hand gingen, was jedenfalls nur vollkommen gebilligt werden muss. Ueberall zeigt sich der Herr Verfasser in diesem Werke als ein mit den neueren Fortschritten der analytischen Geometrie, welche dieselbe hauptsächlich auch deutschen Mathematikern zu verdanken hat, vollkommen vertrauter Mann, und behandelt seinen Gegenstand innerhalb der sich selbst gesteckten Gränzen überall mit der seiner Nation eigenen Gründlichkeit, Umsicht und Ausführlichkeit, die innerhalb der gezogenen Gränzen fast nirgends etwas zu wünschen übrig lässt. Wir empfehlen daher das vorliegende Werk zu sorgfältigster Beachtung, und wünschen sehr, dass auch andere Mathematiker sich angelegen sein lassen mögen, einige der besonders fruchtbaren Coordinaten-Systeme des Herrn Verfassers weiter anzuwenden, um daraus möglichst viele neue geometrische Wahrheiten abzuleiten, was gewiss kein vergebliches Bemühen sein wird. Weiter auf den Inhalt dieses Werkes einzugehen, gestattet uns leider hier der Raum nicht.

Geodäsie.

Anleitung zu Legung graphischer Dreiecksnetze bei Flurmessungen. Für die Geometer des Grossherzogthums Sachsen. Weimar, Hofbuchdruckerei. 1852. 4. 4 Sgr.

Wir machen auf diese uns gütigst zugesandte Instruction für die Feldmesser des Grossherzogthums Weimar — mit welchem Namen wir diese Schrift wohl bezeichnen dürfen — hier aufmerksam, weil dieselbe den erfreulichen Beweis liefert, mit wie viel Sorgfalt und Umsicht das für das gesellschaftliche Leben so wichtige Geschäft der Feldmesser in dem genannten kleinen Staate geleitet und überwacht wird. Dieselbe ist unterzeichnet: „Weimar am 8. October 1852. Der Grossherzogl. Sächs. Vermessungs-Director Herbst“, und enthält nicht, wie manche andere Feldmesser-Reglements, blosse allgemeine Vorschriften über Taxen, Maassstäbe, Zulässigkeit gewisser Fehler, u. s. w., sondern eine wirkliche kurze, praktisch-geometrische Anleitung zur Ausführung der fraglichen Operationen, wobei es uns besonders erfreulich gewesen ist, dass bei diesen Operationen als Messwerkzeug nur der Messtisch zulässig ist, und der sonst häufig gebräuchlichen Boussole gar nicht gedacht wird. Wie sehr dadurch der

Genauigkeit Vorschub geleistet wird, wird jeder Kundige sogleich einsehen. Indem wir dies hier aussprechen, wiederholen wir nur ein in diesem Archiv schon öfters über die beiden genannten Instrumente gefälltes Urtheil, wie man z. B. Thl. XVI. S. 44. sehen kann, an welchem Orte wir ein Verfahren zur genauen Aufstellung des Tisches über einem gegebenen Punkte auf dem Erdboden gelehrt haben, auf welches wir bei dieser Gelegenheit von Neuem aufmerksam zu machen uns erlauben möchten, weil wir dessen immer allgemeinere Einführung in die Praxis allerdings sehr wünschen, da es uns der Erhöhung der Genauigkeit der Messtischoperationen fortwährend sehr förderlich scheint, und sich Jedem, wer es nur einmal wirklich praktisch ausgeführt hat, durch seine Leichtigkeit und Eleganz gewiss empfehlen wird. Möge die obige kleine Schrift die verdiente Beachtung finden!

Sur la jonction des opérations géodésiques, Russes et Autrichiens, exécutée par ordre des deux gouvernements. Par W. Struve, Directeur de l'observatoire central de Russie.

Der berühmte Verfasser dieser kleinen Schrift beschränkt sich nicht darauf, die im Titel bezeichnete Verbindung der geodätischen Arbeiten beider Staaten zu besprechen; er gibt vielmehr in der ersten grössern Hälfte eine Uebersicht der geodätischen Arbeiten in Europa und deutet die Resultate an, welche aus einer zweckmässigen Verbindung derselben für die Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde erlangt werden können. Aus dieser Schrift einen gedrängten Auszug hier mitzutheilen, halte ich für um so zweckmässiger, als der Verfasser bei seiner, länger als ein Menschenalter hindurch unausgesetzten Thätigkeit in diesem Zweige wohl der competenteste jetzt lebende Beurtheiler sein dürfte.

In den letzten 65 Jahren sind in fast ganz Europa, die Türkei und die Iberische Halbinsel ausgenommen, ferner in Asien und Amerika grosse Messungen ausgeführt worden; während derselben wurde die Theorie durch Legendre, Gauss und Bessel, die Instrumente durch Reichenbach vervollkommnet. Durch des Letztern genauere Theilung der Kreise ist die am Ende des vorigen Jahrhunderts als Hülfsmittel eingeführte Repetition der Winkelmessung überflüssig geworden, wogegen Gauss und Bessel die Messung von Winkeln zwischen den Dreiecksseiten und Diagonalen zur Controlle eingeführt haben. Auf diese Weise kommen überflüssige Bestimmungsstücke in die Rechnung, und es werden zuletzt die wahrscheinlichsten Werthe nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Während der Verfasser zwar im Allge-

meinen mit dieser Art der Controlle einverstanden ist, macht er doch folgende Einwürfe dagegen:

1. das Terrain wird häufig die Beobachtung der Diagonalen nicht gestatten;
2. da auf diese Weise an der einen Stelle Diagonalen beobachtet werden, an der andern nicht, so entsteht eine Unregelmässigkeit in den Endresultaten;
3. wird die Rechnung hierdurch sehr weitläufig.

Der erste Umstand waltete namentlich bei der grossen Gradmessung ob, welche von der Nähe des Nordcaps bis zur Donau fortgeführt worden ist; daher hat man es hier vorgezogen, mehrere Grundlinien zur Controlle zu messen. Wie nahe die, aus verschiedenen Grundlinien hergeleiteten Resultate mit einander übereinstimmen, werden wir an einigen angeführten Beispielen sehen.

Diese Gradmessung ist in den Jahren von 1816 bis 1851 ausgeführt worden, es wurden hierbei 26 Grundlinien gemessen, das Azimut einer Seite und die Breite auf 68 Hauptstationen beobachtet. Die Grundlinien sind zwar mit verschiedenen, aber mit einander vergleichbaren und wirklich verglichenen Apparaten gemessen worden, so dass hiernach auch die aus den einzelnen Grundlinien abgeleiteten Resultate mit einander verglichen werden können. Bei der Verbindung der von Tenner in Litthauen mit der von Struve in den Ostseeprovinzen ausgeführten Gradmessung ergab sich demnach der wahrscheinliche Fehler jedes beobachteten Winkels etwa $=0'',5$. In Betreff der Genauigkeit, mit welcher die Längen gemessen sind, hat sich in der Summe identischer Seiten, welche

70783,209 Toisen

beträgt, ein Unterschied von

$$1{,}851 \text{ Toisen, d. h. } \frac{1}{38240} \text{ der ganzen Länge}$$

ergeben. Endlich sind auch die aus beiden Messungen erlangten Höhen über der Ostsee mit einander verglichen worden, welche aus resp. 300 und 350 Werste langen Nivellements hergeleitet waren. Der Unterschied in der Höhe beträgt

1,74 Toisen.

Die Messung Tenners ist andererseits mit der von Bessel und Baeyer in Preussen ausgeführten Gradmessung verbunden worden, wobei die Uebereinstimmung noch weit grösser ausfällt. Der Unterschied in zwei identischen Seiten, deren Länge

27679,440 Toisen

beträgt, steigt nämlich nur auf

$$0{,}093 \text{ Toisen, d. h. } \frac{1}{297500} \text{ d. g. L.}$$

So wie diese Verbindung in der Breite von etwa 56° hergestellt worden ist, hat man in der höheren Breite von 60° die Russische Gradmessung mit der Schwedischen und Norwegischen verbunden.

Mittelst der so hergestellten Verbindung der Russischen Gradmessung mit den zunächst westlich liegenden und dieser mit den in Dänemark, Deutschland und England vollendeten Gradmessungen ist nun das Material gewonnen, um gleichzeitig einen Parallelbogen zu bestimmen. Am weitesten gegen Westen, nämlich zwischen Feagh-Main an der Westküste von Irland und Greenwich, hat Airy einen 10° 40′ langen Parallelbogen in der Breite von 51° 40′ gemessen. Der Längenunterschied zwischen Feagh-Main und Warschau ist mittelst Chronometer bereits zu

31° 22′ 37″,6

ermittelt worden; dieser Längenunterschied ist bis auf

$$1''{,}4, \text{ d. h. } \frac{1}{80000} \text{ d. g. L.}$$

genau. Zur Berechnung des Parallelbogens von dieser Ausdehnung aus gemessenen Grössen ist bereits jetzt das Material vorhanden und es steht zu erwarten, dass in 2 bis 3 Jahren dieser Bogen bis Saratov ausgedehnt werden kann, wo er dann

56° 25′

in Länge umfassen wird. Zunächst ist aber nach der Bemerkung des Verfassers erforderlich, dass die verschiedenen Staaten Europas einen Umriss der Dreiecke ersten Ranges, eine Angabe der verschiedenen Grundlinien und der beobachteten Azimute und Breiten bekannt machen. So können etwa noch vorhandene Lücken ausgefüllt und dann die Resultate eines grossen Parallelbogens abgeleitet werden.

Bei der Besprechung der Arbeiten, welche zur Verbindung der Oesterreichischen Messungen mit den Russischen ausgeführt worden sind, dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Schrift, geht der Verfasser näher auf die Einzelheiten ein, indem er z. B. die Unterschiede in den gemeinschaftlichen Grössen zu erklären und zu motiviren sucht. Hierin werde ich ihm nicht folgen, viel-

mehr mich darauf beschränken, diese Unterschiede kurz anzuführen. Erfreulich ist es, dass die oben erwähnte Uebereinstimmung der Preussischen Messung mit der Russischen sonst nirgend erreicht und noch weniger übertroffen wird.

Die Verbindung beider Messungen, der Oesterreichischen und Russischen, ist in zwei Richtungen ausgeführt, bei Cracow und bei Tarnogrod. Von Oesterreichischer Seite ward zu diesem Behuf eine Grundlinie von 3064 Toisen Länge gemessen und 26 Dreiecke dienten zur Verbindung der Stationen. Für die Längen und Breiten war die Sternwarte von Cracow, deren geographische Lage Weisse sehr genau ermittelt hat, der Ausgangspunkt. Die Höhen beziehen sich auf das Adriatische Meer, welches 95 g. M. von Cracow entfernt ist. Von Russischer Seite waren zwei Grundlinien von resp. 2761 und 2243 Toisen Länge gemessen worden, daher waren hier nur wenige Dreiecke zu errichten. Zur Orientirung diente die Sternwarte von Warschau und das gemessene Azimut von Przymiarki, alle Längenunterschiede sind vom erstern Punkte aus gerechnet, welcher durch Chronometer mit Pulkowa in Verbindung gebracht ist. Die absoluten Höhen beziehen sich auf das schwarze Meer, sind jedoch von der Ostsee bei Polangen hergeleitet.

Die Vergleichung gemeinschaftlicher Grössen hat für jeden gemessenen Winkel einen wahrscheinlichen Fehler von

$$\pm 0'',30$$

ergeben, während der Unterschied einer gemeinschaftlichen Linie

$$\frac{1}{103530} \text{ d. g. L.}$$

beträgt. Hieraus zieht der Verfasser den Schluss, dass in den Verbindungsarbeiten kein Anzeichen von einer bei der Messung der drei Grundlinien begangenen Unvollkommenheit enthalten ist.

Die Höhen der gemeinschaftlichen Punkte ergeben sich im Mittel bis auf

1,44 Toisen

übereinstimmend, und da diese Grösse kleiner ist, als die Summe der von beiden Seiten als möglich angegebenen Fehler; so folgt hieraus indirect, dass die Ostsee, das schwarze und Adriatische Meer keinen Niveau-Unterschied haben, der etwa 2 Toisen überstiege.

Die Höhe des Nullpunktes am Barometer der Sternwarte in Cracow ist aus 11jährigen Beobachtungen des letztern ermittelt worden; dieselbe stimmt bis auf

0,29 Toisen

mit dem Mittel aus beiden trigonometrischen Nivellements überein.

In Bezug auf die zwei Verbindungsstationen stimmen ferner
die Azimute bis auf 4",4 und 0",5
„ Breiten „ „ +0,245 „ −2,074
„ Längen „ „ +8,31 „ +8,70 in Bogen
überein. Hierbei bemerke ich zum Schluss, dass die im Azimut und der Breite gefundenen Unterschiede sich aus den, nach Bessel's Untersuchungen, localen Abweichungen in der Richtung der Schwere vollständig erklären lassen. Wolfers.

(Man vergl. Literar. Ber. Nr. LXXXI. S. 5. G.)

Optik.

Durch die Munificenz Sr. Majestät des Kaisers von Oesterreich ist, wie wir hören, in Wien ein besonderes optisches Institut gegründet und die Leitung dieser neuen Anstalt, von welcher sich die Wissenschaft mit Recht schöne Früchte verspricht, dem durch seine optischen Arbeiten längst bekannten Herrn Professor Petzval übertragen worden. Demselben ist zur Unterstützung seiner wissenschaftlichen Arbeiten ein besonderer Adjunct mit 1000 Gulden Gehalt beigegeben und 500 Gulden jährlich sind zur Anschaffung der erforderlichen Apparate und Instrumente bewilligt worden.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Literar. Ber. Nr. LXXXI. S. 11.)

Jahrgang 1852. IX. Band. 3. Heft. S. 506. Schweigger: Ueber die Auffindung der zwei ersten Uranustrabanten durch Lassell. — S. 530. Brücke: Ueber die Farben, welche trübe Medien im auffallenden und durchfallenden Lichte zeigen. — S. 549. Fritsch: Die Lichtmeteore in der Atmosphäre als Vorzeichen von Niederschlägen. — S. 652. Kreil: Zweiter Bericht über die k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. — S. 699. Petzval: Ueber die Unzukömmlichkeiten gewisser populärer Anschauungsweisen in der Undulationstheorie und ihre Unfähigkeit, das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer zu ersetzen.

Literarischer Bericht
LXXXIII.

Arithmetik.

Traité de l'Analyse indéterminée du second degré a deux inconnues suivi de l'application de cette Analyse à la recherche des racines primitives avec une table de ces racines pour tous les nombres premiers compris entre 1 et 10000. Mémoire présenté à l'Académie des sciences et inséré, après rapport, au recueil des savants étrangers. Par E. Desmarest, ancien élève de l'école polytechnique. Paris. 1852. 4. 6 Thlr. 20 Sgr.

Wir begnügen uns, dieses für die Theorie der Zahlen jedenfalls nicht unwichtige Werk hier jetzt nur seinem ausführlichen Titel nach, welcher Inhalt und Tendenz des Werkes vollständig und genau bezeichnet, anzuzeigen. Der sehr hohe Preis wird freilich Manchen von der Anschaffung desselben abhalten, und ob der Herr Verfasser alle neueren Untersuchungen anderer, namentlich deutscher Mathematiker über den fraglichen Gegenstand vollständig gekannt hat, wollen wir jetzt dahin gestellt sein lassen.

Praktische Mechanik.

Die calorische Maschine. Von F. Redtenbacher, Professor. Mit sechs lithographirten Tafeln. Zweite vermehrte Auflage. Mannheim. Bassermann. 1853. 8. 1 Rthlr.

Es wird genügen, zu bemerken, dass des Herrn Verfassers sorgfältige Untersuchungen über Ericson's calorische Maschine,

die in neuerer Zeit, namentlich in Zeitungen, bekanntlich viel Redens von sich gemacht hat, dieser Maschine keineswegs besonders günstig gewesen sind. In der Vorrede sagt er S. VI.: „Ich kann nicht umhin, es auszusprechen, dass die Leistungen seiner Maschine noch sehr ferne von dem Ziele sind, das man möglicher Weise durch geschickte Benutzung der erhitzten Luft erreichen kann, und dass Ericson die wesentlichste Erfindung, nämlich die Erfindung eines Kolbens, der Hitze und Spannkraft ertrüge, auch nicht gemacht hat, und so lange dies nicht glückt, hilft das Andere nur wenig." Ein bestimmtes Urtheil hierüber müssen wir denen überlassen, welche mit diesem Gegenstande sich näher vertraut zu machen Gelegenheit gefunden haben, als dies bis jetzt bei uns der Fall gewesen ist.

Astronomie.

Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. v. Littrow. Vierte Auflage. Nach dem neuesten Zustande der Wissenschaft bearbeitet von Carl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte zu Wien. Fünfte Lieferung. Stuttgart. Hoffmann. Jede Lieferung $12\frac{1}{2}$ Ngr.

Die vier ersten Lieferungen dieses trefflichen Werkes sind im Literar. Ber. Nr. LXXIV. S. 938. und Nr. LXXVIII. S. 972. angezeigt worden, und Alles, was wir dort zu seiner Empfehlung gesagt haben, gilt auch ganz in derselben Weise von der vor uns liegenden fünften Lieferung. Dieselbe enthält die „physische Astronomie", die schon in der vierten Lieferung angefangen worden war, und den Anfang „der beobachtenden Astronomie oder der Beschreibung und des Gebrauchs der astronomischen Instrumente." Der Inhalt der physischen Astronomie ist im Allgemeinen folgender: Eigenschaften der Körper. Allgemeine Schwere. Masse und Dichtigkeiten der Himmelskörper. Elliptische Bewegung der Himmelskörper. Störungen der Planeten überhaupt. Periodische Störungen. Seculäre Störungen. Entdeckung des Planeten Neptun. Gestalt und Atmosphäre der Planeten. Ebbe und Fluth des Meeres und der Atmosphäre der Erde. Andere merkwürdige Folgen der Störungen der Planeten. Ursprung des Weltsystems. Dauer des Weltsystems. — Wir sind der Meinung, dass dieser schwierigste Theil der gesammten Astronomie zu den schönsten Partieen des vorliegenden,

in so vielen Beziehungen ausgezeichneten Werks gehört, und mit steter Rücksicht auf die neuesten Forschungen und Entdeckungen hier eine Darstellung erhalten hat, wie sie nur von einem Manne gegeben werden konnte, der diesen Gegenstand selbst bis zu seiner innersten Tiefe durchdrungen hat. Jeder, wer sich mit ganz geringen Vorkenntnissen eine deutliche Einsicht in die Gesetze verschaffen will, nach denen der Schöpfer die physische Welt regiert, und die Natur der Kräfte kennen lernen will, deren er sich bei dieser Weltregierung bedient, muss dringend auf diese Darstellung der physischen Astronomie hingewiesen werden, so wie denn überhaupt, wie wir schon früher mehrmals erinnert haben, das vorliegende Werk unter allen Bedingungen bei Weitem die beste populäre Behandlung der gesammten Astronomie liefert, welche die Literatur gegenwärtig besitzt. Die sechste, die beobachtende Astronomie zu Ende führende Lieferung wird zugleich den Schluss des ganzen höchst verdienstlichen Werkes bilden; so bald dieselbe erschienen ist, werden wir ihren Inhalt hier sogleich anzuzeigen nicht verfehlen, indem wir schon jetzt dem Herrn Verfasser dieser neuen Auflage zu der Vollendung eines Werkes von Herzen Glück wünschen, durch welches er sich um alle die, welche, bei geringen Vorkenntnissen, von dem hohen Genusse, den dem eigentlichen Mathematiker das Studium der Astronomie gewährt, einen Begriff zu bekommen und desselben einigermassen theilhaftig zu werden den ernstlichen Willen haben und einige geistige Anstrengung dabei nicht scheuen, ein mit dem grössten Danke anzuerkennendes Verdienst erworben hat, welches er noch bedeutend erhöhet hat durch die gleichzeitige neue Herausgabe von

J. J. von Littrow's Atlas des gestirnten Himmels für Freunde der Astronomie. Zweite vielfach vermehrte und verbesserte Auflage, herausgegeben von Karl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte u. s. w. zu Wien. Stuttgart. Hoffmann. 1854. 8. 1 Rthlr.

Wir setzen voraus, dass die Leser die erste Auflage dieses von J. J. v. Littrow herausgegebenen Himmels-Atlasses kennen, und wollen nun in der Kürze angeben, wodurch sich diese neue Ausgabe vor der älteren auszeichnet. „Unserem Atlas“, sagt der Herr Herausgeber in der Vorrede, „gebührt das Verdienst, zuerst eine Zeichnungsweise eingeführt zu haben, bei welcher das Bild des Himmels, das sie geben soll, nicht weiter wie in allen älteren Karten durch Nebendinge oft bis zur Unkenntlichkeit entstellt wird. Unser Atlas hatte ferner die ihm eigenthümliche Bequemlichkeit, durch den die Karten Blatt für Blatt begleitenden Text gleichsam an Ort und Stelle den Beschauer des Himmels

auf das Wissenswertheste aufmerksam zu machen. Beide Vortheile mussten in der neuen Ausgabe bewahrt und wo möglich gesteigert werden ungeachtet des kleineren Maassstabes, der durch die vom Verleger gewünschte Aenderung des Formates in das der „Wunder des Himmels" nothwendig wurde. Wir sind der Meinung, dass der Herr Herausgeber in beiden angegebenen Beziehungen Alles geleistet hat, was nur irgend verlangt werden kann, und dass eben diese überall sorgfältig zu vermeiden gesuchte Ueberladung, welche stets die Sterne auf das Deutlichste hervortreten lässt, ein nicht genug anzuerkennendes Verdienst dieses Atlasses ist, welches denselben hauptsächlich für den blossen Liebhaber der Astronomie so ungemein brauchbar macht. Sehr zweckmässig hat der Herr Herausgeber von den Sternen sechster Grösse, welche nur ein gutes Auge zu unterscheiden vermag, nur wenige und bloss dort aufgenommen, wo ihre Aufführung zur Orientirung nothwendig schien. Die erläuternden Bemerkungen sind jetzt gleich unter die Karten gesetzt worden, was gegen die ältere Einrichtung, wo dieselben als besonderer Text den Karten beigegeben waren, die Bequemlichkeit ausserordentlich erhöhet. Aufgenommen in die Karten sind die bemerklichsten Nebelflecke und Sterngruppen, die grössern veränderlichen Sterne sind bemerklich gemacht, die Bezeichnung der Sterne durch Buchstaben nach Argelander's entscheidender Sichtung, sowie die Stellung der Sterne, wo diese fehlerhaft war, sind verbessert, und vor Allem machte der Herr Herausgeber in diesen Karten den ersten Versuch, die Grössen der Sterne nicht mehr durch conventionelle, sondern durch solche Zeichen anzugeben, die in nahe gleichen gegenseitigen Abstufungen der Wahrnehmbarkeit wie die bezeichneten Sterne stehen. Wenn man die Karte so weit vom Auge hält, dass dem Auge die feinen Umrisse der Figuren und die schwachen Declinations- und Stundenkreise zu verschwinden anfangen, so werden die Sterne in ihren Grössen und verhältnissmässigen Stellungen rein und scharf vor das Auge treten, und die Karte wird als ein treues Abbild des Himmels erscheinen. Dass auf alle neue Entdeckungen gehörig Rücksicht genommen worden ist, versteht sich bei einem Manne, wie dem Herrn Herausgeber, von selbst. Dem Gradnetze ist die Lage gegeben, welche es im Jahre 1850 hatte. Eine ausführliche Erläuterung, die aus den Wundern des Himmels hier abgedruckt ist, ist dem Werke als Einleitung beigegeben. Nimmt man zu allen diesen inneren Vorzügen nun noch die schöne äussere Ausstattung, welche die schon durch so vielfache schöne literarische Unternehmungen verdiente Verlagshandlung dem Werke gegeben hat, ferner den für 19 sehr schöne

Karten wirklich äusserst geringen Preis von 1 Rthlr., so wird man gewiss zugestehen, dass dieser neue Himmelsatlas allen Liebhabern der Astronomie dringend empfohlen werden muss, namentlich auch Lehrern, welche sehr vortheilhaften Gebrauch von demselben bei ihrem Unterrichte werden machen können.

Die Kometen, eine gemeinfassliche Beschreibung dieser Körper nebst einer kurzen Uebersicht der neueren Entdeckungen und einer Tafel der Kometenbahnen von J. Russel Hind. In deutscher Bearbeitung mit zahlreichen Anmerkungen und Zusätzen von Dr. J. H. Mädler, Director der Sternwarte zu Dorpat, u. s. w. Leipzig. Baumgärtner. 1854. 8. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Herr Staatsrath Mädler hat sich durch die Verpflanzung dieses Buchs auf deutschen Boden und durch die lehrreichen Bemerkungen und Zusätze zu demselben jedenfalls ein dankenswerthes Verdienst erworben, da dasselbe seinen Gegenstand in allen Beziehungen in einer höchst instructiven und interessanten Weise populär behandelt, und daher für einen Jeden, welcher die immer noch in mehrfacher Beziehung räthselhaften Kometen ihrer physischen Beschaffenheit und ihren Bahnen nach, so wie auch in historischer Rücksicht, genauer kennen lernen will, eine höchst erfreuliche Gabe sein muss. Was für den gelehrten Astronomen und Mathematiker die Cométographie ou Traité historique et théorique des Comètes par Pingré. T. I. Paris. 1783. T. II. Paris 1784. 4. ist, ist die vorliegende Schrift eines der verdienstlichsten neueren englischen praktischen Astronomen für den Liebhaber der Astronomie, und auch für den eigentlichen Astronomen und Mathematiker ist dieselbe deshalb sehr lehrreich, weil sie die Geschichte der Kometen bis auf die neueste Zeit fortführt, also insofern dem obigen grossen Werke von Pingré zur Ergänzung dient. Als besonders interessant heben wir hervor das Zehnte Kapitel. Der erwartete grosse Komet. Die Erscheinung eines der grössten Kometen, dessen die Geschichte gedenkt, fällt nämlich in die Mitte des Jahres 1264. Sein Schweif war nach Beobachtungen der Chinesen säbelförmig gekrümmt und umfasste nicht weniger als 100 Grade. Ohne uns hier auf weiteres Detail, das man a. a. O. mit grossem Interesse nachlesen wird, einlassen zu können, bemerken wir nur, dass Herr Hind durch sehr mühsame historische und andere Untersuchungen zu dem Schlusse gelangt ist, dass wir diesen Kometen in den Jahren 1856 bis 1860 wieder zu erwarten haben, und empfehlen schliesslich die interessante Schrift, indem wir unsern Dank dem Herrn Uebersetzer für die Uebertragung derselben auf deutschen

Boden wiederholt aussprechen, nochmals der Beachtung aller Liebhaber der Astronomie recht sehr. Auch die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung sehr ansprechend.

Physik.

Lehrgang der mechanischen Naturlehre für höhere Unterrichtsanstalten von Dr. G. Karsten, Professor der Physik an der Universität zu Kiel. Dritte Abtheilung: Lehre von den elektrischen Kräften. Mit zwei Kupfertafeln. Kiel. Akademische Buchhandlung. 1853. 8. 1 Thlr. 18 Sgr.

Dieses ursprünglich für die Schifffahrtsschule in Kiel bestimmte Lehrbuch, dessen vorhergehende Abtheilungen früher von uns angezeigt worden sind (Literar. Ber. Nr. LXI. S. 810.), ist nach Aufhebung dieser Lehranstalt jetzt ein allgemeines Lehrbuch der Physik geworden und hat dadurch nach unserer Meinung nur gewonnen. Besonders aber recht verdienstlich scheint uns diese dritte Abtheilung zu sein, weil man in derselben eine so vollständige Darstellung der Elektricitätslehre, mit gehöriger Berücksichtigung aller neueren Entdeckungen und, wo es nöthig war, besonders verdienstlicher elementar-mathematischer Begründung, findet, wie man sie in anderen, eine ähnliche Tendenz habenden Werken schwerlich finden dürfte, weshalb diese Schrift namentlich auch von allen den Physikern und Mathematikern mit Dank aufgenommen werden wird, welche sich dem Studium der elektrischen Kräfte ex professo zu widmen weder Zeit noch Lust haben, denen deshalb mit einer solchen kurzen Darstellung, wie sie hier geboten wird, sehr gedient sein muss, so wie denn auch wir selbst dem Herrn Verfasser für die uns in diesem Werke gewährte Uebersicht des in Rede stehenden wichtigen Theils der Physik zu Dank verpflichtet sind. Indem wir dem Werke aus diesen Gründen möglichste Verbreitung wünschen, wollen wir seinen Hauptinhalt noch in der Kürze angeben, da eine weitere Ausdehnung uns der beschränkte Raum nicht gestattet: Von den Erscheinungen und Gesetzen des Magnetismus. Von der Reibungselektricität und anderen Elektricitätsquellen grosser Dichtigkeit. Von der Berührungselektricität (Galvanismus). Von der Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen und magnetischen Körpern. — Schon aus diesen wenigen Angaben wird der Leser entnehmen, wie sehr der Herr Verfasser nach einer möglichst systematischen Anordnung gestrebt hat, die in diesem Gebiete in zweckmässiger Weise schwer zu finden ist. Die angehängten

Uebungsbeispiele sind in dieser wie in den früheren Abtheilungen eine dankenswerthe Zugabe.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LXXXI. S. 11.)

Jahrgang 1852. IX. Band. 4. Heft. S. 762. Kirchhoff: Ueber die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. — S. 809. Fritsch: Die tägliche Periode der Gewitter und ihre Ursachen. — S. 834. Pohl und Schabus: Tafel zur Bestimmung der Capillardepression in Barometern, auf welche wir, als sehr zweckmässig und vollständig, Beobachter des Barometers besonders aufmerksam machen.

Jahrgang 1852. IX. Band. 5. Heft. S. 858. Schofka: Ueber einige Lichtmeteore, in welcher Abhandlung insbesondere eine neue Erklärung des Zodiakallichts gegeben wird, nach welcher diese räthselhafte Erscheinung als die auf den Himmel projicirte Brennlinie des von der Atmosphäre reflectirten Sonnenlichts zu betrachten sein soll. Der Herr Verfasser begründet diese Erklärung auch durch eine mathematische Betrachtung, die er aber auf S. 865. selbst als eine nur vorläufige und unvollkommene bezeichnet, und deren strenge Durchführung mit gehöriger numerischer Anwendung auf das in Rede stehende räthselhafte Phänomen wir daher bei der Wichtigkeit des Gegenstandes und der Neuheit der versuchten Erklärung, die nach dem, was bis jetzt vorliegt, allerdings Einiges für sich zu haben scheint, den Mathematikern empfehlen möchten. — S. 885. Unger: Nehmen die Pflanzen dunstförmiges Wasser aus der Atmosphäre auf? Eine sehr gründliche, allgemein interessante Untersuchung, die zu dem Endresultate (S. 899.) geführt hat: dass die Blätter der Pflanzen in ihrer normalen Function kein dunstförmiges Wasser aufnehmen, sondern dass ihnen durchaus und unter allen Umständen vielmehr die entgegengesetzte Verrichtung, nämlich Abgabe von Wasserdunst an die Atmosphäre, zukomme. — S. 902. Fritsch: Nachweisung einer seculären periodischen Aenderung der Lufttemperatur. Aus vieljährigen, an mehreren Orten angestellten Beobachtungen. — S. 912. Littrow: Bericht über die in den Jahren 1847—51 ausgeführte österreichisch-russische Verbindungs-Triangulation. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LXXXI. S. 5.) — S. 921. Kreil: Dritter Bericht über die k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmag-

netismus. — S. 936. Grailich: Bestimmung des Winkels der optischen Axen mittelst der Farbenringe, angewendet auf den prismatischen Blei-Baryt (Weissbleierz).

Schreiben des Herrn G. Parthey in Berlin an den Herausgeber.

Nicht ohne Verwunderung las ich in Nr. 77. Bd. 20. Ihres Archivs für Mathematik die Anzeige des „Lehrbuches der Arithmetik von Radicke." Es wird, wie ich hoffe, genügen, Ihnen den Zusammenhang der Sache vorzulegen, um Sie von der Grundlosigkeit Ihrer Beschuldigungen zu überzeugen. Von der gedachten Arithmetik erschien die erste Ausgabe nicht, wie Sie in Ihrer Anzeige vorauszusetzen scheinen, in der Nicolai'schen Buchhandlung, sondern 1847 bei Herrn Blum in Koblenz. Aus uns unbekannten Gründen verkaufte Herr Blum den ganzen Vorrath nebst dem Verlagsrechte des Werkes an den Kaufmann Herrn Anton Fischer in Koblenz, worüber ein obrigkeitliches Zeugniss vom 1. März 1852 uns vorliegt. Aus Freundschaft für Herrn Professor Radicke, von dem wir früher ein Lehrbuch der Optik verlegt hatten, brachten wir den Vorrath jenes Werkes von Herrn A. Fischer käuflich an uns, damit die zum Gebrauch für Vorlesungen bestimmte Arithmetik nicht gänzlich aus dem Buchhandel verschwinde. Dass nun der alte Titel mit der Blum'schen Firma nicht bleiben konnte, sondern mit einem neuen vertauscht werden musste, werden Sie gewiss einsehen. Unter diesen Umständen ist es ein im Buchhandel durchaus nicht ungewöhnliches Verfahren, ein solches Werk „eine zweite Ausgabe" zu nennen, da es in der That von Neuem ausgegeben, d. h. an die betreffenden Buchhandlungen versandt wird, was, beiläufig gesagt, von Herrn Blum nicht in gehöriger Weise geschehen war. Um jedoch dieser neuen Ausgabe einen selbständigen Werth zu geben, fügte Herr Profess. Radicke ausdrücklich die „Zulage" hinzu, welche die seit 1847 von ihm angestellten neueren Untersuchungen enthält. Wäre es überhaupt hierbei, wie Sie zu verstehen geben, auf eine Täuschung des Publikums abgesehen gewesen, so hätte sich ja leicht ein Carton für S. XIX. und XX. der Vorrede drucken lassen, um das alte Datum 1847 fortzuschaffen. Von Ihrem Gerechtigkeitssinne darf ich erwarten, dass Sie dem Inhalte dieser Auseinandersetzung einen Platz in Ihrem Archive nicht versagen werden.

Berlin, den 19. März 1853.

Für die Nicolai'sche Buchhandlung
G. Parthey.

Vorstehendes, im Namen der Nicolai'schen Buchhandlung von Herrn G. Parthey in Berlin an mich gerichtete Schreiben habe ich auf dessen Wunsch gern im Archive abdrucken lassen. Dass durch dieses Schreiben die Sache allerdings in einiger Rücksicht zu Ehren der genannten Buchhandlung aufgeklärt wird, gebe ich gern zu; jedoch werden sich die Leser des Archivs überzeugen, dass im Wesentlichen an derselben nichts geändert wird, da Herr Parthey selbst zugiebt, dass das in Rede stehende Buch nichts weiter ist, als ein altes mit einem neuen Titel und dem Zusatze: zweite Ausgabe versehenes Buch; weiter hat auch im Literar. Ber. Nr. LXXVII. nichts gesagt werden sollen und weiter ist auch in der That dort nichts gesagt worden, bloss in der Absicht, um die Leser vor der Anschaffung dieser sogenannten zweiten Ausgabe zu warnen.

Grunert.

Literarischer Bericht

LXXXIV.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Realanstalten und Gymnasien, sowie zum Selbstunterricht von Dr. C. B. Greiss, Professor am Realgymnasium zu Wiesbaden. Mit 179 in den Text eingedruckten Holzschnitten und zwei Lithographien. Wiesbaden bei Kreidel. 1853. gr. 8. 559 S. 1 Thlr. 10 Sgr. *)

Es giebt zwei Wege der Behandlung naturwissenschaftlicher Gebiete. Man stellt entweder zuerst die Ergebnisse von Beobachtungen und Versuchen auf und beweist sie hinterdrein, indem man die letzteren wiederholt oder als Thatsachen anführt; oder man beginnt mit der Anstellung gewisser, auf ein bestimmtes Ziel gerichteter Beobachtungen und leitet dann hieraus Gesetze ab, deren allgemeine Giltigkeit um so wahrscheinlicher wird, je mannichfaltigere Erscheinungen sich hieraus erklären lassen und je mehr sich diese Gesetze mit andern auf gleiche Weise gefundenen übereinstimmend zeigen. Wer seine Belehrung auf dem ersten Wege empfängt, befindet sich mehr in einem passiven Zustande, indem er damit beginnt, womit der Forscher geendiget hat. Er überzeugt sich wohl zuletzt von der Richtigkeit der aufgestellten Behauptung, aber er arbeitet weniger selbst mit. — Anders verhält er sich bei der zweiten Behandlungsweise. Hier

---

*) Wenn auch dieses Buch schon im Literar. Ber. Nr. LXXXI. S. 8. in gewöhnlicher Kürze angezeigt worden ist, so trage ich doch kein Bedenken, auch nachstehende, mir später zugesandte ausführlichere Recension abdrucken zu lassen, um so mehr, weil dieselbe verschiedene sehr einsichtsvolle pädagogische Bemerkungen enthält. G.

macht er erst mit seinem Führer gemeinschaftlich eine Reihe von Beobachtungen, ohne noch zu wissen, was sich daraus ergeben werde. Er ist genöthiget, die ihnen gemeinsamen Erscheinungen selbst mit aufzusuchen und diese soweit zurückzuführen, als seine Kräfte gestatten oder als selbst die seines Führers reichen, der dann auch bei „Naturkräften" stehen bleiben muss. Dass der Lernende bei diesem Verfahren mehr Freude an der Sache hat, weil er sich dabei selbst thätiger fühlt, leuchtet auf den ersten Blick ein. Doch ist dies nicht der einzige Vortheil. Ein grösserer besteht darin, dass der Schüler gleich von vorne herein alle Erscheinungen aufmerksam betrachten, seine Beobachtungen unter einander vergleichen, das Bleibende vom Veränderlichen, das Nothwendige vom Zufälligen unterscheiden lernt, und dass er, wo sich ihm eine Gesetzmässigkeit zu zeigen anfangt, von selbst veranlasst wird, seinen Beobachtungen eine bestimmte Richtung zu geben, d. h. Reihen von Versuchen zu machen, um zu sehen, ob seine Vermuthung sich bestätigen werde. Der grösste Gewinn aber von dieser Methode findet sich in noch etwas Anderem. Die Anwendung derselben lehrt nicht bloss richtig sehen und das Gesehene verfolgen, sondern sie stellt uns gleich Anfangs auf den rechten Standpunkt jedes ächten Naturforschers. Letzterer nämlich ist ein gar vorsichtiges und bescheidenes Menschenkind. Auch nach mannichfaltigen, auf das Sorgfaltigste angestellten Versuchen sagt er nicht: was ich gefunden, ist ein Naturgesetz; sondern nur: das Gefundene ist desto wahrscheinlicher allgemein giltig, je grösser die Anzahl der Erscheinungen ist, welche sich darauf zurückführen lassen, und mit je mehreren anderen wahrscheinlichen Gesetzen es übereinstimmt.

Auf diese letztere Weise nun ist die Physik in dem oben genannten Lehrbuche behandelt. Es werden darin erst die Erscheinungen aufgestellt, welche sich uns unter gegebenen Umständen darbieten und hiernach hieraus allgemeine Ergebnisse abgeleitet. Dabei rechnen wir es dem Verfasser zu besonderem Verdienste an, dass er, wo immer möglich, von solchen Thatsachen ausgeht, die jedem Beobachter ganz nahe liegen, und von Versuchen, welche dieser leicht selbst anstellen kann. In dieser Beziehung wird das Buch auch für solche werthvoll, die sich ohne fremde Hülfe mit der Physik bekannt machen wollen, indem diese mit wenigen, zum Theil leicht herstellbaren Mitteln sich über Vieles näher unterrichten können. In pädagogischer Hinsicht aber ist eine solche Wahl der Mittel noch weit wichtiger, da jeder Lehrer weiss, dass ein zusammengesetzter Apparat die Aufmerksamkeit der Jugend sehr zersplittert, weil derselben hier Alles neu und wunderbar erscheint und sie noch nicht die Kraft hat, auch

nicht haben soll, ihre Thätigkeit dergestalt zu concentriren, dass sie gerade von dem abstrahire, was ihr am meisten in die Augen fällt.

Eine andere lobenswerthe Seite des Buches finden wir darin, dass es über dem Neuen das Alte nicht vergisst und an vielen Stellen, natürlich so weit es der Raum gestattet, kurze geschichtliche Notizen giebt. Wir legen hierauf einen nicht geringen Werth, weil Jung und Alt sich dankbar derjenigen Männer erinnern soll, die vor uns, oft unter grossen Schwierigkeiten und selbst Gefahren, redlich geforscht haben. — Auch finden sich in dem Buche die Kunstausdrücke etymologisch erklärt, was die Namen behaltbarer macht und nicht selten sogar deren Verständniss erleichtert.

Bei einem physikalischen Lehrbuche haben wir zunächst zu fragen, ob es innerhalb gewisser Grenzen die nöthige Reichhaltigkeit, und zwar in einer solchen Weise besitze, dass der Schüler im Stande sei, auch bei der Wiederholung dessen, was er im Laufe mehrerer Jahre gehabt, sich mit Leichtigkeit ein vollständiges Bild von dem Vorgetragenen zu machen, wozu blosse Andeutungen um so weniger ausreichen, als die Anforderungen an ihn gar mannichfaltig sind. Eben so wichtig ist es, bei einer Wissenschaft, welche in stetem und raschem Fortschreiten begriffen ist, zu wissen, ob ein Lehrbuch derselben auf dem jetzigen Standpunkte stehe und nicht, wie oft genug der Fall ist, die neuesten Forschungen ignorire. — Beide Fragen kann Referent bejahen. Das Erstere folgt eigentlich schon aus der oben angegebenen Ableitungsweise der physikalischen Gesetze. Es muss aber hier noch besonders hinzubemerkt werden, dass die ganze Darstellung in zusammenhängender und lichtvoller Weise gegeben worden ist. — Was den Standpunkt des Lehrbuchs der Wissenschaft gegenüber betrifft, so hat wenigstens Referent nichts Wesentliches vermisst, worüber die Akten einigermassen geschlossen sind. Dass aber Schwankendes nicht aufgenommen ist, kann dem Buche nur zum Verdienste angerechnet werden, denn dies bleibt von dem Gebiete des Unterrichts ausgeschlossen. Uebrigens muss, beiläufig bemerkt, der Anstalt, an welcher der Verfasser wirkt, ein sehr guter Apparat zu Gebote stehen, indem von ihm sehr einfache und zweckmässige Instrumente beschrieben werden, die, wie die Darstellung zeigt, derselbe nicht bloss aus Beschreibungen oder Abbildungen kennt.

Wenn es für den Erwachsenen, der für sein Bedürfniss Belehrung aus einem physikalischen Werke sucht, ziemlich gleichgiltig sein wird, in welcher Weise der Stoff angeordnet sei, sobald

jener nur durch das Vorausgehende zu dessen Verständniss befähigt wird: so verhält sich dies bei einem für den Unterricht bestimmten Lehrbuche ganz anders. Bei einem Schüler ändert sich nicht bloss das Auffassungs- und Urtheilsvermögen, sondern auch der Stand der für manche Kapitel der Physik erforderlichen Hülfskenntnisse mit jedem Lebensjahre bedeutend. Auf einer gewissen Altersstufe geht ihm für abstractere Gebiete noch fast aller Sinn ab, der erst in späteren Jahren in ihm erwacht. Auch hierauf ist in obigem Lehrbuche gebührende Rücksicht und zwar in zum Theil so eigenthümlicher Weise genommen worden, dass Referent, als er das erstemal die Eintheilung des ganzen Materials ansah, zufolge welcher sogleich nach der Betrachtung der allgemeinen mechanischen Eigenschaften der Körper, die Lehre von dem Magnetismus, der Elektricität, dem Schalle, dem Lichte und der Wärme, zuletzt aber die gesammte Mechanik folgte, ein wenig erschrak und allerlei Besorgnisse hatte. Er hat sich jedoch bei näherer Erwägung aller Umstände sehr mit dieser Anordnung der einzelnen Gebiete ausgesöhnt.

Dass die Mechanik an das Ende gebracht ist, hat seinen natürlichen Grund in dem Stande der mathematischen Vorkenntnisse des Schülers, welcher erst in der letzten Schulzeit für das Verständniss der hier zu behandelnden Gegenstände hinreichende Befähigung erlangt hat. Hierdurch ist der doppelte Vortheil gewonnen, dass sich alsdann gründlicher auf den Gegenstand eingehen lässt und dass der Schüler seiner ganzen geistigen Bildung nach hierfür empfänglicher ist.

Es blieb nun nur noch die Frage, ob die übrigen Zweige der Physik sich ohne tiefere Kenntniss der Mechanik genügend behandeln lassen. Sieht man genauer zu, so ist, innerhalb der Grenzen eines Schulbuchs, die Zahl der hierzu erforderlichen mechanischen Sätze in der That sehr klein und wird sich ziemlich auf das Parallelogramm der Kräfte und in mathematischer Beziehung auf die einfachsten Eigenschaften der Winkelfunctionen und die Kenntniss der Gleichungen höchstens zweiten Grades reduciren. Es wird also gewiss zweckmässiger sein, diese wenigen Sätze geeigneten Orts, wo sie noch fehlen, einzuschalten, als den Schüler gleich Anfangs in ein Gebiet einzuführen, das dann nur mangelhaft behandelt werden könnte und für das ihm ohnedies die Empfänglichkeit abgienge. Weit lebhafter interessirt sich der jüngere Schüler für die Erscheinungen des Magnetismus, der Elektricität u. s. w. Denn hier werden ganz dem jugendlichen Geiste entsprechend alle Sinne in Anspruch genommen, hier wird es dem Schüler so leicht, die Grundversuche zu

Hause nachzumachen und selbst abzuändern, was für die geistige Entwickelung nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Auf solche Weise bekommt der Anfänger Lust und Freude an der Physik. Aus diesem Grunde ist es auch zu billigen, dass erst nach der Elektricität die Lehre vom Schalle behandelt worden, indem auch hier schon etwas mehr mathematische Vorkenntnisse vorauszusetzen sind, so wie, dass die, die meisten mathematischen Vorkenntnisse bedürfende Lehre vom Lichte und der Wärme die vorletzte Stelle einnimmt.

Was die Vertheilung des Stoffs dem ihm gegönnten Raume nach betrifft, so kommen auf die Einleitung, deren ersten allgemeinen Paragraphen Referent ganz weggelassen haben würde, auch weil er auf dieser Stufe dem Schüler zu nichts hilft, zwei Seiten. Die für alle sieben Abschnitte in Anspruch genommenen Räume,

nämlich:	verhalten sich wie:
die mechanischen Eigenschaften der Körper im Allgemeinen	3
der Magnetismus	1
die Elektricität	6
der Schall	3
das Licht	8
die Wärme	6
die Mechanik	8.

Dafür, dass die Lehre vom Lichte mit besonderer Ausführlichkeit bearbeitet worden, führt der Verfasser einen Grund an, welchem Sachverständige gern beistimmen werden, dass nämlich es für die wissenschaftliche Ausbildung wichtig sei, einen Gegenstand umfassender zu behandeln, damit hieran der Schüler lerne, wie viel es zu erforschen giebt, und was es heisst, einen Gegenstand ernstlich angreifen. Hierzu aber eignet sich in der That die Optik sehr wohl, weil sie wenigstens theilweise einer elementar-mathematischen Behandlung besonders fähig ist.

Nach des Referenten Ansicht würden es übrigens nicht bloss viele Lehrer der Physik, sondern auch deren Schüler, ja selbst andere Leser des Buches dem Verfasser Dank wissen, wenn er sich bei einer neuen Ausgabe dazu entschlösse, jedes Hauptgebiet der Physik, wie die Lehre von der Wellenbewegung und dem Schalle, dem Magnetismus und der Elektricität, sowie dem Lichte und der Wärme, in derselben Weise, wie dies gegenwärtig mit letzterem geschehen ist, in drei einzelnen und einzeln käuflichen Heften zu bearbeiten. Dann hätte jeder Lehrer, je nach seiner

Richtung, oder um in verschiedenen Cursen abzuwechseln, bei der tiefer eingehenden Behandlung eines Gebietes die Auswahl, ohne dass dadurch das Buch vertheuert würde. Wer aber die Physik lieb gewonnen hätte, der käme durch den Ankauf sämmtlicher Hefte zugleich in den Besitz eines durchgängig ausführlicheren und dennoch in demselben Geiste bearbeiteten Lehrbuchs; anderer Leser gar nicht zu gedenken, welche dann desto lieber nach dem Ganzen greifen und mit eben solchem Vortheile zuvor im Hauptbuche eine Uebersicht gewinnen und sich erst dann zum Studium der Erweiterungen begeben würden.

Auf Einzelheiten einzugehen, ist hier der Ort nicht; doch mag erwähnt werden, dass man in dem Buche z. B. mehr Auskunft über die Gesetze der Schwingung der Luftsäule in den Blasinstrumenten finden wird, als dem Referenten in andern Lehrbüchern vorgekommen ist, wo der nicht leichte Gegenstand in der Regel nur berührt wird. Eben so sind die Dampfmaschinen in dem Kapitel von der Wärme auf eine den Zeitverhältnissen angemessene Weise berücksichtiget und durch sehr saubere und zweckmässige Abbildungen erläutert worden. In dem letzten, der Statik und Dynamik der Körper in ihren drei Aggregatzuständen gewidmeten Abschnitte wird man, obschon die Grenzen der heutigen Elementarmathematik fast nirgends überschritten sind, viel mehr antreffen, als in den meisten gangbaren Lehrbüchern. Hierzu rechnet Referent namentlich das Kapitel von der Höhenmessung durch das Barometer, worin fast alle dabei in Betracht kommenden Umstände berücksichtiget sind.

Da das ganze Buch klar und doch ohne alle Weitschweifigkeit geschrieben und mit meistentheils recht guten, in den Text eingedruckten Abbildungen (179 Stück) versehen ist, da es auf gutem Papier reinlich gedruckt auf sechsthalbhundert Seiten, ohne überladen zu sein, ein reiches Material enthält, da es zugleich in einer zu eigenem Forschen anregenden und vorbereitenden Weise und in einer Anordnung abgefasst ist, welche der jugendlichen Fassungskraft entspricht, so glaubt Referent es mit Grund zur Einführung in höhere Lehranstalten empfehlen zu dürfen, zumal der Preis des Werkes sehr niedrig gestellt ist.

λμνρ.

Meteorologie und Nautik.

Wie eifrig die Meteorologie nebst ihrer Anwendung auf die Schifffahrt in Amerika gepflegt wird, ist bekannt genug. Einen

neuen Beweis hierfür liefert ein uns gütigst zugesandtes Werk, welches den durch seine meteorologischen Arbeiten, sein „Work on Storms" u. s. w. berühmten, hochverdienten Professor James P. Espy zum Verfasser hat, und verschiedene über den Fortgang der meteorologischen Arbeiten an den Secretary of the Navy erstattete Berichte enthält, welche uns ein höchst interessantes Bild von der Grossartigkeit dieser Arbeiten, von der ungemeinen Umsicht und von dem wahrhaft praktischen Sinne, womit dieselben geleitet und ausgeführt werden, vorführen, so dass wir diese Berichte einem Jeden, wer sich für die Meteorologie, die Schifffahrt u. s. w. interessirt, auf das Angelegentlichste empfehlen müssen. Wie unendlich viel für Meteorologie in neuester Zeit in Deutschland, zunächst und hauptsächlich in Oesterreich durch den unermüdlichen Kreil, welcher in der grossartigsten Weise von der österreichischen Regierung sowohl, als auch von Privatpersonen — indem z. B. Herr Minister v. Baumgartner in der liberalsten Weise freiwillig auf sein Gehalt bei der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Gunsten der meteorologischen Anstalten verzichtete — unterstützt wird; wie viel ferner in Bayern durch den trefflichen v. Lamont; wie viel endlich in Preussen, namentlich in den letzten Jahren, hauptsächlich auf v. Humboldt's Anregung durch den trefflichen Dove geschieht: wird gewiss Niemand verkennen. Wenn man aber in dem Werke, welches uns hier zu einer kurzen Besprechung vorliegt, die demselben vorangestellte „Liste of meteorological correspondents" überblickt und darin 163 Namen aus allen Staaten Amerikas, und unter denselben viele auch anderweitig bekannte, findet: so muss man freilich erstaunen über die grosse Allgemeinheit des Interesses, mit welchem die Meteorologie in jenem, überhaupt durch die Grossartigkeit aller seiner Institutionen *) uns zur Bewunderung hinreissenden Ertheile gepflegt wird.

Der Inhalt des vorliegenden Werkes ist zu reichhaltig und zu mannigfaltig, als dass wir denselben hier vollständig angeben könnten. Wir müssen uns daher auf das Hauptsächlichste beschränken. Zuerst enthält das Werk den „Second Report on Meteorology to the Secretary of the Navy: by James P. Espy", dann den „Third Report on Meteorology, with Directions for Mariners etc.: by James P. Espy." Beide Berichte enthalten eine sehr vollständige Darstellung der bei den meteorologischen Beobachtungen und den aus denselben gezogenen Resultaten in theoretischer und praktischer Rücksicht befolgten Principien, die man mit dem grössten Interesse lesen wird. Ganz besonders interessant ist uns aber die „Communication from the Secretary of the Navy with Professor Espy's „Rules for the Mariner", founded on this Theory of Storms" gewesen, die wir namentlich auch allen Lehrern der Schifffahrtskunde an deutschen Schifffahrtslehranstalten dringend

*) In Norton's Literary Register and Book Buyer's Almanac for 1853. Newyork. 1853. finden wir z. B. mehr als 400 öffentliche amerikanische Bibliotheken verzeichnet, bei denen die Bändezahl von 15000, 20000 etwas ganz Gewöhnliches ist, unter denen aber auch nicht wenige mit 50000, 60000, 90000 Bänden vorkommen.

zur Beachtung empfehlen möchten, wobei uns zugleich eine deutsche Uebersetzung dieser „Rules for the mariner, deduced from the investigation of storms in my*) Philosophy of storms, and in my three reports on Meteorology" sehr wünschenswerth erscheint. — Ganz besonders erhöht wird endlich noch das Interesse dieses Werkes durch 100 demselben beigegebene meteorologische Landkarten und 11 den Gang des Barometers graphisch darstellende Tableaus in grösstem Format.

Mögen die obigen wenigen Bemerkungen hinreichen, die Aufmerksamkeit auf dieses und ähnliche in Amerika erscheinende wichtige Werke in vollstem Maasse zu lenken.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LXXXIII. S. 7.)

Jahrgang 1853. X. Band. 1. Heft. S. 3. Petrina: Ueber die vortheilhafte Anwendung der Zweigströme bei der Telegraphie. — S. 88. Haidinger: Einige Bemerkungen über die Anordnung der kleinsten Theilchen in Krystallen. — S. 117. Unger: Nachträgliches zu den Versuchen über Aufsaugen von Färbestoffen durch lebende Pflanzen. (Die sehr wichtige Abhandlung, zu welcher hier Nachträge geliefert werden, finden die Leser im ersten Bande der Denkschriften der Kaiserlichen Akademie.)

Jahrgang 1853. X. Band. 2. und 3. Heft. S. 129. Petrina: Beiträge zur Physik. — S. 153. Scherzer: Mittheilungen aus Nordamerika. — S. 193. Grailich: Bestimmung der Zwillinge in prismatischen Krystallen mit Hülfe des polarisirten Lichts. — S. 219. Knochenhauer: Ueber die inducirte Ladung der Nebenbatterie in ihrem Maximum. — S. 275. Derselbe: Notiz über den Widerstand des Eisendrathes im elektrischen Strome. — S. 278. Boué: Ueber einen merkwürdigen Regenbogen. — S. 404. Unger: Versuche über Luftausscheidung lebender Pflanzen. — S. 414. Derselbe: Welchen Ursprung hat das von den grünen Pflanzentheilen ausgeschiedene Stickgas? — S. 435. Spitzer: Bemerkungen über ausgezeichnete Linien krummer Flächen.

Jahrgang 1853. X. Band. 4tes und 5tes Heft. S. 482. Uchatius: Apparat zur Darstellung beweglicher Bilder an der Wand. — S. 527. Schrötter: Ueber das Gefrieren des Wassers im luftverdünnten Raume und die dabei durch das Verdunsten des Eises erzeugte Kälte. — S. 616. Gintl: Der elektrochemische Schreibapparat für den Telegraphenbetrieb in Oesterreich. — S. 717. Bibra: Ueber Chile. — S. 748. Uchatius: Praktische Methode zur Bestimmung des Salpetergehalts im Schiesspulver.

*) Espy's.

4 Am 73



